

01;02
©1994

ОБ ИНКРЕМЕНТЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

С.О.Ширяева, И.Д.Григорьева

С явлением неустойчивости сильно заряженной сферической капли, проявляющемся в ее сфероидальной деформации с последующим сбросом избыточного заряда в виде серии высокодисперсных сильно заряженных капелек, приходится сталкиваться в связи с разнообразными приложениями в физике, научном приборостроении, технике, геофизике и химической технологии (см., например, обзор [1] и указанную там литературу). Несмотря на многообразие приложений и большое количество экспериментальных и теоретических исследований, некоторые аспекты реализации такой неустойчивости остаются малоизученными. Это касается и вопроса о скорости нарастания со временем сфероидальной деформации неустойчивой капли, имевшей первоначально сферическую форму. Причиной недостаточного понимания обсуждаемого процесса является не дефицит внимания со стороны исследователей, но нелинейность самого явления: скорость нарастания деформации зависит от величины самой деформации и от условий перераспределения заряда капли при развитии деформации. В таких условиях инкремент нарастания неустойчивости как характеристика временной эволюции деформации при экспоненциальном законе ее нарастания во времени представляется неадекватным

ситуации. Но рассмотрим обсуждаемое явление более детально.

Спектр капиллярных колебаний изолированной капли проводящей жидкости радиуса R , с зарядом Q и коэффициентом поверхностного натяжения σ определяется выражением [2]:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho \cdot R^3} n(n-1)[(n+2) - W], \quad W = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \sigma \cdot R^3}, \quad (1)$$

где n — номер моды капиллярных колебаний, ρ — плотность жидкости. Из (1) легко видеть, что $W > 4$ становится неустойчивой основная мода ($n = 2$) капиллярных колебаний капли, амплитуда которой ζ начинает расти со временем по закону $\zeta \sim \exp(\alpha t)$, где

$$\alpha = \left\{ \frac{2\sigma}{\rho R^3} (W - 4) \right\}^{1/2}.$$

Но и при $W = 4$ капля уже неустойчива по отношению к бесконечно малым деформациям ее поверхности вида $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos \theta)$, соответствующим виртуальному возбуждению основной моды капиллярных колебаний. Возбуждение подобных капиллярных колебаний может иметь причиной хотя бы тепловое движение молекул жидкости. В этом случае амплитуда ζ_0 определится выражением $\zeta_0 = (\sigma/k \cdot T)^{1/2}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура жидкости. Тепловое возбуждение капиллярной волны $\sim P_2(\cos \theta)$ соответствует виртуальному вытягиванию капли в сфероид с эксцентриситетом $e_0 = (3 \cdot \zeta_0/R)^{1/2}$. Но для сфероида критическое для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значение параметра W является убывающей функцией эксцентриситета [3]. В линейном по квадрату эксцентриситета e^2 приближении эта функция имеет вид [3]:

$$W = W_* = 4(1 - \beta \cdot e^2), \quad (2)$$

где $\beta \approx 1/3$. Поэтому при $W = 4$ для капли, претерпевшей виртуальное (тепловое) искажение формы $\zeta = \zeta_0 \cdot P_2(\cos \theta)$; амплитуда такого возмущения начнет расти со временем по экспоненциальному закону с инкрементом

$$\alpha_0 = \left\{ \frac{8\sigma}{\rho R^3} \beta e_0^2 \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Но увеличение амплитуды возмущения $\sim P_2(\cos \theta)$ соответствует дальнейшему вытягиванию капли, увеличению ее эксцентриситета и снижению согласно (2) критического значения неустойчивости и, следовательно, приводит к увеличению инкремента неустойчивости.

Выписывая последовательность растущих возмущений в близкие моменты времени, несложно получить нелинейное интегральное уравнение, описывающее рост амплитуды ζ со временем:

$$\zeta(t) = \zeta_0 \cdot \exp \left\{ \kappa \int_0^t \{\zeta(t)\}^{1/2} dt \right\}, \quad (4)$$

$$\kappa = \left\{ \frac{24\sigma}{\rho R^4} \beta \right\}^{1/2},$$

решение которого имеет вид

$$\zeta(\alpha_0 t) = \zeta_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \alpha_0 t \right\}^{-2}. \quad (5)$$

На рисунке приведены зависимость (5) (кривая 1) и для сравнения экспоненциальная зависимость (кривая 2):

