01;04;09

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ПОПЕРЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСНОГО ПОЛЯ, ВОЗБУЖДАЕМОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПУЧКОМ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ПЛАЗМЕННОГО ШАРА

© *Н.С.Бухман*

Мичуринская государственная сельскохозяйственная академия,
Мичуринск, Россия
(Поступило в Редакцию 24 декабря 1994 г.)

Предложен метод расчета резонансного поля, возбуждаемого электромагнитным пучком на критической поверхности радиально-неоднородного плазменного шара. Предложенный метод позволяет свести задачу расчета распределения резонансного поля по критической поверхности к вычислению двухкратного (в случае неосесимметричного пучка) интеграла хорошо изученного типа (интеграл типа Кирхгофа). Обсуждается вопрос о предельной неоднородности поперечного распределения резонансного поля и о возможных путях увеличения поперечной однородности резонансного прогрева плазменной сферы.

Введение

Известно [1,2], что при отражении электромагнитной волны от плавнонеоднородного слоя слабостолкновительной плазмы с максимальной плотностью, превышающей критическую для данной частоты волны ω ($n_{\text{cr}} = m\omega^2/4\pi e^2$) на критической поверхности плазменного слоя, определяемой условием $n = n_{\text{cr}}$, происходит резонансное возрастание продольной (в направлении градиента диэлектрической проницаемости) компоненты электрического поля падающей волны — плазменный резонанс. Продольное распределение резонансного поля не зависит от структуры падающей волны и определяется тем или иным [1,2] механизмом ограничения резонанса. Поперечное же распределение резонансного поля зависит как от характеристик пространственного распределения плазмы, так и от структуры падающей волны. Поперечное распределение резонансного поля, возбуждаемое электромагнитным пучком на плоской критической поверхности, рассчитано в [3]. Между тем основной практический интерес (в частности, в исследованиях, связанных с проблемой лазерного термоядерного синтеза) представляет распределение резонансного поля на сферической критической поверхности.

В данной работе предлагается метод расчета поперечного (по критической поверхности) распределения резонансного поля, возбуждаемого на сферической критической поверхности радиально-неоднородного плазменного шара параксиальным электромагнитным пучком. Предлагаемый подход основан на использовании интеграла Кирхгофа [4,5] и позволяет выразить резонансное поле в квадратурах от первичного (вакуумного) поля падающего на плазменный шар пучка на плоскости $z = 0$, проходящей через центр плазменного шара 0 перпендикулярно направлению распространения пучка ($0z$).

Поскольку для рассматриваемой задачи характерна сферическая симметрия (плазменного шара), то естественным представляется следующий путь ее решения: а) следует разложить падающую волну по сферическим гармоникам (ввиду векторного характера задачи речь идет о разложении по векторным сферическим функциям [6–8]; б) далее необходимо найти резонансное поле, возбуждаемое на сферической критической поверхности отдельной векторной сферической гармоникой; в) просуммировав полученные в пункте б парциальные резонансные поля с весами, полученными в пункте а, следует отыскать суммарное резонансное поле, возбуждаемое падающей волной.

Отметим, что задача а относится к теории дифракции электромагнитных волн в вакууме: коэффициенты разложения падающей на плазменный шар волны по сферическим гармоникам не зависят, разумеется, от объекта, на который падает волна, и определяются только первичным (вакуумным) полем пучка. При решении задачи б, напротив, можно отвлечься от специфики пучка и ограничиться изучением резонансного поля, возбуждаемого на критической поверхности шара падающей волной весьма специального вида (сферической гармоникой). Объединение "дифракционной" и "плазменной" компонент изучаемой проблемы происходит при решении задачи в. Впрочем, как станет ясно из дальнейшего, и задачу в удается свести к хорошо изученной стандартной задаче скалярной теории дифракции волн в вакууме, что позволяет говорить о решении поставленной в данной работе задачи в квадратурах. Приступим к реализации намеченной программы.

Сферический спектр скалярной волны

Решим сначала более простую задачу вакуумной скалярной теории дифракции о связи апертурного вакуумного поля волны (на плоскости $z = 0$) с ее скалярным сферическим спектром (т.е. с коэффициентами ее разложения в ряд по скалярным сферическим функциям [9,10]). Пусть амплитуда $u(\mathbf{r})$ скалярной волны $u(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$ удовлетворяет вакуумному скалярному волновому уравнению $\Delta u + k_0^2 u = 0$ ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — вакуумное волновое число). Пусть, кроме того, $u(\mathbf{r})$ — параксиальный волновой пучок, распространяющийся вдоль оси $0z$ (для определенности, от положительных к отрицательным значениям z). Пусть $u_0(\boldsymbol{\rho})$ — вакуумная амплитуда поля на плоскости $z = 0$, проходящей через начало системы координат 0 перпендикулярно направлению распространения пучка $0z$. Тогда, используя метод Кирхгофа [4,5], нетрудно получить для амплитуды поля $u(\mathbf{r})$ вдали от плоскости $z=0$

$$u_{\pm}(\mathbf{r}) = \mp(ik_0^2/4\pi)\iint(1 \pm z/R)u_0(\boldsymbol{\rho})\exp(\pm ik_0R)/R\,dS, \tag{1}$$

где $u_{\pm}(\mathbf{r})$ — амплитуда поля при $z>0$ (при знаке "плюс") или при $z<0$ (при знаке "минус"), $R=\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}$.

