

01;03;05

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ АККУМУЛИРОВАНИЯ ТЕПЛА В ОДНОМЕРНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ

© А.В.Кузнецов

Технический университет, Вена, Австрия
(Поступило в Редакцию 30 марта 1995 г.)

Анализируется оптимальное управление процессом аккумуляции тепла в одномерном пористом слое, первоначально находящимся при постоянной температуре, потоком несжимаемой жидкости или газа, имеющим более высокую температуру. В качестве критерия оптимизации рассмотрено количество тепловой энергии, аккумуляции в слое. Это тепло необходимо максимизировать при условии заданного количества тепла, которое может быть передано потоку, фильтрующемуся через пористый слой, и при заданной длительности процесса. В качестве управления рассматривается температура потока жидкости (газа) при входе в слой.

Введение

Одно из важных приложений пористые среды находят в системах аккумуляции тепловой энергии. Расчет процессов тепло- и массопереноса в пористых телах важен для повышения эффективности работы таких систем. Поэтому неудивительно, что моделированию процессов тепло- и массопереноса в пористых средах уделено достаточно большое внимание в современной зарубежной литературе. В работах [1-4] рассматривается и численно исследуется весьма общая система дифференциальных уравнений, описывающая вынужденную конвекцию жидкости или газа через пористое тело в условиях отсутствия теплового равновесия между жидкой (газообразной) и твердой фазами. Для учета этого неравновесия используется двухфазная модель пористого тела, которая включает два уравнения энергии (одно для жидкой и одно для твердой фазы). Основываясь на этой модели, в работе [5] численно исследуются некоторые энергетические характеристики процесса аккумуляции тепла в пористом теле, а в работе [6] анализируется разница между температурами фаз, которая возникает в рамках двухфазной модели.

Большинство аналитических работ, посвященных исследованию, в рамках двухфазной модели, прогрева или охлаждения пористых тел

используют модель пористой среды, предложенную Т. Шуманном [7]. В модели Шуманна рассматривают течение через пористое тело несжимаемой жидкости (газа) и пренебрегают членами, описывающими теплоперенос теплопроводностью в обеих уравнениях энергии, как для жидкой (газообразной), так и для твердой фаз. В настоящей работе мы будем придерживаться этой модели и существенно использовать следующие допущения: жидкая (газообразная) фаза несжимаема и расход в любом поперечном сечении пористого слоя постоянен; теплофизические свойства жидкой (газообразной) и твердой фаз неизменны; теплоперенос и поток жидкости (газа) одномерны; теплоперенос теплопроводностью пренебрежимо мал как в твердой, так и в жидкой (газообразной) фазах.

Как следует из [8], уравнения, описывающие распределение температуры в жидкой и твердой фазах при этих допущениях, могут быть записаны в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \phi - \theta \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \theta - \phi. \quad (1)$$

Здесь безразмерные температуры твердой и жидкой (газообразной) фаз определены соответственно как

$$\theta = \frac{T_s - T_1}{T_2 - T_1}, \quad \phi = \frac{T_f - T_1}{T_2 - T_1},$$

где T_s — температура твердой фазы; T_f — температура жидкой фазы; T_1 и T_2 — произвольные постоянные температуры, выбранные из соображений удобной нормировки.

Например, если $T_s(0, 0) \neq T_f(0, 0)$, то можно выбрать $T_1 = T_s(0, 0)$ и $T_2 = T_f(0, 0)$.

Безразмерное время и координата в уравнениях (1) определены следующим образом:

$$t = \frac{hat{a}t'}{(1 - \epsilon)\rho_s c_s}, \quad (2)$$

$$z = \frac{haz'}{\epsilon \rho_f c_p f v}, \quad (3)$$

где a — удельная поверхность контакта твердой и жидкой (газообразной) фаз, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, h — коэффициент теплообмена между частичками пористого слоя и жидкой (газообразной) фазой, t' — время, v — скорость потока жидкости (газа), z' — координата, ϵ — пористость, ρ — плотность.

