

01;12

ДИАГНОСТИКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ МЕТОДОМ Ω -РАЗМЕРНОСТИ

© М.И.Рабинович, И.М.Старобинец, М.Ш.Цимринг, В.В.Чугурин

Институт прикладной физики РАН,
603600 Нижний Новгород, Россия
(Поступило в Редакцию 18 июня 1995 г.)

Анализируется новая характеристика детерминированно порожденных нерегулярных сигналов — Ω -размерность $D(\Omega)$, для вычисления которой предварительно используется спектральное преобразование типа фильтра с предельной частотой пропускания Ω . Для наблюдаемой, которая генерируется динамической системой с однородным странным аттрактором, Ω -размерность не зависит от Ω и совпадает с размерностью, измеряемой стандартным способом. Если же наблюдаемая не обладает свойством подобия при изменении временного масштаба (структурирована по t) вычисление $D(\Omega)$ дает дополнительную информацию о свойствах сигнала, в частности позволяет оценить число дополнительных степеней свободы в полученной наблюдаемой после прохождения сигнала канала связи или предварительной обработки. Показано, что в этом случае метод Ω -размерности позволяет восстанавливать размерностные характеристики многомерных хаотических реализаций одновременно для всех масштабов в пространстве вложения.

1. Постановка задачи

Широко обсуждаемые в последние годы размерностные характеристики $[1,2]$ хаотических сигналов во многих случаях позволяют судить о свойствах источника, т. е. порождающей эти сигналы физической (химической, экономической и т. д.) системы $[3]$. В отдельных, особенно простых случаях удается даже восстановить модельную динамическую систему, которая в состоянии генерировать сигнал, размерностные характеристики которого (K_2 -энтропия, корреляционная размерность и др.) совпадают с соответствующими характеристиками исследуемого сигнала $[4]$. Вычисление размерности хаотического сигнала основано на восстановлении соответствующего стохастического множества в некотором пространстве — пространстве вложения размерности m . При этом рассматривается отрезок наблюдаемой $u(t)$

$$u(t_1) = \left\{ u(t_1), u(t_1 - \tau), \dots, u(t_1 - (m-1)\tau) \right\} \quad (1)$$

и строится корреляционный интеграл

$$C^m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta(\varepsilon - \| \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j \|), \quad (2)$$

где \mathbf{u}_i и \mathbf{u}_j — два отрезка наблюдаемой, каждый длиной m , θ — функция Хевисайда.

По смыслу корреляционный интеграл есть среднее по всей наблюдаемой (по всему стохастическому множеству в пространстве вложения) числа пар точек, расстояние между которыми меньше ε . Если в (2) не усреднять по всем точкам i , т. е. оставить только суммирование по j , то $C_i^m(\varepsilon)$ — это частота попадания точки на траектории (в пространстве вложения), отвечающей $u(t)$, в m -мерный шар радиуса ε с центром в точке i . Предел

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C^m(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (3)$$

если он существует, называется корреляционной размерностью. Таким образом, размерность хаотической наблюдаемой ассоциируется с фрактальными свойствами соответствующего стохастического множества в некотором модельном фазовом пространстве. Если это множество обладает определенными свойствами самоподобия или однородности, то в (3) можно не переходить к пределу и вычислить D по формуле

$$D = \frac{\ln C^m(\varepsilon_2) - \ln C^m(\varepsilon_1)}{\ln(\varepsilon_2) - \ln(\varepsilon_1)}, \quad (4)$$

где ε_1 и ε_2 , вообще говоря, произвольны (но, конечно, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ достаточно мало).

Естественно, что большинство хаотических сигналов таковы, что соответствующие им фрактальные множества неоднородны — они имеют разный скейлинг при различных ε . При этом функция $C^m(\varepsilon)$ может иметь существенно различные наклоны при различных ε и D — не число, а функция $D(\varepsilon)$. Такая функция может нести новую и весьма интересную информацию о сигнале (см., например, [5]). Стохастический сигнал помимо структурированности, проявляющейся при варьировании ε , может характеризоваться отсутствием инвариантности и по отношению к изменению масштаба времени. Это легко пояснить с помощью мысленного эксперимента. Представим себе, что хаотическая наблюдаемая — суперпозиция двух хаотических сигналов с различными временными масштабами. Очевидно, что размерность хаотического множества, соответствующего суммарной наблюдаемой, есть сумма размерностей. Однако, если мы не обладаем априорной информацией о наблюдаемой, мы ничего не сможем сказать о ее структурированности, анализируя лишь размерность соответствующего стохастического множества. Нужны новые, связанные с ее временными или соответствующими спектральными свойствами, характеристики наблюдаемой $u(t)$.

В связи с этим в [6] было введено понятие Ω -размерности. Помимо исходной наблюдаемой $u(t)$ будем рассматривать также множество

наблюдаемых, образуемых по следующему алгоритму: $u(t)$ подвергается преобразованию Фурье и полученный спектр $S(\omega)$ умножается на функцию $[1 - \theta(\Omega)]$

$$\tilde{S}(\omega, \Omega) = S(\omega)[1 - \theta(\Omega)], \quad (5)$$

θ — гладкая функция, аппроксимирующая функцию Хевисайда.

Затем над $S(\omega, \Omega)$ осуществляется обратное преобразование Фурье и получается однопараметрическое семейство наблюдаемых $\tilde{u}(t, \Omega)$. Каждая из наблюдаемых, принадлежащих этому семейству, характеризуется фрактальной (корреляционной и т. д.) размерностью $D(\Omega)$. Эта функция $D(\Omega)$ была названа Ω -размерностью наблюдаемой $u(t)$, а производная $dD/d\Omega$ — спектральной плотностью размерности.

