

01;03

ВОЛНОВЫЕ И ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛЕ

© С.О.Ширяева, М.И.Муничев, А.И.Григорьев

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 27 марта 1995 г.)

На основе численного анализа дисперсионного уравнения для капиллярных колебаний сильно заряженной капли вязкой несжимаемой жидкости показано, что вихревые полоидальные движения, существующие в капле, характеризуются весьма большими декрементами затухания, быстро растущими с увеличением вязкости, инкременты неустойчивости по отношению к собственному заряду различных мод капиллярных колебаний капли уменьшаются с увеличением вязкости жидкости и быстро растут с увеличением номера моды. Выделены границы областей значений вязкости и заряда капли, в которых реализуются периодические и апериодические капиллярные движения жидкости.

Введение

Задача о капиллярных колебаниях и устойчивости сильно заряженной сферической капли, впервые корректно сформулированная и решенная для невязкой несжимаемой жидкости Рэлеем [1], до сих пор представляет интерес в связи с разнообразными приложениями в физике, геофизике, научном приборостроении, технике и химической технологии (см., например, [2,3] и указанную там литературу). Но, несмотря на многообразие приложений и большое количество экспериментальных и теоретических исследований, некоторые вопросы, связанные с такой задачей, до сих пор остаются малоизученными. Сказанное в первую очередь относится к влиянию вязкости и электрического заряда капли на величину инкремента неустойчивости ее поверхности, когда величина заряда превысит критическое по Рэлею значение, и на декременты затухания движения жидкости в капле как при докритическом, так и при закритическом зарядах. Исследованию указанных зависимостей в рамках метода, изложенного в [4-6], посвящена настоящая работа.

1. Рассмотрим сферическую каплю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с коэффициентом кинематической вязкости ν , на поверхности которой существуют капиллярные волны бесконечно малой амплитуды, возникающие вследствие теплового движения молекул

жидкости. Пусть жидкость является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ и имеет однородное по объему распределение заряда с плотностью η . Полный заряд капли Q .

Система уравнений электрогидродинамики с электростатическим потенциалом Φ , создаваемым зарядом Q , распределенным в жидкости, состоит из [4-6] уравнения Навье-Стокса

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{in} + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (1)$$

условия несжимаемости жидкости $\nabla \mathbf{U} = 0$ и граничных условий: кинематического

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla F = 0 \quad (2)$$

и динамических для касательных

$$\tau(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\tau \nabla) \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

и нормальной

$$-(P^{in} - P^{ex}) - 2\rho\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} + P_\sigma - P_E = 0 \quad (4)$$

компонент тензора напряжений, которые должны выполняться на свободной поверхности жидкости, описываемой уравнением вида

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - R - \xi(\theta, \phi, t) = 0.$$

В этих выражениях $\xi(\theta, \phi, t)$ — функция, описывающая возмущение равновесной сферической поверхности капли; P^{ex} — давление внешней среды на поверхность капли; P^{in} — давление внутри жидкости; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей; P_σ — лапласовское давление

$$P_\sigma(\xi) = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2}(2 + L)\xi(\theta, \phi, t),$$

$$L \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (5)$$

Давление электрического поля на поверхность заряженной диэлектрической капли P_E определяется выражением [6]

$$P_E = -\frac{3Q}{4\pi R^3} \Phi^{in} + \frac{(\epsilon - 1) E_n^{ex2}}{\epsilon} \frac{1}{8\pi} + (\epsilon - 1) \frac{E_\tau^{ex2}}{8\pi};$$

где Φ^{in} — потенциал силы электрического поля внутри жидкости; E_n^{ex} , E_τ^{ex} — нормальная и касательная компоненты вектора напряженности электрического поля собственного заряда капли вне ее.

Это соотношение приводит к выражению для давления поля вида

$$P_E = -\frac{(5\epsilon - 1) Q^2}{\epsilon} \frac{1}{8\pi R^4} - \frac{(2\epsilon - 5) Q^2}{\epsilon} \frac{1}{4\pi R^5} \xi(\theta, \varphi, t) +$$

$$+ \frac{Q^2}{4\pi R^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} (n + 1) A_{nm} - 3B_{nm} \right] Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (6)$$

де

$$A_{nm} = \frac{n(\varepsilon - 1) + 3}{n(\varepsilon + 1) + 1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi(\theta, \varphi, t) R^{-1} Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$B_{nm} = \frac{(n+1)(\varepsilon-1) - 3\varepsilon}{n(\varepsilon+1) + 1} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi(\theta, \varphi, t) R^{-1} Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$Y_n^m(\theta, \varphi)$ — сферические функции.