Аналитические решения уравнений (1) при различных граничных условиях содержатся в работах [9–13]. В работе [14] с помощью преобразования Лапласа получено решение для случая, когда температура жидкости (газа) при входе в пористый слой зависит от времени. Система (1) решалась при следующих начальных и граничных условиях:

$$\theta(z, 0) = \theta_0(z) \quad \phi(0, t) = \phi_{in}(t). \quad (4)$$

После несложных преобразований решение, полученное в [14], можно представить в виде

$$\theta(z, t) = \exp(-z) \int_0^{t-\Lambda z} \phi_{in}(t - \Lambda z - \tau) \exp(-\tau) I_0(\sqrt{4\tau z}) d\tau + \exp(\Lambda z - t) \times \\ \times \left[\theta_0(z) + \int_0^z \theta_0(z - \xi) \exp(-\xi) \left(\frac{t - \Lambda z}{\xi} \right)^{1/2} I_1[\sqrt{4\xi(t - \Lambda z)}] d\xi \right], \quad (5)$$

$$\phi(z, t) = \exp(\Lambda z - t) \int_0^z \theta_0(z - \xi) \exp(-\xi) I_0[\sqrt{4\xi(t - \Lambda z)}] d\xi + \exp(-z) \times \\ \times \left[\phi_{in}(t - \Lambda z) + \int_0^{t-\Lambda z} \phi_{in}(t - \Lambda z - \tau) \exp(-\tau) \left(\frac{z}{\tau} \right)^{1/2} I_1(\sqrt{4\tau z}) d\tau \right], \quad (6)$$

где

$$\Lambda = \frac{\varepsilon \rho_f c_{pf}}{(1 - \varepsilon) \rho_s c_s},$$

I_ν — модифицированная функция Бесселя порядка ν .

Уравнения (5), (6) определяют температуру твердой и жидкой (газообразной) фаз в точке пористого слоя с координатой z после того, как туда дошло тепловое возмущение, т. е. при $t \geq \Lambda z$. Поскольку в рассматриваемой модели пренебрегают теплопереносом теплопроводностью, то до этого момента температура твердой фазы остается равной начальной, задаваемой функцией $\theta_0(z)$ в первом из уравнений (4).

Постановка и решение задачи оптимального управления

Рассмотрим одномерный пористый слой с безразмерной толщиной L ($L = haL'/\varepsilon \rho_f c_{pf} v$, где L' — толщина слоя), начальная температура которого постоянна по толщине. Тем самым безразмерная начальная температура $\theta(z, 0) = \theta_0(z) = 0$, если константы T_1 и T_2 выбраны, как оговорено выше. Такой выбор начальных условий существенно упрощает уравнения (5) и (6), поскольку второе слагаемое в правой части уравнения (5) и первое слагаемое в правой части уравнения (6) становятся тождественно равными нулю.

Пусть безразмерная температура жидкости (газа) при входе в слой при $z = 0$ задана некоторой функцией времени $\theta_{in}(t)$. Из-за наличия температурной разности между фазами температура жидкости (газа) на выходе из слоя при $z = L$ будет несколько выше, чем температура твердой фазы в этой же позиции. Иными словами, часть тепла, которое могло бы быть аккумулировано пористым слоем, выбрасывается с потоком жидкости (газа), покидающим слой. Для повышения эффективности работы систем: аккумулирования тепловой энергии важно найти способ минимизации этих потерь тепла, или, иными словами, максимизации части тепла, аккумулированной в пористом слое.

Поставим следующую оптимальную задачу. При заданном количестве теплоты E , передаваемом нагревателями потоку жидкости, (газа) и при заданной длительности процесса t_f требуется максимизировать количество тепла, аккумулированной слоем. В качестве управления рассмотрим безразмерную температуру жидкости (газа) при входе в слой $\phi_{in}(t)$, которая, по нашему предположению, есть некоторая кусочно-непрерывная функция времени и может изменяться от некоторого минимального значения u_{min} , соответствующего температуре жидкости (газа) в "холодном кране" до некоторого максимального значения u_{max} , соответствующего температуре жидкости (газа) в "горячем кране".

Математически данная задача может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти максимум функционала

$$\Phi(\phi_{in}) = \int_0^L \theta(z, t_f) dz \rightarrow \max, \quad (7)$$

где функция $\theta(z, t_f)$ задана уравнением (5), при следующих ограничениях:

$$\int_0^{t_f} \phi_{in}(\tau) d\tau = E = \text{const}, \quad (8)$$

$$u_{min} \leq \phi_{in}(t) \leq u_{max}. \quad (9)$$

Чтобы привести задачу (7)–(9) к форме задачи оптимального управления, необходимо преобразовать функционал (7). Для этого сначала запишем выражение (5) для функции $\theta(z, t)$ при $t = t_f$, преобразовав его при помощи следующей замены переменной интегрирования:

$$\tau^* = t_f - \tau - \Lambda z. \quad (10)$$

С учетом замены (10) и существенным использованием предположения о постоянстве начальной температуры слоя (выбор констант T_1 и T_2 был оговорен выше) уравнение (5) при $t = t_f$ примет вид

