

01;03;05

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ПРОГРЕВЕ ДВУХМЕРНОГО ПОРИСТОГО ТЕЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

© А.В.Кузнецов

Технический университет, Вена, Австрия
(Поступило в Редакцию 5 сентября 1995 г.)

Получено аналитическое решение для прогрева двухмерного прямоугольного пористого тела потоком несжимаемой жидкости или газа. Для моделирования температурного поля в теле использована модель, включающая два уравнения энергии. Показано, что разница между температурами твердой и жидкой фаз может быть представлена как сумма стационарной и нестационарной компонент. Стационарная компонента сконцентрирована у границы, через которую поступает горячая жидкость (газ). Нестационарная компонента представляет собой волну, локальный максимум которой перемещается в направлении распространения потока. Амплитуда волны быстро затухает по мере ее распространения.

Введение

Исследование прогрева (охлаждения) пористых тел потоком жидкости (газа) является предметом непреходящего интереса для современных исследований. Причина этого интереса — важные приложения этого процесса, например аккумулялирование тепловой энергии. В недавно опубликованных работах [1-4] предлагается математическая модель, описывающая прогрев пористого тела при вынужденной конвекции через него жидкости или газа. При формулировке этой модели не используется гипотеза о локальном термодинамическом равновесии между матрицей пористого тела и жидкостью (газом). Такую модель принято называть двухфазной моделью пористого тела. Для описания локального неравновесия модель включает два уравнения энергии.

Большинство аналитических исследований, использующих двухфазную модель теплопереноса в пористом теле, основывались на подходе, предложенном Т. Шуманном в [5]. В модели Шуманна пренебрегают членами, описывающими теплопроводность как твердой, так и жидкой фаз. Аналитические решения для этой модели при различных граничных условиях получены в [6-10]. Сравнение между аналитическими решениями для двухфазной и однофазной моделей представлено в [11].

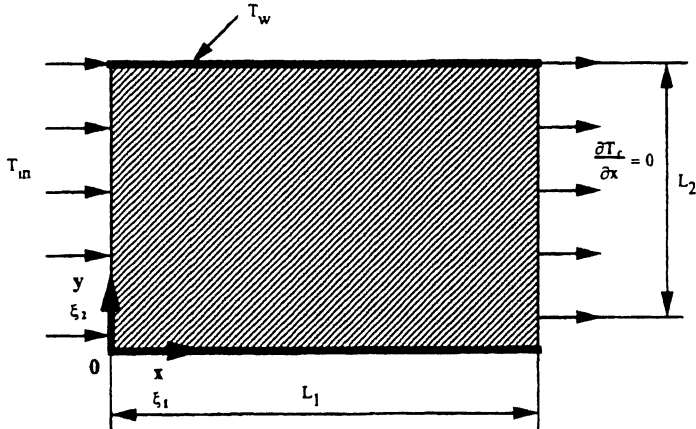


Рис. 1. Расчетная схема.

Исследование прогрева одномерного пористого слоя, основанное на применении метода возмущений, проведено в [12]. В этой работе показано, что разница между температурами твердой и жидкой фаз образует локализованную в пространстве волну. В настоящем исследовании рассмотрен значительно более сложный двухмерный случай. При использовании метода возмущений получено аналитическое решение, описывающее температурную разницу между твердой и жидкой фазами.

Математическая модель

На рис. 1 показана схема рассматриваемой задачи. Двухмерное пористое тело прямоугольной формы заполнено несжимаемой жидкостью и в начальный момент времени находится при постоянной температуре. В момент $t = 0$ несжимаемая жидкость (газ), находящаяся при более высокой температуре, начинает поступать через границу $x = 0$. Стенки пористого тела поддерживаются при заданной постоянной температуре. Моделирование прогрева пористого тела основывается на следующих допущениях: жидкая фаза несжимаема и расход жидкости (газа) через каждое поперечное сечение пористого тела постоянен; теплофизические свойства твердой и жидкой фаз постоянны; теплоперенос в пористом теле двухмерен, а поток жидкости одномерен. При этих допущениях система осредненных уравнений, представленная в [3], упрощается до двух уравнений энергии для твердой и жидкой фаз соответственно