Интегрирование в (1) осуществляется по переменной $\boldsymbol{\rho}$ ($\boldsymbol{\rho}=(\rho,\psi)$) на плоскости $z=0$. Амплитуда поля $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда $\lim\limits_{r\to\infty}(\partial u_+/\partial r - ik_0u_+) = 0$ [4,5] и состоит из уходящих от центра 0 сферических волн, а амплитуда поля $u_-(\mathbf{r})$ удовлетворяет противоположному условию $\lim\limits_{r\to\infty}(\partial u_-/\partial r - ik_0u_-) = 0$ и состоит из приходящих из бесконечности (т.е. падающих на центр) сферических волн. Поэтому поле u_+ можно отождествить с падающей на центр 0 волной, а поле u_- — с отраженной от центра (уходящей) волной.

Обычно формулы типа (1) используются для расчета "уходящей" волны u. Но в данном случае нас интересует сферический спектр падающей на центр волны u_+, т.е. коэффициенты A_{jm} заведомо справедливого при $k_0r\to\infty$ разложения [4]

$$u_+ = [\exp(ik_0r)/(k_0r)]\sum_{jm}A_{jm}Y_{jm}(\theta,\phi), \tag{2}$$

где Y_{jm} — скалярные сферические функции [9–11], в набор коэффициентов $\{A_{jm}\}$ естественно именовать сферическим спектром падающей волны.

Использовав под интегралом (1) мультипольное разложение сферической волны $\exp(+ik_0R)/R$, асимптотические свойства функций Бесселя и Ханкеля [9], а также параксиальность волны u_+, нетрудно получить для сферического спектра падающей волны выражение

$$A_{jm} = (-i)^{m+1}u_{0m}(\rho_j)(k_0\rho_j)^{1/2}, \tag{3}$$

где введено обозначение $\rho_j = j/k_0$, а

$$u_{0m}(\rho) = \int_0^{2\pi} u_0(\boldsymbol{\rho})[\exp(-im\psi)/\sqrt{2\pi}]d\psi$$

— коэффициенты фурье-разложения функции $u_0(\rho,\psi)$ в ряд по азимутальному углу ψ.

Для уяснения физического смысла соотношения (3) достаточно вспомнить [6,7], что ρ_j — это прицельный параметра фотона с импульсом $(h/2\pi)k_0$ и моментом импульса $(h/2\pi)[f(j+1)]^{1/2}\approx(h/2\pi)f$. Вполне естественно, что амплитуда вакуумного поля пучка на расстоянии ρ_j от центра 0 контролируется количеством фотонов с квантовым числом углового момента j.

Сферический спектр электромагнитной волны

Обратимся теперь к случаю электромагнитной волны. Для обобщения “скалярной” теории на векторный случай достаточно вспомнить, что потенциалы Дебая [4] электромагнитной волны удовлетворяют скалярному волновому уравнению, воспользоваться только что полученными “скалярными” результатами для потенциалов Дебая, а затем перейти от потенциалов Дебая к напряженностям электрического и магнитного поля.

В итоге нетрудно получить следующее разложение для дальнего поля ($r \to \infty$) падающего на центр 0 параксиального электромагнитного пучка:

$$\mathbf{E}_{+}^{e} = [\exp(ik_0 r)/(k_0 r)] \sum_{jm} A_{jm}^{(e)} \mathbf{Y}_{jm}^{(+1)}(\theta, \phi), \tag{4}$$

где $\mathbf{Y}_{jm}^{+1}(\theta, \phi)$ — поперечная векторная сферическая функция электрического типа [6,7],

$$A_{jm}^{(e)} = (-i)^m E_{0m}^{(e)}(\rho_j)(k_0\rho_j)^{1/2}, \tag{5}$$

где по-прежнему $\rho_j = j/k_0$,

$$E_{0m}^{(e)}(\rho) = \int_0^{2\pi} E_0^{(r)}(\boldsymbol{\rho})[\exp(-im\psi)/\sqrt{2\pi}]d\psi, \quad E_0^{(r)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{E}_0(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\rho}/\rho.$$

Прокомментируем соотношения (4), (5). Формула (4) дает разложение не всего падающего на центр поля, а только его e-компоненты (о чем и напоминает верхний индекс). Полное падающее поле содержит e- и n-компоненты [6,7], но h-компонента не возбуждает резонансное поле (см. ниже) и поэтому здесь не рассматривается. Смысл соотношения (5) аналогичен смыслу соотношения (3) с одним лишь отличием: коль скоро речь идет о фотонах e-типа, то в расчет берется только радиальная компонента $E_0^{(r)}(\boldsymbol{\rho})$ вакуумного электрического поля пучка на плоскости $z = 0$.

