

01;03;08

ЛОВУШЕЧНЫЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ В ВОЛНОВОДЕ БЕЗГРАНИЧНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ В ВИДЕ МАССИВНОГО ШТАМПА

© Д.А.Индеев, Е.В.Осипова

Институт проблем машиноведения РАН,
199178 Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 19 июня 1995 г.)

Показано, что в волноводе безграничной протяженности, представленном сначала в виде плоского, а затем и объемного канала, заполненного идеальной сжимаемой жидкостью со свободной поверхностью, наряду с бегущими могут существовать стоячие волны, локализованные в области динамического включения — массивного штампа. Возникновение таких волн обусловлено наличием смешанного спектра собственных частот колебаний. Наряду с непрерывным спектром имеет место точечный (дискретный) спектр, расположенный на его оси. Найдена связь между геометрическими параметрами канала и массой штампа, при которой такой спектр существует.

Введение

Резонансные свойства упругих систем конечных размеров хорошо известны. Это прежде всего дискретность и положительность спектра частот собственных колебаний, условия наличия или отсутствия резонансов, степенная зависимость от времени амплитуды колебаний при резонансе. В случае тел, имеющих хотя бы одну границу бесконечной протяженности, картина распределения собственных значений резко меняется. Здесь появляются области сплошного спектра, границы которых получили в акустике название частот отсечек, или граничных частот. В задачах механики деформируемого твердого тела впервые существование смешанного спектра собственных частот было обнаружено И.И. Воровичем и В.А. Бабешко. В работах [1,2] были рассмотрены резонансные колебания массивного штампа на упругой полосе. Сложность уравнений не позволила авторам этих работ получить явную связь между значениями дискретного спектра, массой штампа, его размерами и геометрическими параметрами волновода (упругой полосы). В работах [3-6] такая связь получена в аналитическом виде для элементов конструкций с массово-упругими включениями, а также для штампа, колеблющегося в канале, заполненном идеальной сжимаемой

жидкостью. В этих исследованиях отмечается глубокая связь локализации упругих волн, обнаруживаемой в районах включений, с описанным в работах [7,8] образованием ловушечных мод колебаний стоячих волн на поверхности несжимаемой жидкости в канале с неподвижными выступами на дне.

В настоящей работе аналитически устанавливается существование нераспространяющихся колебаний (наличие дискретного спектра на оси непрерывного) в жидком волноводе со свободной поверхностью, имеющем в качестве включения на дне подвижный массивный штамп. В системе возможно существование как акустических колебаний, определяемых сжимаемостью жидкости, так и гравитационных волн, вызванных существованием у жидкости свободной поверхности. Результаты исследования плоской задачи сравниваются с результатами решения аналогичной трехмерной, приводимого в разделе 1 настоящей работы.

1. Акустические колебания жидкости в плоском канале с включением

Пусть штамп массой M и шириной $2a$ совершает малые вертикальные колебания с частотой ω , находясь в безотрывном контакте с сжимаемой потенциальной жидкостью плотности ρ , заполняющей плоский канал безграничной длины и высоты H (см. рисунок). Штамп возбуждает акустические колебания жидкости, которые характеризуются малым отклонением p' давления в жидкости p от равновесного давления p_0 : $p = p_0 + p'$; $p' = -\rho \partial \varphi_0 / \partial t$ [9], где φ_0 — потенциал скоростей жидкости. Исследование установившихся акустических колебаний обычно проводится путем выделения сомножителя $e^{-i\omega t}$, т. е.

$$p' = \operatorname{Re}\{p(x, y)e^{-i\omega t}\}, \quad \varphi_0 = \operatorname{Re}\{\varphi(x, y)e^{-i\omega t}\}, \quad \xi = \operatorname{Re}\{\xi_0 e^{-i\omega t}\}, \quad (1)$$

где ξ — координата штампа, ξ_0 — амплитуда его колебаний.