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \frac{\partial \langle T_f \rangle^f}{\partial t} + \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \langle v_f \rangle \frac{\partial \langle T_f \rangle^f}{\partial x} = \\ = \lambda_{feff} \left[\frac{\partial^2 \langle T_f \rangle^f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle T_f \rangle^f}{\partial y^2} \right] + h_{sf} a_{sf} [\langle T_s \rangle^s - \langle T_f \rangle^f], \end{aligned} \quad (1)$$

$$(1 - \varepsilon) \langle \rho_s \rangle^s (c_p)_s \frac{\partial \langle T_s \rangle^s}{\partial t} = \lambda_{seff} \left[\frac{\partial^2 \langle T_s \rangle^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle T_s \rangle^s}{\partial y^2} \right] - h_{sf} a_{sf} [\langle T_s \rangle^s - \langle T_f \rangle^f], \quad (2)$$

где T — температура, c_p — теплоемкость, ρ — плотность, ε — пористость, λ — коэффициент теплопроводности, h_{sf} — коэффициент теплообмена между жидкой и твердой фазами, a_{sf} — удельная площадь пор в единице объема пористого тела, v — скорость жидкой фазы, оператор $\langle \rangle$ означает осреднение по объему, а $\langle \rangle^f$ и $\langle \rangle^s$ — фазовое среднее для жидкой и твердой фаз соответственно.

Коэффициент теплообмена между твердой матрицей и фильтрующей через нее жидкостью h_{sf} , можно вычислить с помощью соотношений, предложенных в [13]

$$\frac{1}{h_{sf}} = \frac{d}{Nu_{sf}\lambda_f} + \frac{d}{\beta\lambda_s},$$

где d — средний диаметр частичек пористого тела; $\beta = 10$ если матрица пористого тела состоит из частичек сферической формы.

Число Нуссельта, входящее в формулу для h_{sf} , можно вычислить с помощью соотношения, представленного в [14]

$$Nu_{sf} = \frac{0.255}{\varepsilon} Pr^{1/3} Re_p^{2/3}.$$

Это соотношение применимо при $Re_p > 100$. Оценки числа Нуссельта при малых числах Рейнольдса колеблются от 0.1 до 12.4, основываясь на результатах измерений, приведенных [15,16] соответственно.

Удельная поверхность контакта твердой и жидкой (газообразной) фаз в соответствии с [17] может быть вычислена следующим образом:

$$a_{sf} = \frac{6(1-\varepsilon)}{d}.$$

Во многих практически важных случаях, например, если средний диаметр частички пористой матрицы d мал, произведение $h_{sf}a_{sf}$ принимает большие значения. Это позволяет ввести малый параметр согласно формуле

$$\delta = \frac{1}{h_{sf}a_{sf}} \frac{\varepsilon \left[\langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \right]^3 \langle v_f \rangle^2}{\left[\varepsilon \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f + (1-\varepsilon) \langle \rho_s \rangle^s (c_p)_s \right] (\lambda_{feff} + \lambda_{seff})}.$$

Параметр δ может быть физически интерпретирован как безразмерная характеристика сопротивления теплопереносу из жидкой в твердую фазу. Поскольку это сопротивление, согласно нашему предположению, мало, то теплоперенос из жидкой фазы в твердую в рассматриваемом нами случае весьма интенсивен.

Чтобы применить метод возмущений к системе уравнений (1), (2), введем следующие безразмерные переменные: температуру

$$\Theta = \frac{T - T_W}{T_{in} - T_W},$$

где T_{in} — температура жидкости при входе в пористое тело; T_W — температура, поддерживаемая на стенках пористого тела, координаты

$$\xi_1 = \frac{\langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \langle v_f \rangle}{\lambda_{feff} + \lambda_{seff}} x, \quad \xi_2 = \frac{\langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \langle v_f \rangle}{\lambda_{feff} + \lambda_{seff}} y,$$

и время

$$\tau = \frac{\left[\langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \langle v_f \rangle \right]^2}{\left[\varepsilon \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f + (1 - \varepsilon) \langle \rho_s \rangle^s (c_p)_s \right] \lambda_{feff} + \lambda_{seff}} t.$$

Согласно результатам численных расчетов, представленных в [1-3], разница между температурами жидкой и твердой фаз мала по сравнению с разницей между температурой жидкости при входе в пористый слой и начальной температурой пористого тела. Это объясняется интенсивным теплообменом между жидкой и твердой фазами. Предполагая, что безразмерная температура твердой фазы может быть представлена как

$$\Theta_s = \Theta_f + \delta \Delta \Theta, \quad (3)$$

систему уравнений (1), (2) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \Theta_f}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial^2 \Theta_f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta_f}{\partial \xi_2^2} + O(\delta), \quad (4)$$

$$\Delta \Theta = \frac{\partial \Theta_f}{\partial \tau} + \Lambda_1 \frac{\partial \Theta_f}{\partial \xi_1} - \Lambda_2 \left[\frac{\partial^2 \Theta_f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta_f}{\partial \xi_2^2} \right], \quad (5)$$