Приведем теперь несколько примеров, иллюстрирующих конструктивность этих новых характеристик для анализа временных и пространственно-временных хаотических наблюдаемых.

2. Прохождение хаотического сигнала через несогласованные фильтры

Рассмотрим хаотическую наблюдаемую $u(t)$, Ω -размерность которой постоянна, и пропустим ее через волновой канал связи с дисперсией. В общем случае из-за наличия отражений в канале (рассогласование на выходе, случайные неоднородности и т. д.) в проходящем сигнале будут присутствовать “шумы” канала связи и свойства хаотической наблюдаемой $U(t)$ на выходе канала будут отличаться от свойств $u(t)$. В качестве простого примера рассмотрим канал связи в виде цепочки из M элементов в виде LC -ячеек

$$\begin{aligned} \ddot{I}_n + \frac{2}{LC} I_n &= \frac{2}{LC} (I_{n+1} + I_{n-1}), \\ \ddot{u}_n + \frac{2}{LC} u_n &= \frac{2}{LC} (u_{n+1} + u_{n-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными условиями

$$u_0/I_0 = R_1, \quad u_M/I_M = R_2, \quad (7)$$

где u_0 и u_M — входной и выходной сигналы соответственно.

При $R_1 = R_2 = \rho = \sqrt{L/C}$ отражение в канале связи отсутствует.

Мы определяли минимальную размерность пространства вложения D для хаотического сигнала, прошедшего через канал связи (6), (7) с различными коэффициентами отражения на концах. В начале в качестве входного сигнала используем реализацию системы Лоренца [7]. В компьютерном эксперименте ее прохождение через линию связи (6) будем моделировать с помощью преобразования свертки фурье-спектра входного сигнала и спектральной характеристики линии. Для определения минимальной размерности пространства вложения применим методику поиска собственных значений ковариационной матрицы [8].

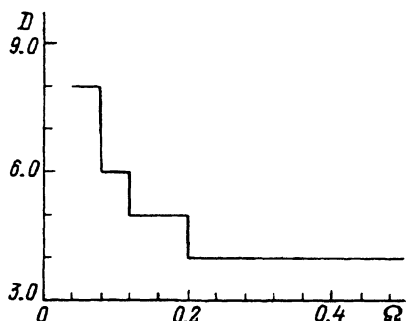


Рис. 1. Функция $D(\Omega)$ для реализации системы Лоренца, пропущенной через несогласованный канал связи.

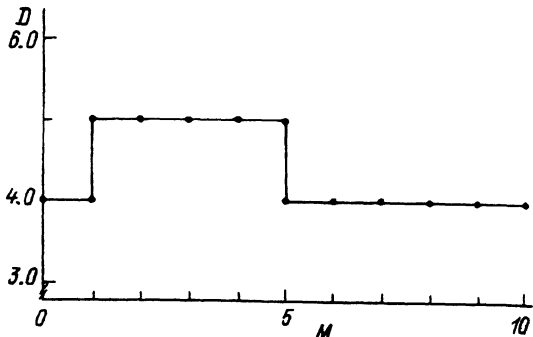


Рис. 2. Размерность пространства вложения для системы Лоренца в зависимости от числа элементов согласованного канала (6), (7).

Согласно этой методике, для построенной временной серии $u_i = u(it)$ вычисляются собственные значения λ_k матрицы

$$\theta_{ij} = N^{-1} \sum_{k=1}^N u_{i+k-1} u_{j+k-1} \quad (i, j = 1, \dots, m), \quad (8)$$

с помощью которых определяется число линейно независимых координат, которое и называется размерностью пространства вложения D . На практике D определяется по излому на графике функций $f(k) = \ln(\lambda_k / \sum_{i=1}^m \lambda_i)$. Отметим, что подобное определение D соответствует переходу в пространстве вложения к новому базису, в котором фазовая траектория имеет отличные от нуля проекции на $D \leq m$ осей.

Используем в качестве хаотической наблюдаемой $u(t)$ "эталонный" хаотический сигнал, генерируемый системой Лоренца. Размерность этого сигнала $D_{Lor} = 4$. В результате прохождения этого сигнала через канал связи (6), (7) при $M = 100$ и $R_1 = 2\sqrt{L/C}$, $R_2 = 4\sqrt{L/C}$ размерность D сигнала на выходе фильтра оказывается примерно вдвое больше D_{Lor} (рис. 1), причем D зависит от частотной характеристики фильтра. Подчеркнем, что в случае канала связи без отражений (согласованный фильтр $R_1 = R_2 = \sqrt{LC}$) размерность выходного сигнала $D = D_{Lor}$ и не меняется при изменении частотных характеристик фильтра (в частности, частоты среза $\Omega = 1/\sqrt{LC}$). Сказанное справедливо, если M достаточно велико ($M \geq 6$). Если же M мало, то и при $R_1 = R_2 = \sqrt{L/C}$ канал связи оказывается плохо согласованным и на выходе размерность $D > D_{Lor}$ (рис. 2).