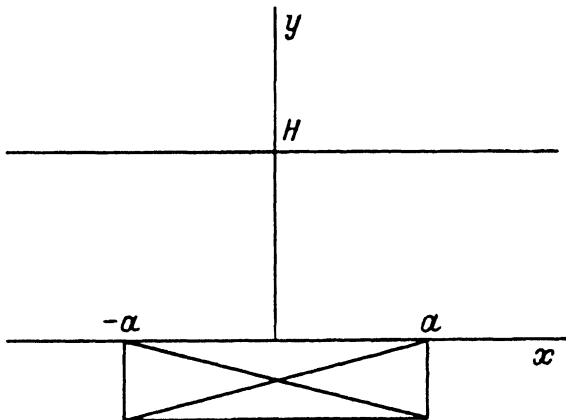


Схема штампа шириной $2a$, совершающего малые вертикальные колебания на дне заполненного жидкостью бесконечного канала глубины H .

В этом случае волновое уравнение $\partial^2 \varphi_0 / \partial t^2 = c^2 \Delta \varphi_0$, где c — скорость звука в жидкости, записывается в виде

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0. \quad (2)$$

Здесь уже учтено, что $p = i\omega \rho \varphi$. Граничными условиями к уравнению (2) по y являются условие равенства скоростей жидкости и скорости штампа на границе раздела штамп-жидкость и стандартное условие на свободной поверхности жидкости в линейном приближении [9]

$$p_y \Big|_{y=0} = \begin{cases} \rho \omega^2 \xi_0, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (3)$$

$$\left(p_y - \frac{\omega^2}{g} p \right)_{y=H} = 0, \quad (4)$$

где $p_y \equiv \partial p / \partial y$, g — ускорение свободного падения.

Для формулировки граничного условия при $x \rightarrow \pm\infty$ удобно использовать принцип предельного поглощения [10]. Кроме того, должно удовлетворяться уравнение движения штампа

$$M d^2 \xi / dt^2 = \int_{-a}^a p'(x, 0, t) dx,$$

которое после подстановки (1) принимает вид

$$\frac{m}{M_0} = -\frac{a}{2H} \frac{\omega^2}{\rho \xi_0 a^2} \int_{-a}^a p(x, 0) dx, \quad (5)$$

где $M_0 = 2\rho H a$ — масса жидкости, находящейся непосредственно над штампом.

Ниже будет показано, что решение системы (2)–(5) существует только при определенных M и ω , зависящих от a , H и c , т. е. от геометрии канала и штампа и скорости звука в жидкости. Иными словами, только при некоторых M и ω акустические колебания, возбуждаемые штампом в жидкости, могут быть установившимися. В противном случае бегущие волны будут уносить энергию штампа на бесконечность. Введем функцию Грина $G(x, y)$ как функцию, удовлетворяющую уравнению

$$G_{xx} + G_{yy} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\varepsilon}{H^2} \right) G = 0, \quad G_y(x, 0) = -\delta(x - x_0),$$

$$\left(G_y - \frac{\omega^2}{g} G \right)_{y=H} = 0. \quad (6)$$

Здесь ε — малый безразмерный параметр, отвечающий принятому предельного поглощения [10]. Тогда из (2)–(6) вытекает, что

$$p = -\rho\omega^2\xi_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-a}^a G(x, x_0, y) dy, \quad (7)$$

$$M = JM_0, \quad J = \frac{1}{2Ha} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-a}^a \int_{-a}^a G(x, x_0, 0) dx dx_0. \quad (8), (9)$$

Решая уравнение (6) с помощью преобразования Фурье, получим

$$G(x, x_0, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ch}\mu(y-H) + (\omega^2/\mu g)\text{sh}\mu(y-H)}{\mu\text{sh}\mu H - (\omega^2/g)\text{sh}\mu H} e^{ik(x-x_0)} dk, \quad (10)$$

где $\mu = k^2 - (\omega/c)^2 - i\varepsilon/H^2$.

