

01;09

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

© К.А.Барсуков, Н.Ю.Григорьева

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет,
197376 Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 27 апреля 1995 г.)

Рассматривается излучение совокупности заряженных частиц, расположенных в непосредственной близости от границы раздела двух сред, параметры одной из которых зависят от координат и времени по закону бегущей волны. В качестве примера рассмотрено излучение зарядов с поверхностной плотностью ρ , равномерно распределенных внутри области радиуса a и внутри кольца с внешним и внутренним радиусами соответственно a_m и a_{m+1} .

Взаимодействию электромагнитного излучения с неоднородными и нестационарными средами посвящено довольно большое количество работ (см., например, [1-7]). Как было показано в [1], стационарное распределение зарядов в подобных средах является источником электромагнитных волн. Очевидно, что наличие границы раздела в таких средах должно существенно влиять на характер излучения. Так, если среда нестационарна, однородна и изотропна, излучение для неподвижных зарядов отсутствует, то при появлении границы стационарный заряд вблизи нее становится источником переходного излучения. Подобное изменение характера излучения рассмотрено ниже на примере полубесконечной неоднородной и нестационарной среды.

Пусть нестационарная и неоднородная немагнитная среда ($\mu = 1$) занимает полупространство $z < 0$ и ее свойства описываются диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(kz - \omega t), \quad (1)$$

а в области $z > 0$ расположен однородный диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_2$. Вблизи границы раздела сред, в точке $M(0, 0, d)$, находится точечный заряд q . Напряженность и индукция электрического поля в обеих средах связаны обычным соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (2)$$

Поле излучения заряда будем описывать с помощью векторного \mathbf{A} и скалярного φ потенциалов следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (3)$$

причем условие калибровки удобно выбрать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon\varphi)}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

В силу симметрии задачи естественно считать, что векторный потенциал имеет единственную отличную от нуля компоненту — $A(0, 0, A)$, тогда в цилиндрической системе координат, связанной с осью z , $E_\varphi = H_r = H_z = 0$ и отличны от нуля только E_r , E_z , H_φ . Введенные таким образом скалярные функции A и φ , определяются из решения уравнений при $z < 0$

$$\nabla A^- - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 A^-}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon_1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\cos \psi \frac{\partial A^-}{\partial t} + ck\varphi^- \sin \psi \right], \quad (5)$$

$$\nabla \varphi^- - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon_1}{c^2 \varepsilon_0} \left[\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varphi^- \cos \psi) - \operatorname{div} \left(c \frac{\partial A^-}{\partial t} + c^2 \nabla \varphi^- \right) \right] \quad (6)$$

и при $z > 0$

$$\nabla A^+ - \frac{\varepsilon_2}{c^2} \frac{\partial^2 A^+}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \varphi^+ - \frac{\varepsilon_2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial t^2} = -\frac{4\pi q}{\varepsilon_2} \delta(x)\delta(y)\delta(z-d), \quad (8)$$

где $\psi = kz - \omega t$.

Кроме того, искомые поля должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$E_r^- = E_r^+, \quad (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \psi) E_z^- = \varepsilon_2 E_z^+, \quad H_\varphi^- = H_\varphi^+. \quad (9)$$

Будем искать решение уравнений (5)–(8) методом последовательных приближений, считая малой амплитуду модуляции диэлектрической проницаемости, то есть при $|\varepsilon_1/\varepsilon_0| \ll 1$. Положим

$$A^\pm = A_0^\pm + A_1^\pm + \dots, \quad \varphi = \varphi_0^\pm + \varphi_1^\pm + \dots \quad (10)$$

При этом уравнения (5), (6) для каждого приближения записываются так, чтобы связать последующее приближение с предыдущим.