В заключение раздела подчеркнем еще раз, что сферический спектр падающей волны не зависит от характеристик плазменного шара, но зависит от характеристик пучка и местоположения центра плазменного шара 0, относительно которого проводится разложение (4) поля пучка в ряд по сферическим гармоникам. Поэтому сферический спектр пучка определяется именно его вакуумным полем $\mathbf{E}_0(\boldsymbol{\rho})$ на плоскости, проходящей через точку 0 перпендикулярно направлению распространения пучка (параксиальный пучок имеет достаточно хорошо определенное направление распространения даже в случае отсутствия какой-либо симметрии; вакуумная ось пучка не обязана проходить через центр плазменного шара).

Полученные в данном пункте результаты позволяют связать сферический спектр параксиального электромагнитного пучка (который удобен для расчета резонансного поля) с его вакуумным полем на апертуре $z = 0$ (задание вакуумного поля пучка на апертуре является одним из наиболее простых и естественных способов задания первичного поля пучка).

Резонансное поле отдельной сферической волны

Теперь займемся изучением резонансного поля, возбуждаемого на критической поверхности отдельной сферической гармоникой. Пусть $n(r)$ — плотность плазмы, зависящая только от расстояния до центра плазменного шара 0 (являющегося началом нашей системы координат). Тогда комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon(r)$ может быть записана в виде [1]

$$\varepsilon(r) = (1 - n(r)/n_{\text{cr}}) - i(n(r)/n_{\text{cr}})(\nu/\omega), \tag{6}$$

где n_{cr} — критическая плотность плазмы, ν — эффективная (или эквивалентная [1,2]) частота столкновений ($\nu \ll \omega$).

Пусть на достаточном удалении от центр шара плотность плазмы пренебрежимо мала. Тогда при $r \to \infty$ поле произвольной электромагнитной волны может быть представлено в следующем виде [6,7]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{(h)}, \quad \mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{E}_{+}^{(e)} + \mathbf{E}_{-}^{(e)}, \quad \mathbf{E}^{(h)} = \mathbf{E}_{+}^{(h)} + \mathbf{E}_{-}^{(h)};$$

$$\mathbf{E}_{\pm}^{(e)} = [\exp(\pm ik_0 r)/(k_0 r)] \sum_{jm} A_{jm\pm}^{(e)} \mathbf{Y}_{jm}^{(+1)}(\theta, \phi);$$

$$\mathbf{E}_{\pm}^{(h)} = [\exp(\pm ik_0 r)/(k_0 r)] \sum_{jm} A_{jm\pm}^{(h)} \mathbf{Y}_{jm}^{(0)}(\theta, \phi); \tag{7}$$

В (7) верхним индексом e отмечена e-компонента поля, верхним индексом h — h-компонента поля, нижний индекс "плюс" относится к падающей на центр волне, а нижний индекс "минус" — к отраженной (уходящей от центра) волне. Фунции $\mathbf{Y}_{jm}^{(+1)}(\theta, \phi)$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta, \phi)$ и $\mathbf{Y}_{jm}^{(0)}(\theta, \phi)$ — описанные в [6,7] векторные сферические функции. Справедливость разложения (7) следует из полноты системы векторных сферических функций и из поперечности свободного электромагнитного поля. Для полноты картины можно добавить, что e-компонента поля описывается скалярным потенциалом Дебая U, h-компонента поля — скалярным потенциалом Дебая V [4], а разложение полей $E^{(e)}$ и $E^{(h)}$ по векторным сферическим функциям эквивалентно разложению потенциалов Дебая U и V по скалярным сферическим функциям.