где

$$\Lambda_1 = \frac{\varepsilon \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f + (1 - \varepsilon) \langle \rho_s \rangle^s (c_p)_s}{\varepsilon \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f}$$

и

$$\Lambda_2 = \frac{\lambda_{feff} \left[\varepsilon \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f + (1 - \varepsilon) \langle \rho_s \rangle^s (c_p)_s \right]}{\varepsilon \langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f [\lambda_{feff} + \lambda_{seff}]}$$

Параметр Λ_1 представляет собой отношение удельной теплоемкости гомогенизированной среды, образованной из жидкой и твердой фаз, и удельной объемной теплоемкости жидкой фазы. Параметр Λ_2 характеризует относительную теплопроводность жидкой фазы.

Уравнение (4) получено путем сложения уравнений (1) и (2), а уравнение (5) есть уравнение (1) в безразмерной форме с учетом уравнения (3).

Для безразмерной температуры жидкой фазы Θ_f начальные и граничные условия, которые обсуждались в начале предыдущего раздела, можно записать в следующем виде:

$$\Theta_f(\xi_1, \xi_2, 0) = \Theta_0, \quad (6)$$

$$\Theta_f(0, \xi_2, \tau) = 1, \quad \frac{\partial \Theta_f}{\partial \xi_1}(R_1, \xi_2, \tau) = 0, \quad (7)$$

$$\Theta_f(\xi_1, 0, \tau) = 0, \quad \Theta_f(\xi_1, R_2, \tau) = 0, \quad (8)$$

где $\Theta_0 = T_0 - T_W/T_{in} - T_W$ может принимать как положительные, так и отрицательные или нулевые значения,

$$R_1 = \frac{\langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \langle v_f \rangle}{\lambda_{feff} + \lambda_{seff}} L_1, \quad R_2 = \frac{\langle \rho_f \rangle^f (c_p)_f \langle v_f \rangle}{\lambda_{feff} + \lambda_{seff}} L_2,$$

L_1 и L_2 — длина и ширина пористого тела соответственно.

Нулевой температурный градиент на границе $\xi_1 = R_1$, через которую жидкая фаза покидает пористое тело, означает, что температура жидкости не меняется после того, как жидкость покинула пористое тело, а также что температурный скачок на этой границе отсутствует.

Решение уравнения (4) с начальным условием (6) и граничными условиями (7), (8) нельзя получить просто как произведение решений соответствующих одномерных задач. Следуя [18], решение этой задачи сведено к решению двух более простых задач: задаче нахождения стационарного распределения температуры и задаче с нулевыми граничными условиями

$$\Theta_f(\xi_1, \xi_2, \tau) = u(\xi_1, \xi_2) + w(\xi_1, \xi_2, \tau). \quad (9)$$

Функция u удовлетворяет следующему стационарному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \quad (10)$$

и граничным условиям (7) и (8).

Функция w удовлетворяет нестационарному уравнению (4) и граничным условиям (8) на стенках пористого тела, а также следующим нулевым граничным условиям:

$$w(0, \xi_2, \tau) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_1}(R_1, \xi_2, \tau) = 0 \quad (11)$$

и следующему начальному условию:

$$\Theta_f(\xi_1, \xi_2, 0) = \Theta_0 - u(\xi_1, \xi_2). \quad (12)$$

Решение для функции u получено с помощью метода разделения переменных

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{\xi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{R_2} \xi_2\right) \left[-\left(\frac{1}{2} + b_n\right) \exp\left[b_n(R_1 - \xi_1)\right] + \left(\frac{1}{2} - b_n\right) \exp\left[-b_n(R_1 - \xi_1)\right] \right], \quad (13)$$

$$b_n = \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{\pi n}{R_2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (14)$$

а коэффициенты уравнения (13) даются следующим выражением:

$$C_n = \frac{2 \left[1 - (-1)^n \right]}{\pi n \left[- \left(\frac{1}{2} + b_n \right) \exp(b_n R_1) + \left(\frac{1}{2} - b_n \right) \exp(-b_n R_1) \right]}. \quad (15)$$

Решение для функции w также получено с помощью метода разделения переменных

$$w = \sum_{n, m=1}^{\infty} D_{n, m} \exp \left\{ \frac{\xi_1}{2} - \left[\frac{1}{4} + a_m^2 + \left(\frac{\pi n}{R_2} \right)^2 \right] \tau \right\} \sin(a_m \xi_1) \sin \left(\frac{\pi n}{R_2} \xi_2 \right), \quad (16)$$