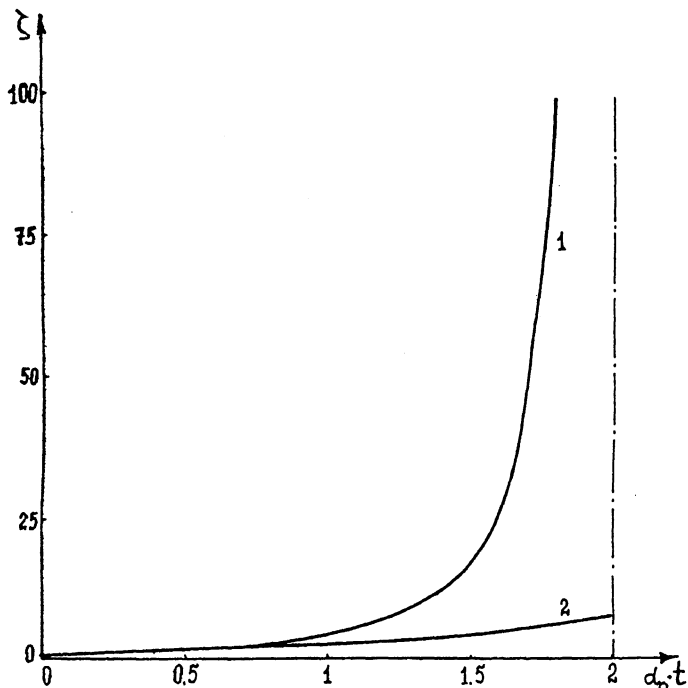
$$\zeta(\alpha_0 t) = \zeta_0 \cdot \exp(\alpha_0 t). \quad (6)$$

Из рисунка ясно, что инкремент α_0 как величина, характеризующая время увеличения амплитуды возмущения в 2.7 раза, дает относительно достоверную информацию о временной зависимости $\zeta(t)$ лишь в самом начале процесса, на временном интервале $t < \alpha_0^{-1}$. Для аналитической наглядности разложим выражение (5) и экспоненту (6) в ряды Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(\alpha_0 t)}{\zeta_0} &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \alpha_0 t \right\}^{-2} = 1 + \alpha_0 t + \\ &+ \frac{3}{4} (\alpha_0 t)^2 + \frac{1}{2} (\alpha_0 t)^3 + \frac{5}{16} (\alpha_0 t)^4 + \dots, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\frac{\zeta(\alpha_0 t)}{\zeta_0} = \exp(\alpha_0 t) = 1 + \alpha_0 t + \frac{(\alpha_0 t)^2}{2!} + \frac{(\alpha_0 t)^3}{3!} + \frac{(\alpha_0 t)^4}{4!} + \dots \quad (6a)$$

Видно, что эти два ряда совпадают лишь в линейном по $\alpha_0 t$ приближении.



1 — кривая временной эволюции сфероидального возмущения неустойчивой по отношению к собственному заряду капли, 2 — кривая экспоненциального временного роста такого же возмущения с фиксированным инкрементом.

Соотношение (5) указывает также, что максимальное время реализации неустойчивости $t_* \leq 2\alpha_0^{-1}$ (знак $<$ отмечает тот факт, что сброс избыточного заряда начинается при некотором конечном удлинении капли, точнее говоря, при $\epsilon^2 \approx 0.7$ [5]).

Из (5) видно, что изменение величины α_0 приводит лишь к изменению характерного временного масштаба развития процесса. Отметим, что в реальных условиях начальное значение инкремента α_0 может определяться тремя факторами: 1) при $W = 1$ амплитудой теплового виртуального искажения сферической формы $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos \theta)$; 2) при $W > 1$ величиной избыточного заряда; 3) при $W \leq 1$ при наличии значительной сфероидальной деформации капли, вызванной силами неэлектрической природы (например, акустическим давлением на поверхность капли $\sim P_2(\cos \theta)$ амплитудой деформации). В последнем случае, когда исходная сфероидальная деформация близка к критической для иницииро-

вания неустойчивости более высоких мод (см. [3]), экспоненциальный рост со временем амплитуды первоначального возмущения с инкрементом α_0 может привести каплю к началу сброса заряда за время $t < \alpha_0^{-1}$. В этом случае инкремент α_0 будет характеризовать временную эволюцию неустойчивой капли в течение всего процесса.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шевченко С.И. // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. В. 3. С. 25–43.
- [2] Rayleigh Lord Strutt J.W. // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–188.
- [3] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. В. 7. С. 1272–1278.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 3. С. 19–28.
- [5] Taylor G. Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. P. 383–397.

Ярославский государственный
университет

Поступило в Редакцию
27 декабря 1993 г.