2. Введем безразмерные переменные, такие что $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения). Тогда все физические величины (для которых сохраним прежние обозначения) будут выражены в единицах своих характерных значений

$$\begin{aligned} r_* &= R, & t_* &= R^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{-1/2}, & U_* &= R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}, \\ p_* &= R^{-1} \sigma, & Q_* &= R^{3/2} \sigma^{1/2}, & \nu_* &= R^{1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}. \end{aligned}$$

Решение задачи (1)–(6) будем искать в виде [4–6]

$$U(\mathbf{r}, t) - \nabla \Psi_1(\mathbf{r}, t) + (\nabla \mathbf{r}) \Psi_2(\mathbf{r}, t) + \nabla (\nabla \mathbf{r}) \Psi_3(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

где первое слагаемое определяет потенциальную часть поля скоростей, второе — вихревую тороидальную, третье — вихревую полоидальную.

Как показано в [4–6], тороидальная компонента поля скоростей (определяющаяся через Ψ_2) не оказывает влияния на периодические движения поверхности капли и может быть опущена при выводе дисперсионного соотношения.

Выражения для функций $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$ и $\xi(\theta, \varphi, t)$ будем искать в виде разложений по сферическим функциям [6]

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{n,m} C_{nm}^1(z) r^n Y_n^m(\theta, \varphi) \exp(zt), \quad (8)$$

$$\Psi_3(\mathbf{r}, t) = \sum_{n,m} C_{nm}^3(z) \frac{i_n((z\nu^{-1})^{1/2} r)}{i_n((z\nu^{-1})^{1/2})} Y_n^m(\theta, \varphi) \exp(zt), \quad (9)$$

$$\xi(\theta, \varphi, t) = \sum_{n,m} X_{nm}(z) Y_n^m(\theta, \varphi) \exp(zt), \quad (10)$$

где $z = \text{Re} z + i \text{Im} z$ — комплексная частота; i — мнимая единица; $i_n(\zeta)$ — модифицированные сферические функции Бесселя первого рода от комплексного аргумента, определяемые соотношением [7]

$$\begin{aligned} i_n(\zeta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} I_{n+1/2}(\zeta) = \\ &= \begin{cases} \exp(-0.5n\pi i) j_n(\zeta \exp(0.5\pi i)) & \text{при } (-\pi < \arg \zeta \leq 0.5\pi), \\ \exp(1.5n\pi i) j_n(\zeta \exp(-1.5\pi i)) & \text{при } (0.5\pi < \arg \zeta \leq \pi), \end{cases} \\ &n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$j_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} J_{n+1/2}(\zeta)$$

— сферическая цилиндрическая функция Бесселя первого рода от комплексного аргумента, $I_{n+1/2}(\zeta)$ и $J_{n+1/2}(\zeta)$ — модифицированная и простая функции Бесселя полуцелого порядка от комплексного аргумента соответственно.

Решая сформулированную задачу методом, подробно описанным в [4-6], несложно найти, что уравнения, описывающие временную эволюцию безразмерных амплитуд X_n капиллярных колебаний капли, получающиеся при решении задачи в приближении малой вязкости, в указанных безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{d^2 X_n}{dt^2} + 2\alpha_n \frac{dX_n}{dt} + z_n^2 X_n = 0,$$

$$z_n^2 = n(n-1)(n+2) - 4n(n-1) \frac{(\varepsilon-1)^2 n + 5\varepsilon + 1}{\varepsilon(\varepsilon n + n + 1)} W,$$

$$W = \frac{Q^2}{16\pi}, \quad \alpha_n = (n-1)(2n+1)\nu.$$

Здесь W — параметр Рэлея, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду [1]. Если заряд, находящийся на капле, превышает критический, то частоты колебаний z_n становятся мнимыми, что означает экспоненциальный рост возмущений поверхности с последующим распадом капли. Условие такой неустойчивости имеет (как это показано в [8]) вид

$$W \geq \frac{\varepsilon(n+2)(\varepsilon n + n + 1)}{4[(\varepsilon-1)^2 n + 5\varepsilon + 1]}.$$