Введем следующие безразмерные константы $\gamma = a/H$, $\alpha = \omega^2 H/g$, $q = \omega H/c$, тогда, подставляя (10) в (9), после преобразований находим

$$J = \frac{1}{\pi\gamma} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \text{th}z(x)/z(x) - 1}{\alpha - z(x) \text{tg}z(x)} \frac{\sin^2 \gamma x}{x^2} dx, \quad (11)$$

$$z(x) = \sqrt{(\sqrt{(x^2 - q^2)^2 + \varepsilon^2} + x^2 - q^2)/2} - i\sqrt{(\sqrt{(x^2 - q^2)^2 + \varepsilon^2} - x^2 + q^2)/2}. \quad (12)$$

Используя формулы Сохоцкого, нетрудно разделить мнимую и вещественную части выражения (11). Очевидно, что уравнение (8) с вещественным M удовлетворяется только при $\text{Im} J = 0$. Это условие равносильно системе уравнений

$$q^2 = (\pi k/\gamma)^2 - x_0, \quad q^2 = (\pi l_n/\gamma)^2 + x_n \quad (n = 1, \dots, N). \quad (13)$$

Здесь x_0 — положительный корень уравнения

$$x \text{tg} x = \alpha, \quad (14)$$

N — число положительных корней уравнения

$$x_n \text{tg} x_n + \alpha = 0, \quad (15)$$

меньших q ($k, l_n = 1, 2, 3, \dots$). Уравнения (13)–(15) определяют значения частот колебаний штампа ω , при которых возможно образование установившихся акустических колебаний в жидкости. Эти частоты будем называть ловушечными. Собственными же будут только те ловушечные моды, которые отвечают условию $M > 0$ или $\text{Re} J > 0$. Рассмотрим систему (13) подробнее. Пусть вначале $N = 0$, т.е. $q \leq x_1$. При малых gH/c^2 это условие можно также представить в виде

$$\omega \leq \omega_0 \approx (\pi c/2H)(1 + 4gH/\pi^2 c^2). \quad (16)$$

Тогда система (13)–(15) переходит в

$$\sqrt{(\pi k/\gamma)^2 - q^2} \operatorname{th} \sqrt{(\pi k/\gamma)^2 - q^2} = \alpha. \quad (17)$$

Если $\pi k/\gamma \gg q$, что выполняется при малых gH/c^2 , то уравнение (16) для ловушечных частот имеет следующее решение:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\pi k g}{a} \operatorname{th} \frac{\pi k H}{a}}. \quad (18)$$

Условие $\omega_k \leq \omega_0$ равносильно неравенству $k \leq k_0$, где $\omega_{k_0} = \omega_0$. Так как $k \geq 1$, то k_0 так же должно быть больше или равно 1. Отсюда вытекает требование

$$\frac{H}{a} \operatorname{th} \frac{\pi H}{a} < \frac{c^2}{2gH} \quad (19)$$

или для больших $\pi H/a$ $a > gH^2/c^2$. В противном случае уравнение (17) не имеет решений, удовлетворяющих неравенству (16).

Перейдем теперь к анализу условия $J > 0$. Из (11), (12), (17) вытекает, что подынтегральное выражение при $\omega = \omega_k$ не имеет особенностей на вещественной оси, поэтому здесь можно положить $\varepsilon = 0$. Разбивая область интегрирования на две $|x| < q$ и $|x| > q$, после преобразований получим $J = 2(J_1 + J_2)/\pi\gamma$, где

$$J_1 = \int_0^q \frac{\alpha \operatorname{tg} x - x \sin^2 \gamma \sqrt{q^2 - x^2}}{\alpha + x \operatorname{tg} x} \frac{dx}{(q^2 - x^2)^{3/2}}, \quad (20)$$

$$J_2 = \int_0^\infty \frac{\alpha \operatorname{th} x - x \sin^2 \gamma \sqrt{q^2 + x^2}}{\alpha - x \operatorname{th} x} \frac{dx}{(q^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (21)$$

Значения этих интегралов легко находятся численно при любых ω_k , a и H (тем самым из (8) определяется M). Кроме того, их можно оценить аналитически, используя теорию вычетов,

$$J = \frac{\alpha \operatorname{tg} q/q - 1}{\alpha + q \operatorname{tg} q} - \frac{1}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n^2/\alpha + \alpha - 1}\right) \frac{1 - \exp(-2\gamma \sqrt{x_n^2 - q^2})}{(x_n^2 - q^2)^{3/2}}. \quad (22)$$