Обратимся теперь к нашей основной задаче и попытаемся определить исходную размерность сигнала, прошедшего через искажающий (в частности, из-за отражений) канал связи. Для этого, как было предложено в разделе 1, пропустим искаженный хаотический сигнал через согласованный фильтр, изменяя его критическую частоту Ω (см. (5)), и при каждом Ω будем вычислять $D(\Omega)$, т. е. определим Ω -размерность. Результаты такой обработки для сигнала, рассмотренного ранее, представлены на рис. 3. Как видно, при $\Omega > \Omega_*$ вели-

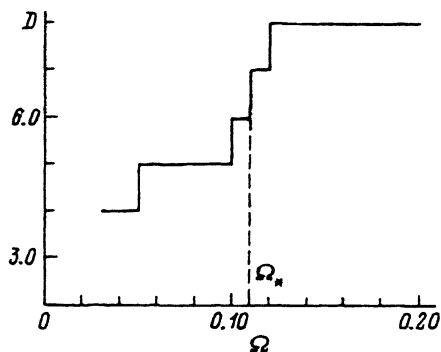


Рис. 3. Ω -размерность временной серии системы Лоренца, пропущенной через несогласованный (с частотой $\Omega_* = 0.12/\tau_{cor}$, τ_{cor} — время корреляции системы Лоренца) и согласованный (с различными Ω) каналы связи.

чина $D(\Omega)$ практически совпадает с размерностью хаотического сигнала, прошедшего через канал связи с отражениями. При $\Omega \leq \Omega_*$ $D(\Omega)$ уменьшается почти вдвое и при дальнейшем уменьшении Ω остается постоянным. Это позволяет заключить, что размерность $D(\Omega < \Omega_*)$ и соответствует “восстановленной” размерности сигнала, т.е. сигнала до прохождения им канала связи. Действительно, оказалось $D(\Omega < \Omega_*) \approx D_{Lor}$. Величина же Ω_* , как показал анализ передаточной характеристики канала связи с отражениями, есть наименьшая частота собственных пульсаций используемого несогласованного фильтра. Существенно, что полученный результат не зависит от длины согласованного канала связи (при достаточно большом M , в нашем случае при $M \geq 6$). В частности, при $M = 20$ и 100 построенные функции $D(\Omega)$ практически идентичны.

3. Ω -размерность пространственно-временных реализаций

Таким образом, мы видим, что предложенная методика позволяет эффективно проводить диагностику одномерных сигналов, искаженных предварительной обработкой. Однако в случае бесконечномерного фазового пространства (в системах, описываемых уравнениями с частными производными) естественно ожидать появления дополнительных трудностей. Во-первых, математический аппарат для исследования таких систем к настоящему времени все еще недостаточно разработан. В частности, нет достаточно удобных аналогов понятиям ляпуновских характеристических экспонент, ляпуновской размерности и т.д. Во-вторых, анализ пространственно-временных реализаций требует, как правило, значительно большего числа обрабатываемых точек и многие известные методы оказываются сложны в применении. Наконец, последние исследования показывают, что в таких системах вычисляемая размерность зачастую очень сильно зависит от пространственного масштаба или вовсе является бесконечной, и тогда можно вести речь лишь о плотности размерности [9]. В этих случаях, для того чтобы метод Ω -размерности эффективно работал, необходимо, чтобы он позволял восстанавливать не только реальное значение размерности, но также и структуру ее зависимости (и зависимости ее производной) от масштаба. Проведенные нами исследования позволяют оптимистически оценить возможность такого анализа.

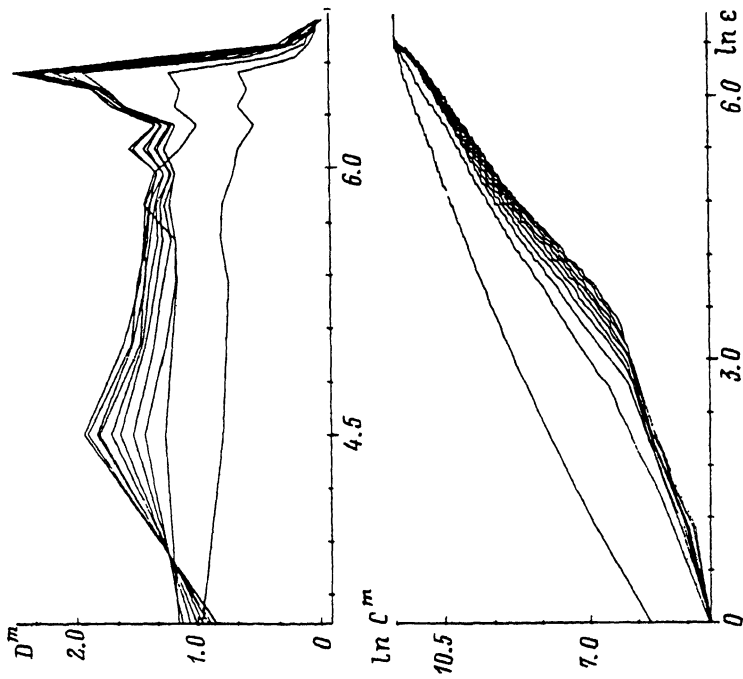


Рис. 4. Зависимости корреляционных интегралов $C^m(\epsilon)$ и корреляционных размерностей $D^m(\epsilon)$ для "сканированного" сигнала системы Гинзбурга-Ландау для различных размерностей пространства вложения ($m = 5-15$).