Разложение (7) справедливо только в вакууме и на достаточном удалении от центра 0, т.е. там, где возможно разделение волны на падающую и отраженную от центра компоненты. Нетрудно проверить, что при конечных r использование уравнений Максвелла с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r)$, зависящей только от расстояния до центра 0, приводит к замене разложения (7) на

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{(h)}, \quad \mathbf{E}^{(e)} = \sum_{jm} \mathbf{E}_{jm}^{(e)}, \quad \mathbf{E}^{(h)} = \sum_{jm} \mathbf{E}_{jm}^{(h)}, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{E}_{jm}^{(h)} = \frac{e_j^{(h)}(r)}{k_0 r}\mathbf{Y}_{jm}^{(0)}(\theta,\,\phi),$$

$$\mathbf{E}_{jm}^{(e)} = \frac{1}{k_0 r\varepsilon(r)}\left(\frac{1}{k_0}\,\frac{dh_j^{(e)}(r)}{dr}\mathbf{Y}_{jm}^{(+1)}(\theta,\,\phi) + \frac{h_j^{(e)}(r)}{k_0 r}[f(f+1)]^{1/2}\mathbf{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta,\,\phi)\right),$$

$$\mathbf{H}_{jm}^{(e)} = \frac{h_j^{(e)}(r)}{k_0 r}\mathbf{Y}_{jm}^{(0)}(\theta,\,\phi). \tag{9}$$

В (9) радиальная функция $e_j^{(h)}(r)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 e_j^{(h)}}{dr^2} + \left(k_0^2\varepsilon(r) - \frac{f(f+1)}{r^2}\right)e_j^{(h)} = 0, \tag{10}$$

а радиальная функция $h_j^{(e)}(r)$ — дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 h_j^{(e)}}{dr^2} - \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon\, dh_j^{(e)}}{dr\, dr} + \left(k_0^2\varepsilon(r) - \frac{f(f+1)}{r^2}\right)h_j^{(e)} = 0, \tag{11}$$

Последнее из уравнений (9) выписано для пояснения смысла функции $h_j^{(e)}(r)$.

В общем случае падающая волна $\mathbf{E}_+$ определяется набором коэффициентов $A_{jm+}^{(e,h)}$ в разложении (7). Эти коэффициенты определяют асимптотику функций $e_j^{(h)}(r)$ и $h_j^{(e)}(r)$ при $r \to \infty$ (конечно, неполностью задается асимптотика той компоненты одномерных волн $e_j^{(h)}(r)$ и $h_j^{(e)}(r)$, которая соответствует падающей волне). Совместно с требованием ограниченности функций $e_j^{(h)}(r)$ и $h_j^{(e)}(r)$ при $r \to 0$ это позволяет однозначно найти функции $e_j^{(h)}(r)$ и $h_j^{(e)}(r)$ из (10) и (11) и затем определить полное поле (с использованием (8) и (9)).

В данной работе нас интересует только резонансное поле, возбуждаемое электромагнитным пучком на критической поверхности плазменного шара $t = r_0$, где плотность плазмы равна критической $n(r_0) = n_{\text{cr}}$ и вещественная часть диэлектрической проницаемости плазмы обращается в 0. Видно, что функция $e_j^{(h)}(r)$ не имеет особенностей и конечна при $\varepsilon(r) = 0$. Таким образом, h-компонента падающего поля не возбуждает плазменного резонанса на критической поверхности и поэтому в данном случае не представляет интереса, что и было отмечено выше (см. обсуждение формул (4) и (5)).

Что же касается e-компоненты поля, то анализ соотношений (9) и уравнения (11) показывает, что при $\varepsilon(r) = 0$ поперечная компонента поля (с угловой зависимостью $\mathbf{Y}_{jm}^{(+1)}$) имеет логарифмическую особенность, а продольная (с угловой зависимостью $\mathbf{Y}_{jm}^{(+1)}$) — гиперболическую особенность. Это свидетельствует о том, что e-компонента падающего поля возбуждает плазменный резонанс на критической поверхности. Разумеется, в случае $\nu > 0$ диэлектрическая проницаемость плазмы не обращается в 0 при вещественных r, но вблизи критической поверхности она становится весьма мала, а электрическое поле весьма велико. Анализируя соотношение (9) для электрического вектора e-компоненты поля, нетрудно проверить, что при $r \to \infty$ первый член в скобках доминирует над вторым и поле отдельной сферической гармоники $\mathbf{E}_{jm}^{(e)}$ поперечно и имеет угловую зависимость $\mathbf{Y}_{jm}^{+1}$ в соответствии с (7). Вблизи же критической поверхности при достаточно малых (ν/ω) второй член в скобках доминирует над первым и резонансное поле, возбуждаемое отдельной сферической гармоникой вблизи критической поверхности, продольно и имеет угловую зависимость $\mathbf{Y}_{jm}^{(-1)}$.

Из сделанных замечаний следует вывод о том, что для продольного резонансного поля[1] вблизи критической поверхности справедливо разложение

$$\mathbf{E}_{res} = R(r) \sum_{jm} A_{jm}^{(res)} \mathbf{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta, \phi), \tag{12}$$

где

$$R(r) = 1/[(r - r_0)/L - i(\nu/\omega)] \tag{13}$$

— обычный [1] резонансный фактор, а $A_{jm}^{res} = f_j A_{jm\pm}^{(e)}$, где $\{f_j\}$ — набор некоторых коэффициентов, зависящих от f, но не зависящих от r и определяемых связью между "дальней" (при $r \to \infty$) и "ближней" (при $r \to r_0$) асимптотиками решения дифференциального уравнения (11).