где a_m находится как различные положительные решения трансцендентного уравнения

$$\tan(a_m R_1) = -2a_m, \quad (17)$$

а коэффициенты уравнения (16) находятся с помощью следующего выражения:

$$D_{n, m} = \frac{\left[1 - (-1)^n \right] \left\{ \Theta_0 \frac{R_2}{\pi n} \frac{4a_m}{1+4a_m^2} - \frac{a_m L}{\pi n(a_m^2 + b_n^2)} \right\}}{\frac{R_2}{2} \left[\frac{R_1}{2} - \frac{\sin(2a_m R_1)}{4a_m} \right]}. \quad (18)$$

Функция Θ_f , определяющая безразмерную температуру жидкой фазы, теперь следует из уравнений (9), (13) и (16).

Безразмерную разницу между температурами жидкой и твердой фаз теперь можно найти с помощью уравнений (5), (9), (13) и (16) как

$$\begin{aligned} \Delta \Theta &= (\Lambda_1 - \Lambda_2) \times \\ &\times \left[\frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n C_n \exp \left(\frac{\xi_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi n}{R_2} \xi_2 \right) \left\{ \left(\frac{1}{2} + b_n \right) \exp \left[b_n (R_1 - \xi_1) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{2} - b_n \right) \exp \left[-b_n (R_1 - \xi_1) \right] \right\} \right] - \\ &- (1 - \Lambda_2) \sum_{n, m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4} + a_m^2 + \left(\frac{\pi n}{R_2} \right)^2 \right] D_{n, m} \exp \left\{ \frac{\xi_1}{2} - \left[\frac{1}{4} + a_m^2 + \left(\frac{\pi n}{R_2} \right)^2 \right] \tau \right\} \times \\ &\quad \times \sin(a_m \xi_1) \sin \left(\frac{\pi n}{R_2} \xi_2 \right) + (\Lambda_1 - \Lambda_2) \times \\ &\times \left[\frac{W}{2} + \sum_{n, m=1}^{\infty} a_m D_{n, m} \exp \left\{ \frac{\xi_1}{2} - \left[\frac{1}{4} + a_m^2 + \left(\frac{\pi n}{R_2} \right)^2 \right] \tau \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(a_m \xi_1) \sin \left(\frac{\pi n}{R_2} \xi_2 \right) \right], \quad (19) \end{aligned}$$