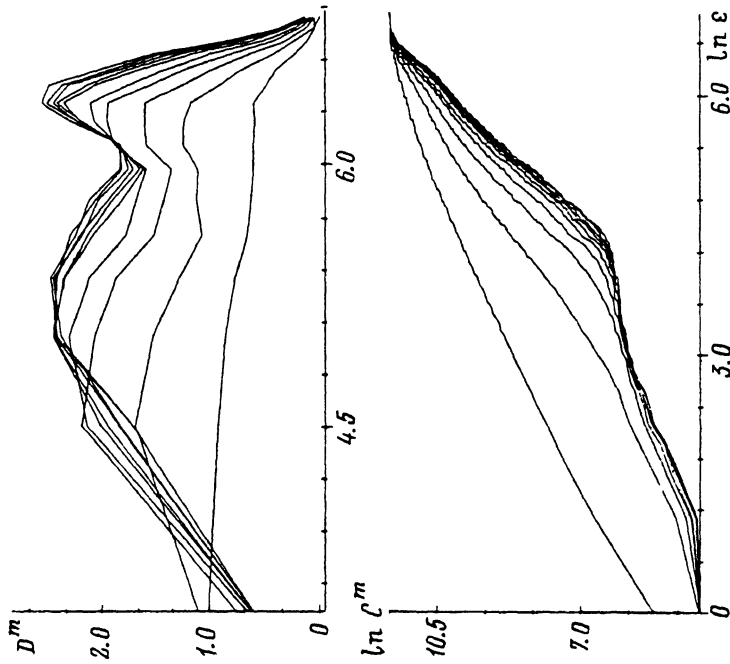


Рис. 5. То же для "сканированного" сигнала системы Гинзбурга-Ландау, пропущенного через "несогласованный" канал связи ($R_1 = R_2 = 4\sqrt{L/C}$, $\Omega_* = 1/\tau_{\text{соег}}$, $\tau_{\text{соег}}$ — время корреляции оригинального сигнала).

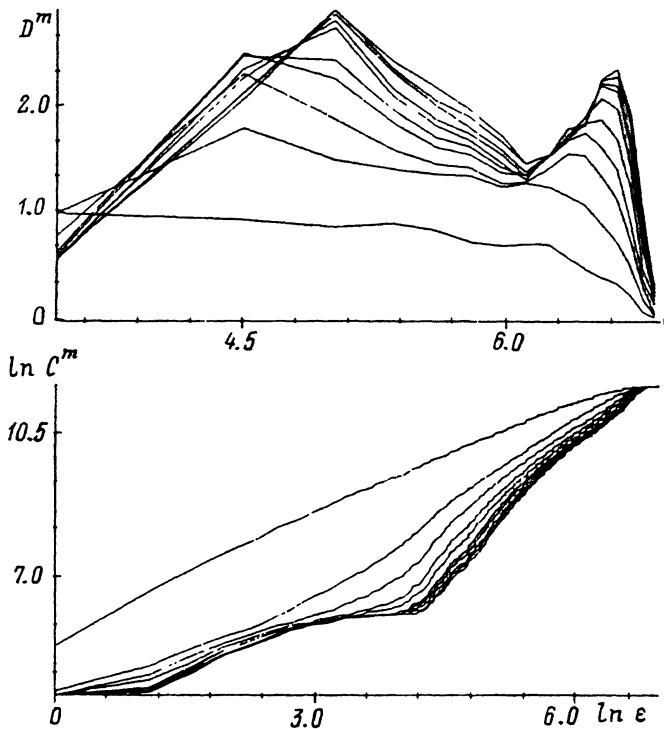


Рис. 6. То же для сигнала с выхода несогласованного канала связи, пропущенного через согласованный канал связи с $\Omega = 0.9\Omega_*$.

Мы рассмотрели двумерную реализацию, определяемую уравнением Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W - \xi |W|^2 W + \delta \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (9)$$

с периодическими граничными условиями

$$W(t, 0) = W(t, L) \quad (10)$$

и параметрами $\xi = 1 + 1.3i$, $\delta = 10^{-4}(1 - 1.1i)$, при которых в фазовом пространстве существует странный аттрактор. Обработке подвергалась двумерная дискретная реализация $W_{ij} = W(t_i, x_j)$, $i = \overline{1, P}$, $j = \overline{1, Q}$, с помощью которой конструировалась одномерная "сканированная" серия

$$u_k = u_{i+P(j-1)} = W_{ij}. \quad (11)$$

Известно [10], что такая конструкция позволяет сохранить корреляционную размерность (3) двумерного снимка, в то же время к серии u_k применима процедура, описанная в предыдущем разделе. Теперь, однако, мы вместо ковариационной матрицы (8) исследовали корреляционный интеграл $C^m(\epsilon)$ (см. (2)) и корреляционную размерность $D^m(\epsilon)$ с тем, чтобы было видно также влияние различных масштабов ϵ [11].