К сожалению, решения уравнения (11) не содержатся в классе обычно используемых специальных функций даже при простейших предположениях о характере радиальной зависимости плотности плазмы $n(r)$ от радиальной координаты r.

Тем не менее это уравнение удается решить асимптотически методом эталонных дифференциальных уравнений (9), (11) при следующих условиях:

$$k_0 \gg 1, \quad (k_0 r_0)(k_0 L)^{-1/3} \gg 1, \quad (\nu/\omega)(k_0 L) \ll 1. \tag{14}$$

В (14) r_0 — радиус критической поверхности, ν — эффективная частота столкновений, L — характерная длина радиальной неоднородности плазмы вблизи критической поверхности (параметры r_0 и L определяются соотношениями $n(r_0) = n_{\rm cr}$ и $n'(r_0) = -n_{\rm cr}/L$).

Обсудим смысл условий (14). Первое из них может быть интерпретировано как условие плавнонеоднородности плазмы. Второе условие

[1] Резонансную особенность вблизи критической поверхности имеет и поперечное поле. В данной работе мы ограничимся изучением продольного резонансного поля, которое велико по сравнению с поперечным (гиперболическая особенность сильнее логарифмической).

не имеет столь прозрачного смысла и возникает при математическом исследовании уравнения (11). Оно обычно выполнено в случае выполнения первого условия (например, для его выполнения достаточно добавить к первому условию требование "$L < r_0$ или L одного порядка с r_0"). Третье условие можно интерпретировать как условие слабости нерезонансного (обратно-тормозного) поглощения волны при распространении от периферии плазменного шара до критической поверхности (на расстояние порядка L). Это условие нарушается достаточно часто, но из физических соображений ясно, что от него можно отказаться при дополнительном учете ослабления волны при распространении до критической поверхности, которое сводится к умножению амплитуды резонансного поля на фактор

$$\exp\left[-(k_0/2)\int_{r_0}^{\infty}(n/n_{\text{cr}})(\nu/\omega)(1-n/n_{\text{cr}})^{-1/2}dr\right].$$

Ясно, что нарушение этого условия (значительность обратно-тормозного поглощения волны при распространении в плазменной короне) приводит лишь к общему ослаблению резонансного поля без изменения его поперечного распределения по критической поверхности. В конечном счете это обстоятельство связано с большей селективностью резонансного поглощения по сравнению с обратно-тормозным по прицельному параметру падающего на плазменный шар фотона, т.е. с соотношением $r_{am} \ll r_0$ (см. формулу (16)).

При выполнении условий (14) в качестве эталонного для дифференциального уравнения (11) может быть использовано дифференциальное уравнение плазменного резонанса [1], которое получается из (11) при $\nu = 0$, линейной зависимости плотности плазмы от радиальной координаты r (т.е. при $n(r) = n_{\text{cr}}(1-(r-r_0)/L)$) и при замене члена $f(f+1)/r^2$ его значением при $r = r_0$. Дифференциальное уравнение плазменного резонанса хорошо изучено и его решения табулированы [1,2,12,13]. В результате проведенного рассмотрения получена следующая формула для коэффициентов f_j:

$$f_j = \frac{\Phi_D(\rho_j/r_{am})}{\sqrt{2\pi}(k_0r_0)(k_0L)^{1/2}}\exp\left[i\left(\phi_0-\frac{3}{4}\pi+\frac{k_0\rho_j^2}{2r_{ph}}\right)\right], \qquad (15)$$

где $\Phi_D(\rho_j/r_{am})$ — функция Денисова, связанная с табулированной в [12,13] функцией резонансного поглощения при отражении $Q(\tau)$ соотношением $Q(\tau) = \Phi_D^2(\tau)/2$, а фаза ϕ_0 и параметры r_{am} и r_{ph} определяются соотношениями

$$\phi_0 = k_0r_0 - \int_{r_0}^{\infty}(k(r)-k_0)dr, \quad r_{am} = r_0(k_0L)^{-1/3},$$

$$1/r_{ph} = k_0\int_{r_0}^{\infty}dr/(r^2k(r)), \qquad (16)$$

где $k(r) = k_0(\varepsilon_r(r))^{1/2} = k_0[1-n(r)/n_{\text{cr}}]^{1/2}$.