Нулевое приближение для уравнений (5)–(8) приводит к стандартной электростатической задаче, решение которой может быть записано в виде интегралов Фурье–Бесселя,

$$\varphi_0^-(r, z) = \frac{2q}{\varepsilon_2 + \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \exp(\lambda(z-d)) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (11)$$

$$\varphi_0^+(r, z) = q \int_0^{+\infty} \left[\exp(-\lambda|z-d|) + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2 + \varepsilon_0} \exp(-\lambda(z+d)) \right] J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (12)$$

В первом приближении все искомые поля могут быть выражены через нулевое приближение скалярного потенциала и первое приближение векторного потенциала, поскольку скалярные функции A и φ связаны, согласно (4), калибровочными соотношениями вида

$$\frac{\partial A_1^-}{\partial z} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \varphi_1^-}{\partial t} + \frac{\varepsilon_1 \omega}{c} \varphi_0^- \sin \psi = 0 \quad \text{при } z < 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial A_1^+}{\partial z} + \frac{\varepsilon_2}{c} \frac{\partial \varphi_1^+}{\partial t} = 0 \quad \text{при } z > 0, \quad (14)$$

уравнения для A_1^\pm записываются следующим образом:

$$\Delta A_1^- - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 A_1^-}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j^{eff} \quad \text{при } z < 0, \quad (15)$$

$$\Delta A_1^+ - \frac{\varepsilon_2}{c^2} \frac{\partial^2 A_1^+}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z > 0, \quad (16)$$

где $j^{eff} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} k \omega \varphi_0^- \cos \psi$ — некий эффективный ток, создаваемый меняющейся во времени поляризацией.

Граничные условия для потенциалов при $z = 0$ принимают вид

$$A_1^- = A_1^+, \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial A_1^-}{\partial z} + \frac{\varepsilon_1 \omega}{c} \varphi_0^- \sin(\omega t) \right) = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial A_1^+}{\partial z}. \quad (17)$$

Представим искомые функции $A_1^\pm(r, z)$ в виде интегралов Фурье–Бесселя по r

$$A_1^\pm = \int_0^{+\infty} A_{\lambda_1}^\pm J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (18)$$

где $A_{\lambda_1}^\pm$ — трансформанта Фурье–Бесселя векторного потенциала A_1^\pm , и рассмотрим уравнение (15). Поскольку это уравнение является неоднородным, то его решение следует искать в виде суммы свободного и вынужденного решений

$$A_1^- = A_q^- + A_R^-, \quad (19)$$

где A_q^- — потенциал поля, создаваемого эффективным током j^{eff} ; A_R^- — потенциал поля излучения.

Потенциал поля эффективного тока A_q^- является решением неоднородного уравнения (15) и его трансформанта Фурье–Бесселя имеет вид

$$A_{\lambda q}^- = B \exp\left((\lambda + ik)z - i\omega t\right) + \text{c.c.}, \quad (20)$$

где

$$B = -q \frac{k}{\lambda} \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_0)} \frac{\exp(-\lambda d)}{(\lambda + ik)^2 + (\varepsilon_0 \omega^2 / c^2) - \lambda^2}.$$

Потенциал поля излучения A_R^- является решением однородного уравнения (15) и его трансформанта ищется в виде

$$A_{\lambda R}^- = C^- \exp\left(-i(k^- z + \omega t)\right) + \text{c.c.}, \quad (21)$$

где $k^- = \sqrt{(\varepsilon_0 \omega^2 / c^2) - \lambda^2}$, константа C^- находится из решения граничной задачи.

В аналогичном виде ищется решение однородного уравнения (16)

$$A_{\lambda 1}^+ = C^+ \exp\left(i(k^+ z - \omega t)\right) + \text{c.c.}, \quad (22)$$

где $k^+ = \sqrt{(\varepsilon_2 \omega^2 / c^2) - \lambda^2}$.

Разрешая граничные условия (17) относительно неизвестных констант C^- и C^+ , получим следующие выражения:

$$C^- = \frac{B}{G} \left(\frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2 k} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} k^+ + i\lambda \right), \quad (23)$$

$$C^+ = \frac{B}{G} \left(\frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2 k} + k^- + i\lambda \right), \quad (24)$$

где $G = k^- + (K^+ \varepsilon_0) / \varepsilon_2$.