Как следует из (15), при больших α корни x_n приближенно описываются выражением

$$x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)(1+1/\alpha). \quad (23)$$

Следовательно, члены ряда в выражении (22) убывают как n^{-3} . Очевидно, условие $J > 0$ выполняется отнюдь не при всех k . В частности, при малых q и $\alpha < 1$, т.е. при $\omega_k < \sqrt{g/H}$, величина J всегда

меньше нуля. Поэтому область собственных частот несколько уже, чем $1 \leq k \leq k_0$. Давление p в акустической волне находится из (7), (10)

$$p(x, y) = \frac{2}{\pi} \rho \omega_k^2 \xi_0 H \int_0^{\infty} u(x, \beta) \frac{\text{ch}[s(y)z(\beta)] + \alpha z^{-1}(\beta) \text{sh}[s(y)z(\beta)]}{\alpha \text{sh} z(\beta) - z(\beta) \text{sh} z(\beta)} d\beta, \quad (24)$$

где $u(x, \beta) = \beta^{-1} \cos(\beta x/H) \sin \gamma \beta$, $s(y) = y/H - 1$, $z^2(\beta) = \beta^2 - q^2$.

Вычисляя этот интеграл по вычетам, получим

$$p(x, y) = \sqrt{2} \rho \omega_k^2 \xi_0 H \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-|x| \sqrt{x_n^2 - q^2}/H) \sqrt{1 - \exp(-2\gamma \sqrt{x_n^2 - q^2})} \times \\ \times \frac{(\alpha/x_n) \sin[x_n(1 - y/H)] - \cos[x_n(1 - y/H)]}{\alpha(\alpha - 1) + x_n^2} \sqrt{\frac{1 + (\alpha/x_n)^2}{1 - (q/x_n)^2}}. \quad (25)$$

Пусть теперь $N = 1$, т.е. $x_1 < q \leq x_2$. Этот интервал соответствует области частот

$$\omega_{k_0} \leq \omega_k < \omega_{k_1} \approx \frac{3\pi c}{2H} \left(1 + \frac{4gH}{2\pi^2 c^2}\right).$$

В этом случае система (13) состоит уже из двух уравнений, а именно к уравнению для частот ловушечных мод (17) добавляется уравнение

$$\frac{H}{a} = \frac{1}{l_1} \sqrt{\left(\frac{\omega_k H}{\pi c}\right)^2 - \frac{1}{4}}, \quad l_1 = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

представляющее собой дополнительное условие, налагаемое на величину H/a . Только при его выполнении $\text{Im} J$ будет равно нулю при $\omega = \omega_k$ в данной области частот. Условие $\text{Re} J > 0$ определяет те значения k , которые соответствуют собственным частотам. Если $N = 2$, то

$$\omega_{k_1} \leq \omega_k \leq \omega_{k_2} \approx \frac{5\pi c}{2H} \left(1 + \frac{4gH}{25\pi^2 c^2}\right).$$

К уравнениям (17) и (26) добавляется теперь третье уравнение, которое удобно представить в виде

$$H = \pi \frac{c}{\omega_k} \frac{9/4 - (l_2/l_1)^2}{1 - (l_2/l_1)^2}, \quad l_2 = 1, 2, \dots, l_1 - 1. \quad (27)$$

Только при выполнении этого условия $\text{Im} J$ будет равно нулю при $\omega = \omega_k$ и условию (26). В частности, при $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ получим $\omega_k = (\sqrt{58\pi}/16)kg/c$, $a = (128/29k)c^2/g$, $H = (32\pi/\sqrt{87k})c^2/g$. При $N = 3$ число уравнений системы (13) превышает число внешних параметров ω , a , H , поэтому она могла бы иметь решение только в том случае, если целочисленные параметры l_1 , l_2 и l_3 удовлетворяли бы соотношению

$$\frac{8}{3} \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{l_3^2 + 7l_1^2}{l_3^2 + 2l_1^2}. \quad (28)$$

Однако исследование показывает, что по крайней мере при $l_n < 10^3$ таких целых чисел не существует. Следовательно, максимальное значение величины $\omega H/\pi c$, при котором возможно установление акустических колебаний в жидкости, равно $5/2$. Минимальная частота таких колебаний, как это следует из соотношения (18), равна $\omega_1 = \sqrt{(\pi g/a) \operatorname{th}(\pi H/a)}$.