При $\varepsilon \rightarrow \infty$ в соответствии с данными [1] получаем критическое условие неустойчивости n -й моды капиллярных колебаний сферической заряженной проводящей капли в вакууме $Q^2/4\pi \geq (n+2)$ или в размерном виде

$$\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n+2).$$

3. Если вязкость жидкости нельзя считать малой, то дисперсионное уравнение для капиллярных движений жидкости в капле имеет вид

$$z^2 + 2(n-1) \left((2n+1) - n(n+2)f_n(x) \right) (1-f_n(x))^{-1} \nu z + z_n^2 = 0,$$

$$f_n(x) \equiv 2x^{-1} i_{n+1}(x)/i_n(x), \quad x \equiv (z/\nu)^{1/2}. \quad (12)$$

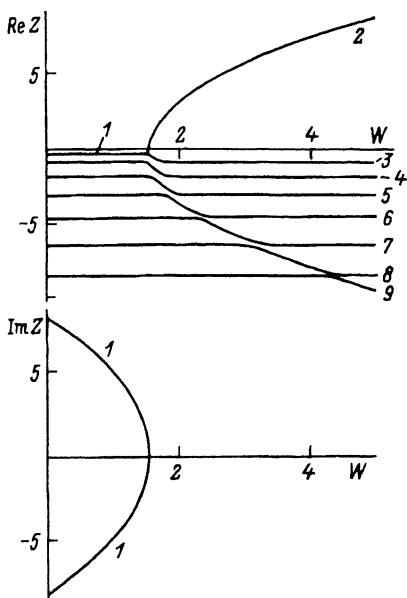


Рис. 1. Зависимости от безразмерного параметра Рэлея W вещественной (вверху) и мнимой (внизу) компонент безразмерной комплексной частоты четвертой моды капиллярного волнового движения в сферической капле при $\nu = 0.02$.

1-3 — капиллярные волны, 4-9 — аperiodически затухающие вихревые полоидальные движения жидкости.

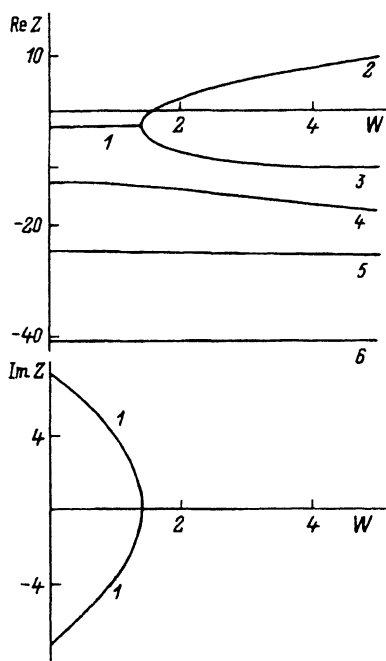


Рис. 2. Зависимости от безразмерного параметра Рэлея W вещественной (вверху) и мнимой (внизу) компонент безразмерной комплексной частоты четвертой моды капиллярного волнового движения в сферической капле при $\nu = 0.18$.

1-3 — капиллярные волны, 4-6 — аperiodически затухающие вихревые полоидальные движения жидкости.

Численный анализ этого дисперсионного уравнения (рис. 1-5) показывает, что при $\text{Re } z > 0$ оно имеет однопараметрическое множество решений z_n (здесь n — номер моды капиллярных колебаний), соответствующее рэлеевской неустойчивости n -й моды заряженной капли. При $\text{Re } z < 0$ дисперсионное уравнение (12) имеет уже двухпараметрическое множество решений z_{nk} , где k — номер корня уравнения $f_n(x) - 1 = 0$ при $\text{Re } z < 0$. Это уравнение для каждой моды капиллярных колебаний n имеет бесчисленное множество решений, определяющих декременты затухания вихревых полоидальных движений, описываемых третьим слагаемым решения (7). Отметим, что в [9] вихревые движения такого типа в капле зафиксированы экспериментально и даже сфотографированы. Однако происхождение этого множества решений нуждается в дополнительном комментарии.