Формулы (18)–(24) полностью описывают излучение заряда в первом приближении по $\varepsilon_1 / \varepsilon_0$, а выражения для компонент электрического и магнитного полей нетрудно получить, используя соотношения (3). Следует отметить, что частота поля излучения в первом приближении совпадает с частотой модуляции, однако во втором и более высоких приближениях, как это следует из (5) и (6), наряду с основной частотой появляются кратные частоты (удвоенная, утроенная и т. д.). Таким образом, выражения (18)–(24) с учетом (3) дают возможность рассчитать энергию электромагнитного излучения, возникающего в полупространстве $z > 0$, в первом приближении по параметру $\varepsilon_1 / \varepsilon_0$. Согласно теореме Пойнтинга, усредненный по периоду поток энергии излучения

$$W = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_z d\sigma, \quad (25)$$

интегрируя по плоскости $z = z_0 > d$, находим среднюю энергию излучения за единицу времени.

Подставив соответствующие выражения для полей и произведя элементарное интегрирование по φ , после несложных преобразований получим

$$W = \frac{c^2}{2\varepsilon_2 \omega} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} k^+ |C^+|^2 \lambda^3 d\lambda. \quad (26)$$

Интеграл в (26) оказывается для случая $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$ и $\varepsilon_2 > \varepsilon_0$ и записывается следующим образом:

$$W = \frac{\omega}{\varepsilon_2} \left(\frac{q\varepsilon_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_2} \right)^2 \int_0^{\sqrt{\varepsilon_2}\omega/c} F_1(\lambda) \lambda d\lambda \quad \text{при } \varepsilon_2 < \varepsilon_0,$$

$$W = \frac{\omega}{\varepsilon_2} \left(\frac{q\varepsilon_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_2} \right)^2 \left[\int_0^{\sqrt{\varepsilon_0}\omega/c} F_1(\lambda) \lambda d\lambda + \int_{\sqrt{\varepsilon_0}\omega/c}^{\sqrt{\varepsilon_2}\omega/c} F_2(\lambda) \lambda d\lambda \right] \quad \text{при } \varepsilon_2 > \varepsilon_0, \quad (27)$$

где

$$F_1(\lambda) = \frac{k^+ \exp(-2\lambda d) \left[(\lambda k)^2 + \left((\varepsilon_0 \omega^2 / c^2) + k^- k \right)^2 \right]}{\left[(2\lambda k)^2 + \left((\varepsilon_0 \omega^2 / c^2) - k^2 \right)^2 \right] \left(k^- + (\varepsilon_0 k^+ / \varepsilon_2) \right)^2},$$

$$F_2 \lambda = \frac{k^+ \exp(-2\lambda d) \left[k^2 (\xi^- + \lambda)^2 + (\varepsilon_0 \omega^2 / c^2)^2 \right]}{\left[(2\lambda k)^2 + \left((\varepsilon_0 \omega^2 / c^2) - k^2 \right)^2 \right] \left[(\xi^-)^2 + (\varepsilon_0 k^+ / \varepsilon_2)^2 \right]},$$

$$\xi = \sqrt{\lambda^2 - (\varepsilon_0 \omega^2 / c^2)}.$$

Из полученных выражений, в частности, следует, что в пределе $k = 0$, т.е. в отсутствие пространственной модуляции диэлектрической проницаемости, средняя за период энергия излучения для неподвижного заряда отлична от нуля

$$W_{k=0} = \frac{\omega}{\varepsilon_2} \left(\frac{q\varepsilon_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_2} \right)^2 \int_0^{\sqrt{\varepsilon_2}\omega/c} \frac{k^+ \exp(-2\lambda d)}{\left(k^- + (\varepsilon_0 k^+ / \varepsilon_2) \right)^2} \lambda d\lambda \quad \text{при } \varepsilon_2 < \varepsilon_0,$$

$$W_{k=0} = \frac{\omega}{\varepsilon_2} \left(\frac{q\varepsilon_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_2} \right)^2 \left[\int_0^{\sqrt{\varepsilon_0}\omega/c} \frac{k^+ \exp(-2\lambda d)}{\left(k^- + (\varepsilon_0 k^+ / \varepsilon_2) \right)^2} \lambda d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{\sqrt{\varepsilon_0}\omega/c}^{\sqrt{\varepsilon_2}\omega/c} \frac{k^+ \exp(-2\lambda d)}{\left[(\xi^-)^2 + (\varepsilon_0 k^+ / \varepsilon_2)^2 \right]} \lambda d\lambda \right] \quad \text{при } \varepsilon_2 > \varepsilon_0. \quad (28)$$

Следовательно, при наличии границы раздела сред для появления излучения достаточно модулировать параметры среды только во времени, хотя при аналогичных условиях в безграничной среде излучение не возникает.