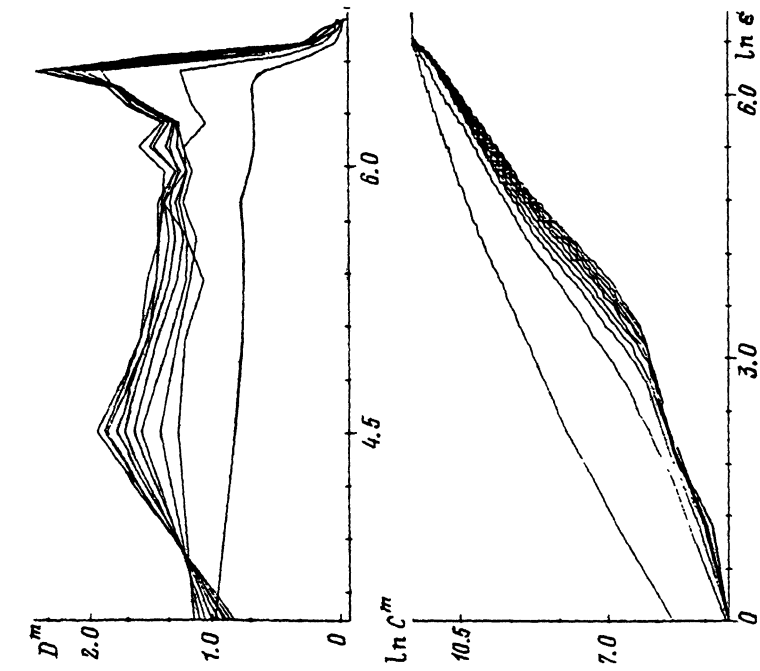


Рис. 7. То же для сигнала с выхода несогласованного канала связи, пропущенного через согласованный канал связи с $\Omega = 0.6\Omega_*$.

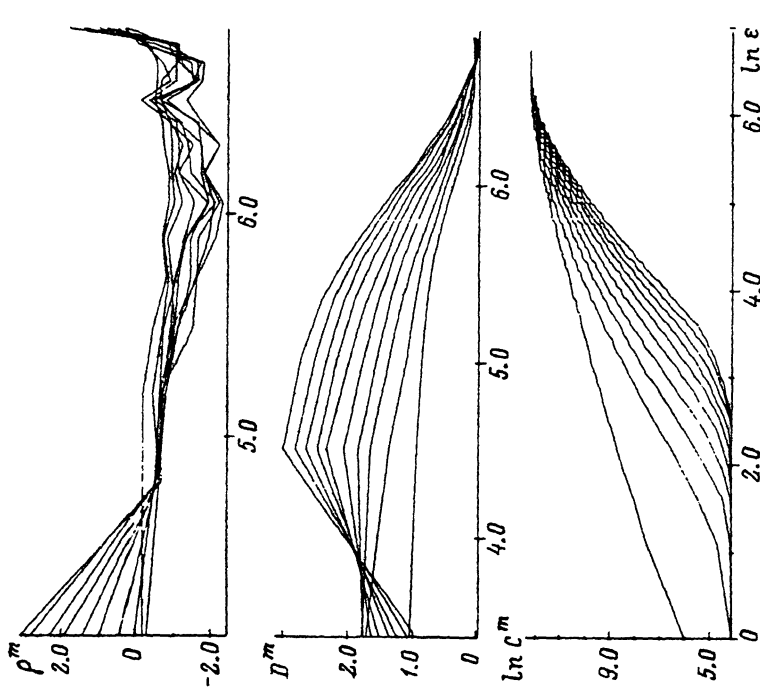


Рис. 8. Зависимости корреляционных интегралов $C^m(\epsilon)$, корреляционных размерностей $D^m(\epsilon)$ и их производных $\rho^m(\epsilon)$ для "сечения" сигнала системы Гинзбурга-Ландау во времени для различных размерностей пространства вложения ($m = 5-15$).

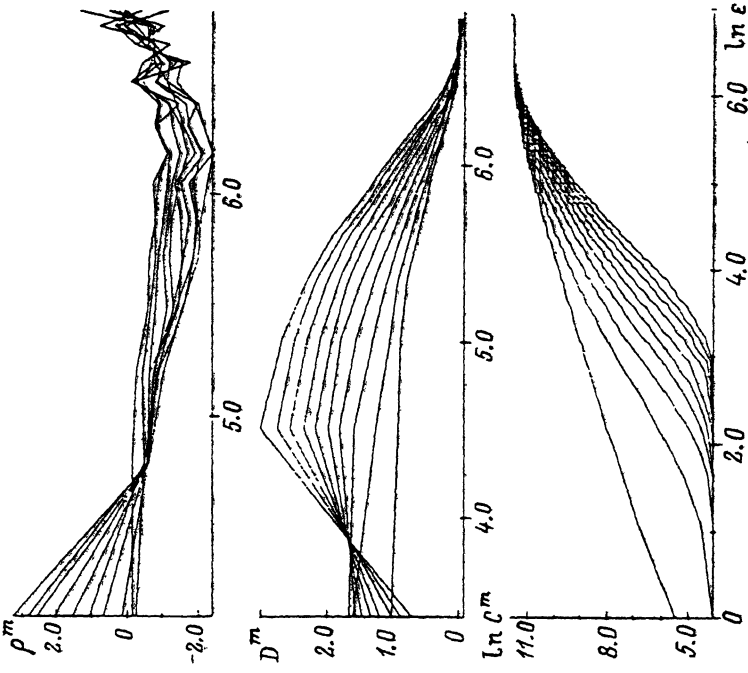


Рис. 9. То же для "сечения" сигнала системы Гинзбурга-Ландау во времени, пропущенного через несогласованный канал связи ($R_1 \approx R_2 = 4\sqrt{L/C}$, $\Omega_* = 1/T_{\text{сог}}$, $T_{\text{сог}}$ — время корреляции оригинального сигнала).