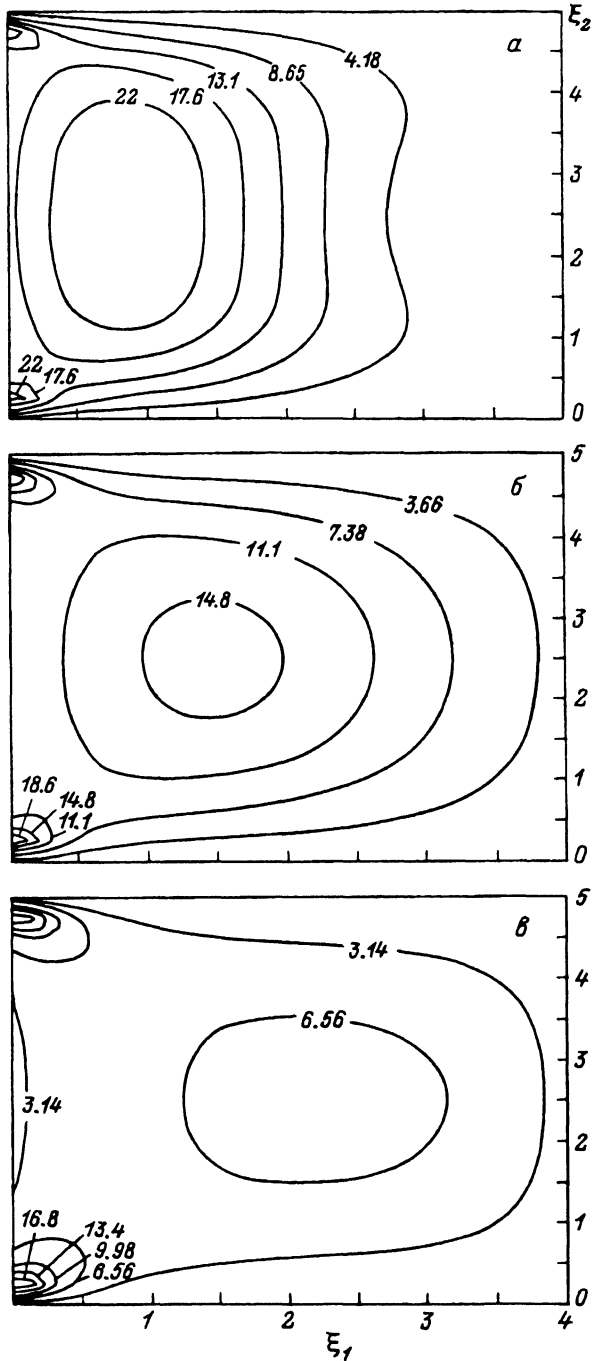


Рис. 2. Распределения безразмерной температурной разности, $-\Delta\theta$.
 $\theta_0 = -3$, $R_1 = 4$, $R_2 = 5$, $\Lambda_1 = 13$, $\Lambda_2 = 2.6$; $\tau = 0.5$ (а), 1 (б), 2 (е).

где коэффициенты b_n , C_n , a_m и $D_{n,m}$ определены уравнениями (14), (15), (17) и (18), а функции u и w определены уравнениями (13) и (16) соответственно.

На рис. 2, а-в показаны распределения безразмерной температурной разности между жидкой и твердой фазами. Можно видеть, что температурная разность состоит из стационарной и нестационарной компонент. Стационарная компонента связана со стационарным решением для функции u и описывает температурную разность при $\tau = \infty$. В отличие от результатов, представленных в [12], температурная разница не стремится к нулю при возрастании времени. Это связано с тем, что температура жидкой фазы при входе в пористое тело отличается от температуры, поддерживаемой на стенках пористого тела. Стационарная компонента локализована у границы, через которую жидкая фаза попадает в пористое тело.

Нестационарная компонента связана с нестационарным решением для функции w и описывает волну, распространяющуюся в направлении ξ_1 от границы, через которую жидкая фаза попадает в пористое тело. Амплитуда волны быстро угасает по мере ее распространения.

Выводы

При прогреве двухмерного пористого тела потоком несжимаемой жидкости (газа) разница между температурами жидкой и твердой фаз состоит из стационарной и нестационарной компонент. Стационарная компонента описывает температурную разность при $\tau = \infty$ и локализована у границы, через которую жидкая фаза попадает в пористое тело. Нестационарная компонента описывает волну, распространяющуюся в направлении ξ_1 от границы, через которую жидкая фаза попадает в пористое тело. Амплитуда волны быстро угасает по мере ее распространения.

Данная работа основана на результатах, полученных автором во время его пребывания в Германии в качестве стипендиата им. А. Гумбольдта.

Список литературы

- [1] Vafai K., Sözen M. // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 690-699.
- [2] Vafai K., Sözen M. // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 1014-1022.
- [3] Vafai K., Sözen M. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1990. Vol. 33. P. 1247-1261.
- [4] Amiri A., Vafai K. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. Vol. 37. P. 939-954.
- [5] Schumann T.E.W. // J. of the Franklin Institute. 1929. Vol. 208. P. 405-416.
- [6] Arpacı V.S., Clark J.A. // Adv. Cryogenic Eng. 1962. Vol. 7. P. 419-432.
- [7] Hung F.T., Nevins R.G. // ASME Paper N 65-HT-10. 1965.
- [8] Jang W.J., Lee C.P. // ASME Paper N 74-WA/HT-22. 1974.
- [9] Burch D.M., Allen R.W., Peavy B.A. // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1976. Vol. 98. P. 221-225.
- [10] White H.C., Korpela S.A. // Solar Energy. 1979. Vol. 23. P. 141-144.
- [11] Riaz M. // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1977. Vol. 99. P. 489-492.
- [12] Kuznetsov A.V. // Int. Com. in Heat Mass Transfer. 1995. Vol. 22. P. 499-506.
- [13] Dixon A.G., Cresswell D.L. // AIChE J. 1979. Vol. 25. P. 663-676.
- [14] Handley D., Heggs P.J. // Trans. Inst. Chem. Engrs. 1968. Vol. 46. P. T251-T264.
- [15] Miyauchi H., Kataoka H., Kikuchi T. // Chem. Eng. Sci. 1976. Vol. 31. P. 9-13.
- [16] Wakao N., Tanaka K., Nagai H. // Chem. Eng. Sci. 1976. Vol. 31. P.1109-1113.
- [17] Dullien F.A.L. Porous Media Fluid Transport and Pore Structure. Ch.3 New York: Acad. Press, 1979.
- [18] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, 1959.