Формулы (27) позволяют перейти к угловому распределению энергии излучения. Введем угол θ между осью Oz и направлением на точку наблюдения. Тогда, введя замену переменной $\lambda = (\sqrt{\varepsilon_2}\omega/c) \sin \theta$,

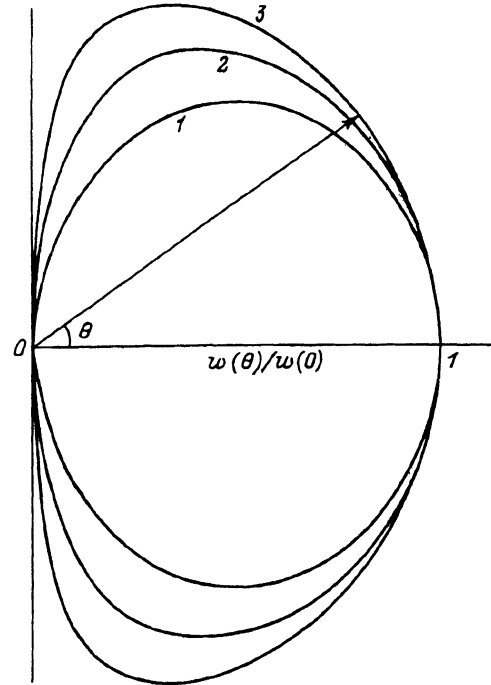


Рис. 1. Диаграммы направленности излучения в вакуум ($\epsilon_2 = 1$) для относительной энергии, излученной в единицу телесного угла $w(\theta)/w(0)$ при различных значениях ϵ_0 для $D = 0$ и $\alpha = 0.01$.

ϵ_0 : 1 — 2, 2 — 100, 3 — 1000.

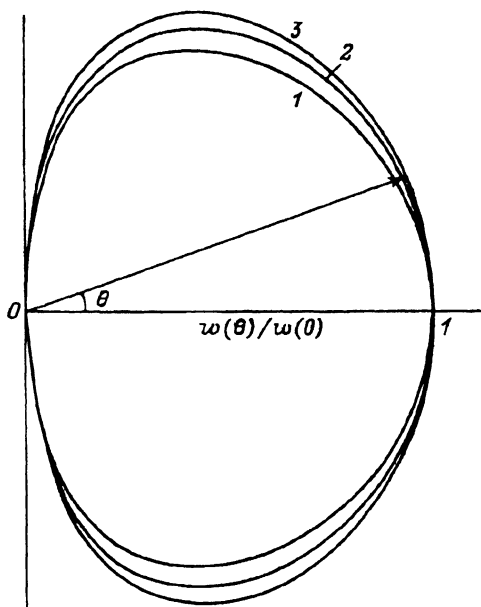


Рис. 2. Диаграммы направленности излучения в вакуум ($\epsilon_2 = 1$) для относительной энергии, излученной в единицу телесного угла $w(\theta)/w(0)$ при различных значениях α для $D = 0$ и $\epsilon_0 = 100$.

α : 1 — 0.08, 2 — 0.07, 3 — 0.01.