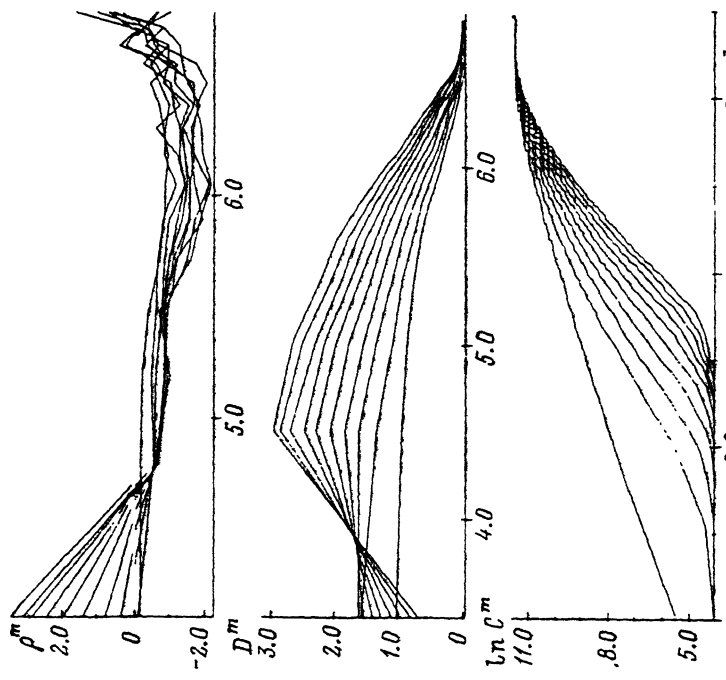


Рис. 10. То же для сигнала с выхода несогласованного канала связи, пропущенного через согласованный канал связи с $\Omega = 0.6\Omega_*$.

Результаты представлены на рис. 4–7. На рис. 4 представлены зависимости $C^m(\varepsilon)$ и $D^m(\varepsilon)$ для реализации (11), дающие значение $D \approx 1.34$. Затем данный сигнал пропусклся через несогласованный канал (6), (7) ($R_1 = R_2 = 4\sqrt{L/C}$, $\Omega_* = 1/\tau_{\text{кор}}$, $\tau_{\text{кор}}$ — время корреляции оригинального сигнала). После этого не только существенно изменялось значение $D \approx 2.5$, но и сами зависимости $D^m(\varepsilon)$ резко искажались на всех масштабах ε (рис. 5). Затем “испорченный” сигнал был пропущен через согласованный фильтр с различными частотами пропускания Ω ($\Omega = 0.9\Omega_*$ для рис. 6 и $\Omega = 0.6\Omega_*$ для рис. 7). Нетрудно убедиться, что при $\Omega = 0.6\Omega_*$ мы не только восстанавливаем исходную размерность $D \approx 1.34$, но рис. 7 иллюстрирует полное качественное совпадение с неискаженным сигналом зависимостей $D^m(\varepsilon)$ для всех масштабов одновременно.

Последнее обстоятельство особенно важно в случае, когда у нас нет всей необходимой информации о сигнале, позволяющей точно определить его размерность, или же когда величина D бесконечна и можно говорить лишь о плотности размерности. Такая ситуация была смоделирована нами для уравнения (9), (10), когда в качестве одномерных серий u_k выбирались “сечения”

$$u_k = W_{kj}$$

при фиксированных j (т.е. временные реализации в отдельных точках пространства [10]). Результаты приведены на рис. 8–10, где приводятся не только функции $C^m(\varepsilon)$ и $D^m(\varepsilon)$, но и производные $\rho^m(\varepsilon) = d(D^m(\varepsilon))/d\varepsilon$. Для неискаженного сигнала (рис. 8) величины $D^m(\varepsilon)$ не имеют установившегося значения, а зависимости $\rho^m(\varepsilon)$ дают значение плотности размерности ρ , вводимой аналогично формуле (4) $\rho \approx -0.12$. Прохождение сигнала через несогласованный фильтр (6), (7) не только искажает функции $C^m(\varepsilon)$ и $D^m(\varepsilon)$ (рис. 9), но и разрушает структуру $\rho^m(\varepsilon)$ (после чего значения ρ вообще не удается достоверно установить). На рис. 10 представлены те же зависимости для искаженного сигнала, прошедшего через согласованный фильтр с $\Omega = 0.6\Omega_*$. Благодаря этой процедуре удается восстановить как качественную структуру функций C^m , D^m , ρ^m , так и исходное значение $\rho \approx -0.12$.

4. Диагностика компонент структурированного сигнала

Помимо определения исходной размерности сигнала, прошедшего через канал связи, анализ Ω -размерности может быть полезен для выделения из сложного (структурированного) сигнала отдельных его хаотических составляющих. Рассмотрим, например, сигнал, состоящий из двух независимых компонент $U_1(t)$ и $U_2(t)$ с различными размерностями D_1 и D_2 . Очевидно, размерность суммарного сигнала D_3 удовлетворяет условию $\max\{D_1, D_2\} \leq D_3 \leq D_1 + D_2$ и не дает информации о размерностях его составляющих. Однако в случае, когда U_1 и U_2 имеют различные временные масштабы (т.е. разнесены по спектру), вычисление функции $D(\Omega)$ может позволить определить размерности компонент и области сосредоточения их основных спектральных составляющих.

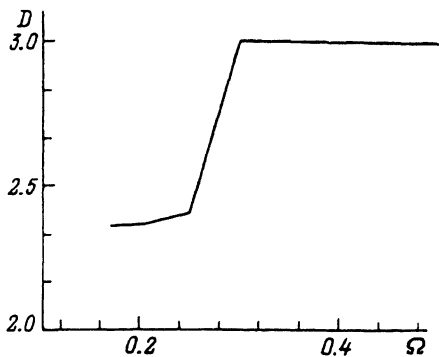


Рис. 11. Ω -размерность для суперпозиции сигналов систем Лоренца и Матье.