Из соображений простоты рассмотрим простейший случай $\text{Im } z = 0$, $\text{Re } z < 0$. В такой ситуации, согласно (11), модифицированная сферическая функция Бесселя превращается в простую сферическую функцию Бесселя, которая уже является периодической (выражается через обычные тригонометрические функции [7]), и дисперсионное уравнение (12) приобретает дополнительное множество решений вблизи точек

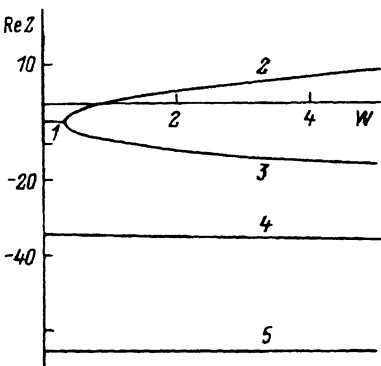


Рис. 3. Зависимости от безразмерного параметра Рэлея W вещественной (вверху) и мнимой (внизу) компонент безразмерной комплексной частоты четвертой моды капиллярного волнового движения в сферической капле при $\nu = 0.5$. 1-3 — капиллярные волны, 4, 5 — аperiodически затухающие вихревые полоидальные движения жидкости.

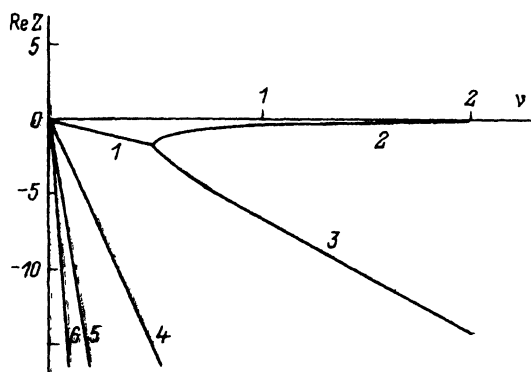


Рис. 4. Зависимости от безразмерной вязкости ν вещественной (вверху) и мнимой (внизу) компонент комплексной частоты для основной моды при $W = 0.6$. Ветви с номерами, большими 3, соответствуют вихревым полоидальным движениям жидкости.

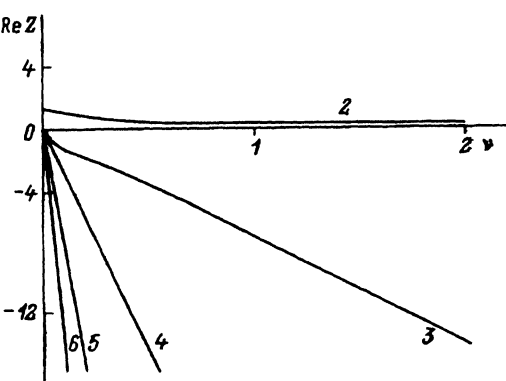


Рис. 5. Зависимости от безразмерной вязкости ν вещественной компоненты комплексной частоты для основной моды при $W = 1.2$.

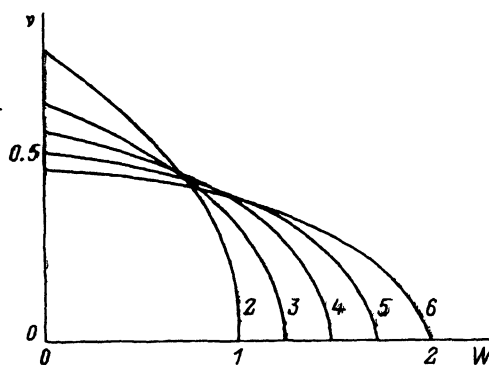


Рис. 6. Границы областей существования в пространстве ν - W периодических волновых движений n -й моды в заряженной сферической капле.

Таблица 1. Зависимость величин инкрементов неустойчивости первых пяти мод капиллярных колебаний заряженной капли от вязкости при $W = 5$

n	ν				
	0.02	0.08	0.18	0.36	0.5
2	5.4	5.1	4.9	4.3	4
3	9.1	8.5	7.6	6.4	5.6
4	12.3	11.1	9.7	7.7	6.6
5	15	13.3	11.2	8.6	7.1
6	17.4	15.1	12.3	9	

Таблица 2. Зависимость частот капиллярных колебаний заряженной капли от вязкости для первых пяти мод при $W = 0$

n	ν				
	0.02	0.08	0.18	0.36	0.5
2	2.9	2.8	2.7		2.1
3	5.5	5.3	4.9	4.1	3
4	8.5	8	7.2	5.6	3.1
5	11.8	10.2	9.6	7	1
6	15.4	14.1	12.3	8	