$$\theta(z, t_f) = \exp(-z) \int_0^{t_f - \Lambda z} \phi_{in}(\tau^*) \exp(-t_f + \tau^* + \Lambda z) I_0 \left[\sqrt{4(t_f - \tau^* - \Lambda z)z} \right] d\tau^*. \quad (11)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(z, \tau) = \begin{cases} \exp(-z - t_f + \tau + \Lambda z) I_0 \left[\sqrt{4(t_f - \tau - \Lambda z)z} \right], & \text{если } 0 \leq \tau \leq t_f - \Lambda z, \\ 0, & \text{если } \tau > t_f - \Lambda z. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда, используя уравнения (11) и (12) и меняя порядок интегрирования, функционал (7) можно представить в виде

$$\Phi(\phi_{in}) = \int_0^L \theta(z, t_f) dz = \int_0^{t_f} \phi_{in}(\tau) \Xi(\tau) d\tau \rightarrow \max, \quad (13)$$

где

$$\Xi(\tau) = \int_0^L \Psi(z, \tau) dz.$$

Задача (13), (8), (9) представляет собой задачу оптимального управления с изопериметрическим условием (8) и областью управления, задаваемой неравенством (9). Эта задача может быть решена с помощью принципа максимума (в гамильтоновой) или принципа минимума (в лагранжевой) форме [15-18]. Применение этой теоремы приводит к следующему соотношению, из которого может быть найдено оптимальное управление $\hat{\phi}_{in}(t)$:

$$\hat{\phi}_{in}(t) \left[\lambda_1 - \Xi(t) \right] \rightarrow \min, \quad (14)$$

где λ_1 — множитель Лагранжа.

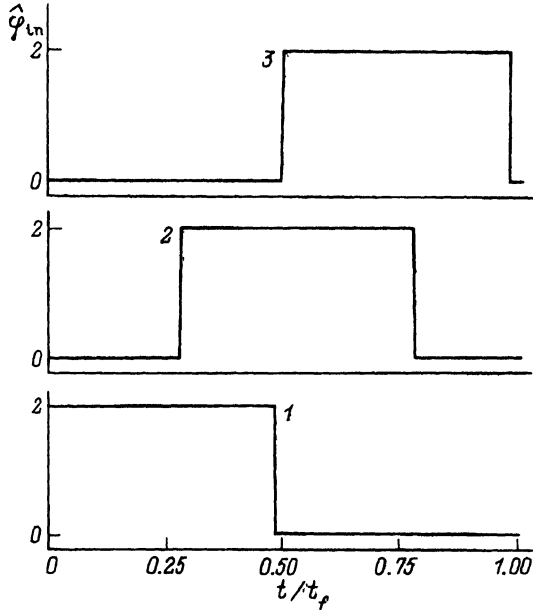
Условие (14), используемое с учетом ограничения (9), позволяет определить оптимальное управление $\hat{\phi}_{in}(t)$. Действительно, из него следует следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{in}(t) &= u_{\min} \quad \text{при} \quad \lambda_1 - \Xi(t) > 0, \\ \hat{\phi}_{in}(t) &= u_{\max} \quad \text{при} \quad \lambda_1 - \Xi(t) < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для использования соотношений (15) необходимо определить значение множителя Лагранжа λ_1 . Для этого необходимо численно решить интегральное уравнение (8) с учетом уравнения (15).

Решение этой задачи проводилось следующим образом: задавался отрезок, внутри которого заведомо содержится искомое значение λ_1 , и далее использовался алгоритм нахождения корня нелинейных и трансцендентных уравнений на заданном отрезке, причем в качестве такого уравнения рассматривалось уравнение (8).

На рисунке представлены графики оптимальных управлений $\hat{\phi}_{in}(t)$, при различной длительности процесса t_f для следующих значений параметров: $u_{\min} = 0$, $u_{\max} = 2$, $E = T_f$, $L = 1$, $\Lambda = 0.05$. Как следует из этого рисунка, при малой длительности прогрева ($t_f = 0.08$) оптимальная температура $\hat{\phi}_{in}(t)$ вначале равна максимальному значению u_{\max} , а затем минимальному u_{\min} . С увеличением длительности прогрева ($t_f = 0.2$) происходит качественное изменение поведения оптимальной температуры: вначале $\hat{\phi}_{in}(t)$ равна минимальному значению, затем максимальному, а затем вновь минимальному. При дальнейшем увеличении длительности прогрева ($t_f = 2$) это качественное поведение сохраняется, однако третий участок, когда оптимальная температура вновь равна минимальной, становится все меньше. При значениях



Оптимальные зависимости $\hat{\phi}_{in}(t)$ при различных длительностях прогрева.
 t_f : 1 — 0.08, 2 — 0.2, 3 — 2.