В заключение раздела отметим, что набор коэффициентов $\{f_j\}$ зависит только от свойств плазменного шара и не зависит от характеристик падающего на шар пучка, причем этот набор коэффициентов полностью определяет свойства плазменного шара с точки зрения возбуждения резонансного поля на его критической поверхности. Сам же этот набор коэффициентов полностью определяется величиной параметров r_0, L, r_{am}, r_{ph} и ϕ_0. При этом третий из пяти приведенных параметров является простой комбинацией первых двух, а пятый обычно несуществен (потому что он определяет общую фазу резонансного поля на критической поверхности и не влияет на величину и распределение резонансного поля). От характера радиальной зависимости плотности плазмы $n(r)$ зависит только четвертый из приведенных параметров. Впрочем, нетрудно показать, что в случае $L \ll r_0$ из (16) следует $r_{ph} = r_0$ (в наиболее часто встречающемся случае $L \approx r_0$ для оценок можно положить $r_{ph} \approx r_0$. Сказанное означает, что по существу резонансное поле, возбуждаемое пучком на критической поверхности плазменного шара, не зависит от распределения плотности плазмы вдали от критической поверхности и определяется только величиной параметров r_0 и L, характеризующих функцию $n(r)$ вблизи критической поверхности.

Интегральное представление для резонансного поля

Полученные выше результаты позволяют представить резонансное поле, возбуждаемое пучком на критической поверхности, в виде ряда по сферическим функциям (см. формулы (5), (12) и (15))

$$\mathbf{E}_{res} = R(r) \sum_{jm} (-i)^m f_j E_{0m}^{(e)}(\rho_j)(k_0\rho_j)^{1/2} \mathbf{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta, \phi), \tag{17}$$

где продольная векторная сферическая функция $\mathbf{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta, \phi)$ может быть выражена через скалярную сферическую функцию $Y_{jm}(\theta, \phi)$ с помощью известного соотношения $\mathbf{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta, \phi) = (\mathbf{r}/r) Y_{jm}(\theta, \phi)$.

Удобно перейти от ряда (17) к интегральному представлению типа интеграла Кирхгофа, используя “в обратном направлении” формулу (3) для сферического спектра скалярной волны. Действительно, введя в рассмотрение фиктивную скалярную[2] волну $u^{(sp)}$, вакуумное поле которой на плоскости $z = 0$ определяется соотношением

$$u_0^{(sp)}(\boldsymbol{\rho}) = i f(\rho) E_0^{(r)}(\boldsymbol{\rho}), \tag{18}$$

где функция $f(\rho)$ определяется соотношением $f(\rho_j) = f_j$, и сопоставив формулы (2), (3) с формулами (17), (18), нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{E}_{res} = (\mathbf{r}/r) R(r) \Phi_{res}(\theta, \phi), \tag{19}$$

где угловая диаграмма распределения резонансного поля по критической поверхности $\Phi_{res}(\theta, \phi)$ одновременно является и диаграммой

[2] Т е. подчиняющуюся скалярному волновому уравнению.

направленности на бесконечности падающей (на центр 0) компоненты пучка $u^{(sp)}$

$$u_+^{(sp)} = [\exp(ik_0 r)/(k_0 r)]\Phi_{res}(\theta,\, \phi). \tag{20}$$

Но для отыскания диаграммы направленности пучка $u^{(sp)}$ на бесконечности тоже может быть использован метод Кирхгофа

$$u_+^{(sp)}(\mathbf{r}) = -(ik_0^2/2\pi) \iint u_0^{(sp)}(\boldsymbol{\rho}) \exp(ik_0 R)/R dS, \tag{21}$$

откуда для угловой диаграммы распределения резонансного поля по критической поверхности (см. (19)) имеем окончательный результат

$$\Phi_{res}(\theta,\, \phi) = -A(ik_0^2/2\pi) \iint K_{am}(\rho) K_{ph}(\rho) E_0^{(r)}(\boldsymbol{\rho}) \times$$
$$\times \exp(-ik_0 \rho\theta \cos(\psi - \phi)) dS. \tag{22}$$

В формуле (22) интегрирование ведется по плоскости $z = 0$ (ρ и ψ — полярные координаты точки на этой плоскости, $\boldsymbol{\rho} = (\rho,\, \psi)$, $dS = \rho d\rho d\psi$, θ и ϕ — полярные координаты точки на критической поверхности, в которой рассчитывается резонансное поле), $E_0^{(r)}(\boldsymbol{\rho})$ — радиальная компонента вакуумного поля электромагнитного пучка на плоскости $z = 0$ (определенная в формуле (5)), а константа A и функции $K_{am}(\rho)$ и $K_{ph}(\rho)$ получены при разложении на сомножители функции $f(\rho)$ ($if(\rho) = AK_{am}(\rho)K_{ph}(\rho)$) и определяются соотношениями

$$A = \frac{\exp\left[i\left(\phi_0 - \frac{1}{4}\pi\right)\right]}{\sqrt{2\pi}(k_0 r_0)(k_0 L)^{1/2}}, \quad K_{am}(\rho) = \Phi_D(\rho_j/r_{am}), \quad K_{ph}(\rho) = \exp\left[i\frac{k_0\rho_j^2}{2r_{ph}}\right]. \tag{23}$$

Функция $K_{ph}(\rho)$ имеет единичную амплитуду, а ее фаза квадратична по ρ, поэтому ее естественно интерпретировать как квадратичный фазовый корректор, т.е. тонкую линзу с фокусным расстоянием r_{ph}. Ясно, что параметр r_{ph} описывает влияние дефокусировки электромагнитного пучка в плазменной короне на распределение резонансного поля (а в случае, когда вакуумная ось пучка не проходит через центр плазменного шара, и его рефракцию в короне); в случае, когда дефокусировка пучка и рефракция лучей в короне несущественна, имеем $r_{ph} = r_0 = \text{const}$.