из (27) получим следующее безразмерное выражение для энергии, излученной в единицу телесного угла при $\epsilon_2 < \epsilon_0$ и при $\epsilon_2 > \epsilon_0$ для углов $0 < \theta < \arcsin \sqrt{\epsilon_0/\epsilon_2}$:

$$w(\theta) = \frac{dW}{W_0 \sin \theta d\theta} = \Phi(\theta) \frac{\left[(\epsilon_0 \alpha + \sqrt{\epsilon_0 - \epsilon_2 \sin^2 \theta})^2 + \epsilon_2 \sin^2 \theta \right]}{\left(\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_2 - \epsilon_2^2 \sin^2 \theta} + \epsilon_0 \cos \theta \right)^2}, \quad (29)$$

при $\epsilon_2 > \epsilon_0$ для углов $\arcsin \sqrt{\epsilon_0/\epsilon_2} < \theta < \pi/2$

$$w(\theta) = \Phi(\theta) \frac{\left[(\epsilon_0 \alpha)^2 + \left(\sqrt{\epsilon_2 \sin^2 \theta - \epsilon_0} + \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta \right)^2 \right]}{(\epsilon_2^2 \sin^2 \theta + \epsilon_0^2 \cos^2 \theta - \epsilon_0 \epsilon_2)},$$

где

$$\Phi(\theta) = \frac{\cos^2 \theta \exp(-4\pi D \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta)}{\left[\left((\epsilon_0 \alpha^2 - 1)/\alpha \right)^2 + 4\epsilon_2 \sin^2 \theta \right]}, \quad W_0 = \frac{\epsilon_2 \sqrt{\epsilon_2}}{4\pi c} \left(\frac{q\epsilon_1 \omega^2}{\epsilon_0 + \epsilon_2} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\omega}{ck},$$

$$D = \frac{d}{\lambda} = \frac{d\omega}{2\pi c}, \quad d\Omega = 4\pi \sin \theta d\theta.$$

Диаграммы направленности для излучения в вакуум ($\epsilon_2 = 1$) при различных значениях параметров представлены на рис. 1 и 2. Естественно, что для экспериментального наблюдения эффекта излучения неподвижного заряда необходимо использовать систему зарядов. Это несложно реализовать, поместив на границу раздела сред электретную пленку с заданным распределением поверхностного заряда. При этом особенно эффективно будет распределение, напоминающее чередование прозрачных и непрозрачных областей в зонных пластинках в оптике [8]. Рассчитать энергию излучения в такой системе также не составляет труда.

Пусть на границе раздела сред расположены заряды с поверхностной плотностью ρ , равномерно распределенные внутри области радиуса a . Тогда, если использовать решение задачи для точечного заряда как функцию Грина, нетрудно показать, что отличие энергии излучения точечного заряда от распределенного состоит в том, что в подынтегральном выражении в (28) появляется сомножитель вида

$$\Phi(\lambda) = \frac{2J_1(a_1\lambda)}{a_1\lambda}. \quad (30)$$

Этот форм-фактор не влияет на величину излучения в направлении $\theta = 0$, а лишь расширяет угловую диаграмму, показанную на рис. 1. Причем, начиная со значения $a_1 = 2\pi c/\omega$, у диаграммы появляются боковые лепестки. Если же излучателем является заряженное кольцо с радиусами a_m и a_{m+1} , то форм-фактор (30) принимает вид

$$\Phi(\lambda) = \frac{2[a_{m+1}J_1(a_{m+1}\lambda) - a_m J_1(a_m\lambda)]}{\lambda(a_{m+1}^2 - a_m^2)}. \quad (31)$$

По аналогии с зонной пластинкой можно указать оптимальные радиусы заряженного круга и концентрических с ним колец. Пусть точка наблюдения P расположена на оси z и имеет координату Z_P , тогда [8]

$$a_m = \sqrt{mZ_P\Lambda}, \quad (32)$$

где $\Lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны излучения, и излучение в точку P от различных колец будет приходиться в одной фазе.

Список литературы

- [1] Барсуков К.А., Болотовский Б.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. № 2. С. 291.
- [2] Барсуков К.А. // РиЭ. 1964. Т. 7. № 9. С. 1173.
- [3] Барсуков К.А., Болотовский Б.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 4. С. 760.
- [4] Cassady E., Odiner A. // Proc. IEEE. 1963. Vol. 51. P. 1342. Proc. IEEE. 1967. Vol. 55. P. 1154.
- [5] Elachi C. // IEEE. 1972. Vol. 20. P. 280.
- [6] Барсуков К.А., Геворкян Э.А., Звонников Н.А. // РиЭ. 1975. Т. 20. С. 903.
- [7] Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
- [8] Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976. 928 с.