параметров, использованных для расчета рисунка, переход от первого типа поведения оптимальной температуры (максимум-минимум) ко второму (минимум-максимум-минимум) происходит при $t_f = 0.09913$.

Интересно сравнить значение функционала $\Phi(\hat{\phi}_{in})$ на оптимальных функциях, показанных на рисунке, и на функциях $\hat{\phi}_{in}^*(t) = 1$, соответствующих постоянной по времени входной температуре жидкости (газа). Нетрудно проверить, что при значениях E , которые использованы для расчета рис. 1, функции $\hat{\phi}_{in}^*(t) = 1$ также удовлетворяют изопериметрическому условию (8). Расчеты приводят к следующим соотношениям: при $t_f = 0.08$ $\Phi(\hat{\phi}_{in})/\Phi(\hat{\phi}_{in}^*) = 1.320$ (выигрыш в количестве аккумулированного тепла при использовании оптимального распределения $\hat{\phi}_{in}(t)$ по сравнению с постоянным $\hat{\phi}_{in}^*$ составляет 32.0%), при $t_f = 0.2$ $\Phi(\hat{\phi}_{in})/\Phi(\hat{\phi}_{in}^*) = 1.119$ (выигрыш составляет 11.9%), при $t_f = 2$ $\Phi(\hat{\phi}_{in})/\Phi(\hat{\phi}_{in}^*) = 1.305$ (выигрыш составляет 30.5%). Тем самым выбор оптимального управляющего воздействия позволяет аккумулировать в пористом слое большее количество тепла. Подчеркнем, что это достигается за счет уменьшения количества тепла, которое выбрасывается из пористого слоя вместе с потоком жидкости (газа), покидающим слой через границу $z = L$.

Выводы

1. Предложена процедура оптимизации процесса прогрева одномерного пористого слоя из условия максимизации количества тепловой энергии, аккумулированной в слое. В качестве управления рассматривалась температура потока жидкости (газа) при входе в пористый слой.

2. Показано, что при увеличении длительности прогрева происходит качественное изменение поведения оптимальной температуры жидкости (газа) при входе в пористый слой. При малой длительности прогрева оптимальная температура вначале равна максимальному значению, а затем минимальному. При большей длительности прогрева оптимальная температура, напротив, вначале равна минимальному значению, затем максимальному и вновь минимальному. При дальнейшем увеличении длительности прогрева это качественное поведение сохраняется, однако третий участок, когда оптимальная температура вновь равна минимальной, становится все меньше.

Автор благодарен фонду им. А. Гумбольдта, в рамках исследовательской стипендии которого была выполнена данная работа.

Список литературы

- [1] *Vafai K., Sözen M.* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 690–699.
- [2] *Vafai K., Sözen M.* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 1014–1022.
- [3] *Sözen M., Vafai K.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 1990. Vol. 33. P. 1247–1261.
- [4] *Amiri A., Vafai K.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. Vol. 37. P. 939–954.
- [5] *Sözen M., Vafai K., Kennedy L.A.* // J. Thermophys and Heat Transfer. 1991. Vol. 37. P. 623–630.
- [6] *Kuznetsov A.V.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 1994. Vol. 37. P. 3030–3033.
- [7] *Schumann T.E.W.* // J. of Franklin Institute. 1929. Vol. 208. P. 405–416.
- [8] *Карслоу Х.С., Егер Д.К.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
- [9] *Arpaci V.S., Clark J.A.* // Advances in Cryogenic Engineering. 1962. Vol. 7. P. 419–432.
- [10] *Hung F.T., Nevins R.G.* // ASME paper N 65-HT-10. 1965.
- [11] *Jang W.J., Lee C.P.* // ASME paper N 74-WA/HT-22. 1974.
- [12] *Burch D.M., Allen R.W., Peavy B.A.* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1976. Vol. 98. P. 221–225.
- [13] *Riaz M.* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1977. Vol. 99. P. 489–492.
- [14] *White H.C., Korpela S.A.* // Solar Energy. 1979. Vol. 23. P. 141–144.
- [15] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976. 392 с.
- [16] *Лейтман Дж.* Введение в теорию оптимального управления. М., 1968. 190 с.
- [17] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М., 1969. 408 с.
- [18] *Иоффе А.Д., Титомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974. 480 с.