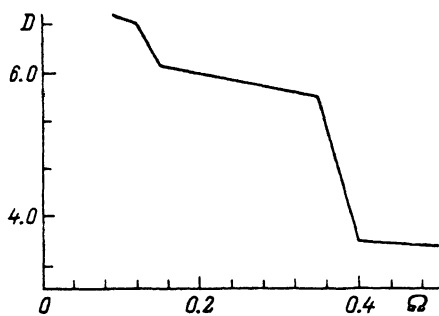


Рис. 12. Ω -размерность для суперпозиции сигналов систем Лоренца ($\tau = 0.05$) и дискретной модели Гинзбурга-Ландау ($\beta = c = 1.71$, $e = 0.22$, $\tau = 0.5$).

Для иллюстрации сказанного рассмотрим реализацию, представляющую собой сумму с различными весами двух хаотических сигналов различной природы: классической системы Лоренца [7] и нелинейных уравнений Матье [12]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ky - (1 + q \cos \omega t)x - x^3. \quad (12)$$

При выбранных параметрах размерности компонент $U_1(t)$ и $U_2(t)$ соответственно равны $D_1 = 2.06$, $D_2 = 2.61$. Поскольку D_1 и D_2 достаточно близки (и, следовательно, размерности пространства вложения для них практически одинаковы), то для вычисления размерности будем использовать метод корреляционного интеграла [11] (так как ковариационная матрица позволяет оценивать лишь целые части D_1 , D_2).

Вычисленные зависимости корреляционных интегралов $C^m(\varepsilon)$ и корреляционных размерностей $D^m(\varepsilon)$ для различных пространств вложения были приведены в работе [6]. В данном случае использование низкочастотной фильтрации подавляет, главным образом, основные гармоники реализации уравнения Матье. По мере уменьшения полосы пропускания в функции $C^m(\varepsilon)$ возникает и увеличивается "скейлинг" с размерностью $D^* \leq 2.4$ (т.е. $D < D_2$). Отметим, что корреляционный интеграл сохраняет память и об исходном структурированном сигнале, так как в области меньших ε по-прежнему остается участок с $D^m(\varepsilon)$, близкой к исходной (т.е. возникает явление "мультифрактальности", чего не было до фильтрации). Полученное значение $D^* > D_1$, поскольку даже в низкочастотной области, где расположены основные гармоники реализации системы Лоренца, содержатся (хотя и не главные) частоты реализации Матье, несущие в себе информацию о ее размерности. Это и является причиной мультифрактальности, а кроме того, приводит к некоторому увеличению D^* относительно D_{Lor} .

На рис. 11 построена Ω -размерность $D(\Omega)$ для фиксированного масштаба ε (в области появления второго скейлинга). Она позволяет оценить размерность более низкочастотного сигнала (в данном случае D_{Lor}) и спектральную область сосредоточения основных гармоник более высокочастотного сигнала (в данном случае Матье).

Приведенный выше пример соответствует случаю, когда диагностируемые компоненты сложного сигнала разномасштабны по времени, но имеют близкие и сравнительно небольшие значения размерности. Рассмотрим также ситуацию, когда размерность одной из составляющих существенно превосходит другую. В качестве примера исследуем структурированный сигнал, представляющий собой сумму реализации системы Лоренца, и цепочки дискретных уравнений типа Гинзбурга-Ландау

$$\frac{dV_j}{dt} = V_j - (1 + i\beta)|V_j|^2 V_j + e(1 - ic)(V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

При выбранных параметрах и $n = 5$ размерность аттрактора системы (13) $D \approx 5-6$ [13]. График $D(\Omega)$ представлен на рис. 12. По мере фильтрации скейлинг, соответствующий D_{Lor} , постепенно исчезает, и в конечном счете выделяется составляющая, соответствующая уравнению (13). Действительно, из сравнения спектров компонент данного сигнала следует, что хотя основные гармоники системы Лоренца меньше, чем для системы (13), в высокочастотной части спектра (где практически нет гармоник (13)) у системы Лоренца существует протяженный "хвост". Поэтому при низкочастотной фильтрации низкоразмерная составляющая (порожденная системой Лоренца) исчезает.

Заключение

Таким образом, мы убедились, что понятие Ω -размерности позволяет эффективно проводить диагностику сложных сигналов, являющихся композицией отдельных хаотических составляющих, либо хаотических сигналов, в том числе и пространственно-временных, прошедших предварительную обработку (канал связи, шумовые воздействия и т. д.). Следует отметить, однако, что корректное вычисление $D(\Omega)$ требует соблюдения ряда условий. Так, уменьшение полосы пропускания фильтра приводит к соответствующему росту времени корреляции τ (см. формулу (1)). При этом количество точек в исследуемой временной серии для каждого значения Ω полосы пропускания должно быть больше некоторой минимальной величины, позволяющей правильно вычислять корреляционные интегралы (либо ковариационные матрицы).

В то же время весьма обнадеживает то обстоятельство, что метод Ω -размерности позволяет восстанавливать не только реальное значение размерности, но и качественный вид функций $C^m(\varepsilon)$, $D^m(\varepsilon)$, $\rho^m(\varepsilon)$ (см. раздел 3). Следовательно, даже в случае, когда масштабы выбраны не вполне удачно или реализация недостаточно представительна, диагностика хаотического сигнала может быть проведена вполне достоверно. Сказанное относится даже к тому случаю, когда размерность хаотической пространственно-временной реализации не может быть оценена конечной величиной.