Функция $K_{am}(\rho)$ вещественна, ее величина близка к 1 при $\rho \approx r_{am}$ и мала при $\rho \ll r_{am}$ и $\rho \gg r_{am}$ (это следует из известных свойств функции Денисова [1,2]). Поэтому ее естественно интерпретировать как амплитудный корректор (т.е. как диафрагму с плавно изменяющейся по поверхности прозрачностью). Ясно, что амплитудный корректор $K_{am}(\rho)$ описывает влияние прицельного параметра луча на эффективность возбуждения резонансного поля этим лучем (что же касается влияния рефракции лучей в короне на возбуждение резонансного поля, то, как показано в [14], этого влияния нет).

Обсуждение результатов

Полученые в итоге проведенного рассмотрения формулы (19), (22) позволит свести расчет резонансного поля, возбуждаемого электромагнитным пучком на сферической критической поверхности, к вычислению двухкратного (в худшем случае) интеграла типа скалярного интеграла Кирхгофа (22). Техника вычисления подобных интегралов хорошо разработана [4,5], поэтому с вычислительной точки зрения задача расчета резонансного поля становится тривиальной.

В случае осесимметричного эллиптическиполяризованного пучка, вакуумная ось которого проходит через центр плазменного шара, интегрирование по переменной ψ в (22) осуществляется в общем виде, что позволяет определить зависимость резонансного поля от азимутального угла ϕ. Нетрудно, например, убедиться, что в случае линейной поляризации пучка в направлении угла ϕ_0 имеем $|\Phi_{res}(\theta,\,\phi)|^2 = |\Phi(\theta)|^2\cos^2(\phi-\phi_0)$, причем $\Phi(\theta) = 0$ при $\theta = 0$, т.е. распределение резонансного поля на критической поверхности имеет "гантелеобразную" форму (ось "гантели" направлена в направлении поляризации падающей волны). В случае циркулярной поляризации падающего на плазменный шар пучка $|\Phi_{res}(\theta,\,\phi)|^2 = |\Phi(\theta)|^2$, причем $\Phi(\theta) = 0$ при $\theta = 0$, т.е. распределение интенсивности резонансного поля становится осесимметричным и напоминает кольцо.

Но для понимания качественных особенностей распределения резонансного поля наиболее полезным оказывается промежуточный результат (18)–(20) о совпадении угловой диаграммы распределения резонансного поля на критической поверхности (19) с диаграммой направленности фиктивного скалярного пучка (20), задаваемого своим полем на апертуре $z = 0$ (18). Это связано с тем, что качественно связь апертурного поля пучка и его диаграммы направленности хорошо изучена [4,5] и достаточно прозрачна.

Из (18)–(20) нетрудно вывести, например, формулу для интегрального коэффициента резонансного поглощения пучка. Для этого достаточно учесть, что мощность резонансного поглощения определяется интегралом по углам от $|\Phi_{res}(\theta,\,\phi)|^2$ и тем же интегралом определяется мощность пучка $u^{(sp)}$ (если находить ее через поле пучка на бесконечности). Но ту же мощность фиктивного пучка можно отыскивать и путем интегрирования интенсивности пучка $u^{(sp)}$ по апертуре $z = 0$, что позволяет связать мощность резонансного поглощения с вакуумным апертурным полем нашего электромагнитного пучка. В итоге получаем для интегрального коэффициента резонансного поглощения формулу

$$Q^{(res)} = \frac{1}{2}\frac{\iint K_{am}^2(\rho)|E_0^{(r)}(\boldsymbol{\rho})|^2 dS}{\iint |\mathbf{E}_0(\boldsymbol{\rho})|^2 dS}, \tag{24}$$

полученную другим способом и подробно обсужденную в [14]. Легко заметить, что коэффициент резонансного поглощения равен половине вакуумной мощности радиально-поляризованной компоненты пучка, проходящей (в вакууме) через плоское кольцо, лежащее в плоскости $z = 0$. Центр кольца совпадает с центром плазменного шара, а радиусы (внутренний и внешний) порядка r_{am}. Это означает, что для пучков, вакуумная ось которых проходит через центр шара, коэффициент резонансного поглощения максимален для пучков, вакуумный радиус которых вблизи центра плазменного шара примерно равен r_{am} (для эллиптически поляризованного пучка максимальное значение коэффициента поглощения равно 20–25% в зависимости от поперечного профиля пучка, для TH-пучка — в два раза больше). При этом $r_{am} \ll r_0$ (при $k_0 L \gg 1$) и даже небольшое отклонение оси пучка от центра шара может привести к значительному изменению мощности резонансного поглощения.