2. Акустические колебания жидкости в трехмерном канале с включением

Рассмотрим теперь более сложный трехмерный случай. Штамп длиной $2a$ и шириной $2b$ совершает малые вертикальные колебания с частотой ω на дне бесконечного сосуда, заполненного жидкостью до высоты H . При установившихся колебаниях давление p в акустической волне и масса штампа M , так же как и в предыдущем случае, выражаются через функцию Грина соответствующей трехмерной задачи

$$p(x, y, z) = -\rho\omega^2 \frac{\xi_0}{H} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-a}^a \int_{-b}^b G(x, x_0, y, y_0, z) dx_0 dy_0, \quad (29)$$

$$\frac{M}{M_0} = \frac{1}{abH^2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-b}^b G(x, x_0, y, y_0, 0) dy dy_0 dx dx_0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\epsilon}{H^2} \right) G &= 0, \\ G_z(x, y, 0) &= -H \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \\ \left(G_z - \frac{\omega^2}{g} G \right)_{z=H} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь ϵ — малый параметр, введенный в соответствии с принципом предельного поглощения [10]; $M_0 = 4\rho abH$ — масса жидкости, находящейся над штампом; c — скорость звука в жидкости; ρ — ее плотность; g — ускорение свободного падения. Подставляя решение уравнения (31)

$$G = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu H - (\omega^2/\mu g) \operatorname{sh} \mu H}{(\omega^2 H/g) \operatorname{ch} \mu H - \mu H \operatorname{sh} \mu H} e^{i(k_x x - k_x x_0 + k_y y - k_y y_0)} dk_x dk_y, \quad (32)$$

где $A = (H/2\pi)^2$, $\mu^2 = k_x^2 + k_y^2 - (\omega/c)^2 - i\epsilon/H^2$, в соотношение (30), получим

$$\frac{M}{M_0} = \frac{4}{\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} \right)^2 \frac{1 - (\omega^2 H/\lambda g) \operatorname{th} \lambda}{\lambda \operatorname{th} \lambda - \omega^2 H/g} dx dy, \quad (33)$$

где $\lambda^2(x, y) = (xH/a)^2 + (yH/b)^2 - (\omega H/c)^2 - i\epsilon$.

Мнимая часть выражения (33) будет равна нулю в том случае, если $\sin x = 0$ и $\sin y = 0$ при тех x и y , которые являются решением уравнения $\lambda \operatorname{th} \lambda = \omega^2 H/g$ при $\varepsilon = 0$, имеющего один вещественный положительный корень λ_0 и бесконечный ряд мнимых корней $i\tau_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$), причем $\tau_\nu \operatorname{tg} \tau_\nu + \omega^2 H/g = 0$ ($\tau_\nu > 0$). Из системы

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin y = 0, \\ (xH/a)^2 + (yH/b)^2 - (\omega H/c)^2 &= \lambda_0^2, \\ \lambda_0 \operatorname{th} \lambda_0 &= \omega^2 H/g, \end{aligned} \quad (34)$$

отвечающей корню λ_0 , вытекает условие, налагаемое на частоты ω_{kn} ловушечных мод,

$$\omega_{kn}^2 = g \sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \frac{\omega_{kn}^2}{c^2}} \operatorname{th} \left[\sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 - \frac{\omega_{kn}^2}{c^2}} \right] \quad (35)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $n + k \neq 0$).

Это уравнение необходимо дополнить аналогичной (34) системой, отвечающей корням $i\tau_\nu$,

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin y = 0, \\ (\omega H/c)^2 - (xH/a)^2 - (yH/b)^2 &= \tau_\nu^2, \quad \nu = 1, \dots, N, \\ \tau_\nu \operatorname{th} \tau_\nu + \omega^2 H/g &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

где N — число положительных корней τ_ν , меньших $\omega H/c$.