Наконец, отметим, что в приведенных исследованиях нами использовались бездиссипативные фильтры. Чтобы понять, к каким эффектам может привести добавление диссипации, рассмотрим следующий модельный пример. Возьмем N -мерную динамическую систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (14)$$

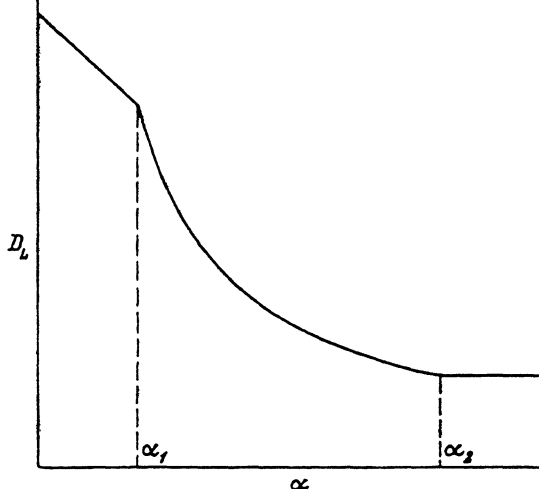


Рис. 13. Ляпуновская размерность в зависимости от параметра диссипации для системы (14), (15) при фиксированном n .

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^s \lambda_k, \quad \alpha_2 = |\lambda_{s+1}|.$$

Одна из компонент x_i вектора x поступает на вход линии, состоящей из диссипативных фильтров низких частот,

$$\dot{z}_j = -\alpha z_j + z_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad z_0 = x_i. \quad (15)$$

Каждая ячейка данной линии добавляет в систему новую ляпуновскую экспоненту $-\alpha$, не влияя на другие [14]. Используя соотношение Каплана-Йорке [15], можно показать, что в зависимости от параметра диссипации α и при фиксированном числе ячеек n ляпуновская размерность D_L системы (14), (15) имеет вид

$$D_L = S + \sum_{k=1}^s \lambda_k / |\lambda_{s+1}|, \quad \text{при } \alpha > |\lambda_{s+1}|;$$

$$D_L = S + \sum_{k=1}^s \lambda_k / \alpha \quad \text{при } \sum_{k=1}^s \lambda_k / n < \alpha < |\lambda_{s+1}|;$$

$$D_L = S + n + \left(\sum_{k=1}^s \lambda_k - n\alpha \right) / |\lambda_{s+1}| \quad \text{при } 0 < \alpha < \sum_{k=1}^s \lambda_k / n,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — ляпуновские экспоненты системы (14); S — наибольшее целое число, при котором $\sum_{k=1}^S \lambda_k \geq 0$.

В сущности величина α является характерной полосой пропускания канала (15), поэтому указанную функцию $D_L(\alpha)$ можно рассматривать как аналог Ω -размерности $D(\Omega)$ для таких фильтров. Вид зависимости $D_L(\alpha)$ показаны на рис. 13. Видно, что использование диссипативных фильтров для метода Ω -размерности неэффективно, так как D_L растет при уменьшении полосы пропускания (т. е. возникает эффект, похожий на описанный в разделе 2 при несогласованной фильтрации).

В заключение нам хотелось бы поблагодарить А.В. Гапонова-Грехова за постоянный интерес к данной работе и многочисленные полезные обсуждения. Мы также признательны Л.Н. Корзинову за любезно предоставленные данные, относящиеся к рассматриваемым в работе уравнениям Гинзбурга-Ландау.

Данная работа выполнена благодаря финансовой поддержке грантов № NR2000 и NR2300 Международного научного фонда и Российского правительства, а также гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94-02-03263).

Список литературы

- [1] Dimensions and Entropies in Chaotic Systems ed. A. Mayer-Kress. Berlin: Springer 1986. 357 p.
- [2] Interpretation of Time Series from Nonlinear Systems ed. P. Drazin, G. King. Physica D. 1992. Vol. 58. 148 p.
- [3] Grassberger P., Schreiber T., Schaffrath C. // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 1991. Vol. 1. N 3. P. 521-532.
- [4] Kostelich E., Yorke J. // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 183-190.
- [5] Афраймович В.С., Рейман А.М. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука, 1989. 167 с.
- [6] Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I., Starobinets I.M. et al. // Chaos. 1994. Vol. 4. N 1. P. 55-62.
- [7] Lorentz F. // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130-139.
- [8] Broomhead D., King G. // Physica D. 1986. Vol. 20. P. 212-225.
- [9] Tsimring L.Sh. // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. N 5. P. 3446-3460.
- [10] Корзинов Л.Н., Рабинович М.И. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. № 1. С. 56-63.
- [11] Grassberger P., Procaccia I. // Physica D. 1984. Vol. 13. P. 34-43.
- [12] Izrailev F., Rabinovich M., Ugodnikov A. Phys. Lett. 1981. Vol. 86A. N 6. P. 321-324.
- [13] Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 3. С. 596-604.
- [14] Badi R., Politi A. // Dimension and Entropy in Chaotic Systems. Berlin: Springer, 1986. P. 67-91.
- [15] Kaplan J., Yorke J. // Lecture Note in Math. 1979. Vol. 730. P. 228-238.