Кроме того, приняв во внимание известные [1] свойства функции Денисова, нетрудно заметить, что амплитудный корректор $K_{am}(\rho)$ в (23) осуществляет "мягкое" (без резких границ) диафрагмирование фиктивного пучка в плоскости $z = 0$, причем радиус этой "диафрагмы" примерно равен r_{am}. Вспомнив известное соотношение между радиусом фокального пятна пучка и шириной его диаграммы направленности на бесконечности, нетрудно понять, что независимо от характеристик падающей волны угловой масштаб неоднородности резонансного поля на критической поверхности не может быть меньше $1/k_0 r_{am}$, что соответствует линейному масштабу $\lambda_0 (k_0 L)^{1/3} \gg \lambda_0$.

Учитывая, что ни амплитудный, ни фазовый корректор в (23) не относятся к числу оптических элементов, приводящих к появлению мелкомасштабных неоднородностей поля, можно сделать вывод о том, что в процессе возбуждения резонансного поля не происходит дополнительного (по отношению к вакуумному полю) изрезания амплитудного профиля волны. В резонансном поле проявляются только те мелкомасштабные неоднородности, которые уже присутствовали в вакуумном поле волны (или появились при распространении в турбулентной плазменной короне), да и то в "урезанном" виде — неоднородности резонансного поля с линейным масштабом меньше $\lambda_0 (k_0 L)^{1/3}$ подавляются.

Более того, мелкомасштабная неоднородность вакуумного поля электромагнитного пучка вблизи центра плазменного шара способна приводить к расширению угловой диаграммы распределения резонансного поля на критической поверхности (по той же самой причине, по которой уменьшение диаметра фокального пятна пучка приводит к расширению его диаграммы направленности). При характерном масштабе поперечной неоднородности вакуумного поля пучка вблизи центра плазменного шара порядка l ширина угловой диаграммы резонансного поля не может быть меньше $1/k_0 l$. Из сказанного следует, что метод RRP [15] может рассматриваться как эфективный метод повышения однородности резонансного прогрева мишени в лазерном термоядерном синтезе без существенного снижения мощности резонансного поглощения.

Расширять угловую диаграмму распределения резонансного поля можно и путем острой фокусировки пучка в центр плазменного шара, но при этом значительно снижается коэффициент резонансного поглощения. Избежать этого снижения можно путем фокусировки пучка на плоскость $z = 0$ в фокальное пятно с диаметром d меньше или порядка (желательно много меньше) r_{am}, причем центр фокального пятна должен находиться на расстоянии примерно $r_{am} \ll r_0$ от центра шара. В этом случае угловой размер резонансного поля на критической поверхности будет не меньше $1/k_0 d$ (т.е. не меньше угла фокусировки падающего на плазменный шар электромагнитного пучка), а коэффициент резонансного поглощения будет примерно равен $0.5\cos^2\gamma$, где γ — угол между направлением поляризации линейно-поляризованного пучка и направлением сдвига его фокуса от центра плазменного шара. Этим методом можно либо сильно ослабить резонансное поглощение электромагнитного пучка (при $\gamma = 90°$), либо увеличить его примерно в два раза (при $\gamma = 0°$ по сравнению с максимально возможной мощностью резонансного поглощения для пучков, вакуумная ось проходит через центр шара.

Автор благодарен А.Д. Пилии и Е.Э. Гусакову за интерес к работе и конструктивную критику и А.А. Андрееву за ценные консультации.

Список литературы

[1] *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
[2] *Голант В.Е., Пилия А.Д.* // УФН. 1972. Т. 14. С. 413.
[3] *Бухман Н.С.* // Физика плазмы. 1991. Т. 17. С. 185.
[4] *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982.
[5] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.*Теория волн. М.: Наука, 1979.
[6] *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
[7] *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1973.
[8] *Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П.* Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989.
[9] *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
[10] *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Мир, 1979.
[11] *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
[12] *Бухман Н.С.* Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. С. 912.
[13] *Омельченко О.М., Панченко В.И., Степанов К.Н.* Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 1484.
[14] *Бухман Н.С.* Об интегральном коэффициенте поглощения пучка электромагнитных волн на критической поверхности радиально-неоднородного плазменного шара. ЖТФ (в печати).
[15] *Тихончук В.Т.* // УФН. 1991. Т. 16(1). С. 129.