При $N = 0$, т.е. в области $0 < \omega H/c \leq \tau_1(\omega) \approx \pi/2$ уравнение (35) является единственным условием, определяющим частоты ловушечных мод. При $\omega_{kn}^2/c^2 \ll (\pi k/a)^2 + (\pi n/b)^2$ оно имеет следующее решение:

$$\omega_{kn} = \left[g \sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2} \operatorname{th} \left(H \sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (37)$$

Однако собственными частотами системы будут только те частоты, которые удовлетворяют условию $M > 0$, где

$$M = \frac{1}{\pi^2} M_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} \right)^2 \frac{1 - (\omega_{kn}^2 H/\lambda g) \operatorname{th} \lambda}{\lambda \operatorname{th} \lambda - \omega_{kn}^2 H/g} dx dy,$$

$$\lambda(x, y) = H \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{\omega_{kn}^2}{c^2}}. \quad (38)$$

В области частот $\tau_1(\omega) < \omega H/c \leq \tau_2(\omega) \approx 3\pi/2$ к уравнению (37) добавляется еще одно условие, вытекающее из (36). При $gH/c^2 \ll 1$ оно имеет вид

$$\frac{1}{4H^2} = \left(\frac{\omega_{kn}}{\pi c}\right)^2 - \left(\frac{l_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{m_1}{b}\right)^2 \quad (39)$$

($l_1 = 0, 1, 2, \dots$; $m_1 = 0, 1, 2, \dots$; $l_1 + m_1 \neq 0$).

Система (37), (39) определяется теперь пятью параметрами, при которых существуют установившиеся колебания. При $N = 2$ или $N = 3$ добавляются еще одно или два условия соответственно. В случае $N \geq 4$ системы (34), (36) не имеют решения ни при каких значениях ω , a , b , H , так как число уравнений превышает число внешних параметров. Поэтому $7\pi/2$ является максимально возможным значением величины $\omega_k H/c$ в трехмерном случае.

В заключение отметим, что при $n = 0$ уравнение (37) переходит в (18), кроме того, при $n = 0$, $m_1 = 0$ и т. д. системы (34), (36) переходят в (13). Следовательно, трехмерный случай полностью включает в себя двумерный. Приведенные решения задач позволяют установить явную связь между параметрами рассматриваемой механической системы и значениями собственных частот колебаний, которые образуют дискретный спектр, располагающийся на оси непрерывного. Формы собственных колебаний жидкости носят характер нераспространяющихся волн ловушечных мод колебаний, локализованных вблизи колеблющегося штампа. Очевидно, что в случае приложения к штампу гармонически изменяющейся во времени нагрузки на найденных собственных частотах возникнут резонансные колебания неограниченной амплитуды, что обусловлено, с одной стороны, неучетом вязкой диссипации в жидкости, а с другой — гашением волнового процесса вне области, содержащей включение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 96-01-01153а).

Список литературы

- [1] Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф. // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. 1990. № 3. С. 74.
- [2] Бабешко В.А., Глушков Б.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 332 с.
- [3] Абрамян А.К., Андреев В.Л., Индейцев Д.А. // Моделирование в механике. 1992. Т. 6. С. 34.
- [4] *Indejtchev D.* // Proc. of the 3^d Intern. Congress on Air and Structure-Borne Sound and Vibration. Vol. 3. Montreal, 1994. P. 1817.
- [5] *Indejtchev D., Abramjan A.* // Proc. of the EUROMECH-316. Vol. 3. Manchester, 1994. P. 223.
- [6] *Indejtchev D.* // Proc. of the EUROMECH-316. Vol. 3. Manchester, 1994. P. 304.
- [7] *Ursell F.* // J. Fluid Mech. 1987, Vol. 183. P. 424.
- [8] *McIver P., Evans D.V.* // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 161. P. 243.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 690 с.
- [10] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 736 с.