z_{nk} , для которых обращается в нуль знаменатель во втором слагаемом уравнения (12). На рис. 1–3 представлены зависимости инкрементов (при $\text{Re } z > 0$) и декрементов (при $\text{Re } z < 0$) $\text{Re } z = \text{Re } z(W)$, а также частот капиллярных колебаний капли $\text{Im } z = \text{Im } z(W)$ от величины параметра Рэлея, рассчитанные численно по (12) при различных значениях безразмерной вязкости $\nu = 0.02$ (рис. 1), 0.18 (рис. 2), 0.5 для моды с $n = 4$ (рис. 3). Ветви дисперсионного уравнения с номерами 4–8 (рис. 1) соответствуют, согласно (7)–(10), диссипации энергии вихревых полоидальных движений. Несложно видеть, что эти ветви дисперсионного уравнения существуют и при $\text{Im } z \neq 0$. Для других мод капиллярных колебаний (с $n \neq 4$) соответствующие зависимости имеют качественно такой же вид, как и для $n = 4$.

На представленных рисунках ветвь 1 определяет периодические затухающие капиллярные колебания капли, ветви 2 (при $\text{Re } z < 0$) и 3 соответствуют затухающим аperiodическим капиллярным движениям жидкости. Часть ветви 2, расположенная при $\text{Re } z > 0$, дает инкремент рэлеевской неустойчивости заряженной капли. Ветви дисперсионного уравнения с номерами, большими 3, описывают, согласно вышесказанному, аperiodически быстро затухающие (декременты этих ветвей, как правило, велики) вихревые полоидальные движения жидкости в капле.

Зависимости декрементов затухания капиллярных и вихревых полоидальных движений жидкости от безразмерной вязкости иллюстри-

ются, рис. 4 и 5, где приведены результаты численного расчета (12) зависимостей $\text{Re } z = \text{Re } z(\nu)$ и $\text{Im } z = \text{Im } z(\nu)$ основной моды ($n = 2$) для различных значений параметра Рэлея W : рис. 4 — для докритического значения $W = 0.6$; рис. 5 — для закритического значения $W = 1.2$. В последнем случае периодические колебания основной моды капли отсутствуют, так как мода неустойчива. Кривая 2 на рис. 5 определяет зависимость (при $W = 1.2$) инкремента неустойчивости основной моды от вязкости. На рис. 4 и 5 бросается в глаза быстрый рост декрементов затухания вихревых полоидальных движений с увеличением вязкости.

Зависимости инкрементов неустойчивости первых пяти мод от вязкости при фиксированном значении параметра Рэлея ($W = 5$) представлены в табл. 1. Несложно видеть, что инкременты неустойчивости быстро растут с увеличением номера моды. При увеличении вязкости инкременты, как и следовало ожидать, уменьшаются. В табл. 2 приведены данные о зависимости частоты первых пяти мод капиллярных колебаний капли от вязкости при $W = 0$.

Из рис. 1–3 легко видеть, что с увеличением вязкости жидкости уменьшается область значений параметра W , в которой существуют периодические капиллярные движения (стоячие капиллярные волны). Это проявляется в том, что с увеличением ν точка ветвления капиллярных движений 1–3 смещается влево. Меняется положение точки ветвления и при изменении величины заряда капли (величины параметра W). На рис. 6 для первых пяти мод приведены границы областей существования капиллярного волнового движения в заряженной капле в пространстве безразмерных параметров ν – W . Волновые движения жидкости для n -й моды существуют в области значений параметров ν – W , ограниченной на рис. 6 осями координат и соответствующей кривой. Номера на кривых рис. 6 соответствуют номерам мод. Вне указанных областей могут реализоваться только аperiodические движения рассматриваемой моды.

Список литературы

- [1] *Rayleigh (Strutt J.W., Lord)* // *Phil. Mag.* 1882. Vol. 14. P. 184–188.
- [2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // *ЖТФ.* 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // *МЖГ.* 1994. № 4. С. 3–22.
- [4] *Григорьев А.И., Лазаряц А.Э.* // *ЖВММТФ.* 1992. Т. 31. № 6. С. 929–938.
- [5] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 1992. Т.62. Вып. 11. С. 32–48.
- [6] *Ширяева С.О., Лазаряц А.Э., Григорьев А.И. и др.* Препринт. ИМ РАН. № 27. Ярославль, 1994. 128 с.
- [7] *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М.Абрамовича, И.Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [8] *Панасов С.Н.* // *Физико-технические проблемы монодисперсных систем.* № 185. М., 1988. С. 70–73.
- [9] *Hayati J., Bailey A.J., Tadros H.F.* // *Nature.* 1986. Vol. 319. N 1. P. 41–43.