01;03;05;09

ТОКОВАЯ ВОЛНА ПРИ УДАРНОМ СЖАТИИ ВЕЩЕСТВА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© *С.Д.Гилев, Т.Ю.Михайлова*

Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
(Поступило в Редакцию 7 марта 1995 г.)

Решена задача о структуре токового слоя, возникающего при пеерходе ударно сжатого вещества в проводящее состояние в магнитном поле. Совместное влияние диффузии магнитного поля и конвективного переноса вещества с полем приводит по мере движения ударного фронта к качественным изменениям электромагнитной картины. Характерным для класса электродинамических задач с движением волновых фронтов проводимости является расщепление ударного фронта и "волны" тока. Решение определяется значениями магнитного поля на границах проводящей зоны и слабо зависит от начальных условий. Для широкого класса граничных условий электромагнитная картина в ударно сжатом веществе определяется единственным безразмерным параметром. Характер полученных решений принципиально отличается от классических задач диффузии магнитного поля.

Введение

Распространение ударной волны (УВ) в конденсированном веществе сопровождается изменением физических свойств сжимаемого материала. Кардинальные изменения электропроводности, в том числе переход диэлектрик–металл, зафиксированы в УВ для многих веществ [1,2]. Как следует из общих соображений, переход в металлическое состояние присущ всем диэлектрикам при достаточно сильном сжатии. В настоящее время отсутствует анализ электродинамических процессов в веществе, изменяющем проводимость под действием УВ, в магнитном поле. Результаты таких исследований имеют как фундаментальное, так и прикладное значение. С одной стороны, изменение проводимости является универсальным эффектом, сопровождающим сжатие всех веществ в УВ. С другой стороны, возможно создание новых методов диагностики УВ, а также использование ударно индуцированных волн проводимости в системах трансформации, передачи и коммутации электромагнитной энергии [3–5].

Целью настоящей работы является анализ макроструктуры токового слоя, возникающего при переходе ударно сжатого вещества в проводящее состояние в магнитном поле.

Постановка задачи

Пусть имеем область в виде полупространства, заполненную непроводящим веществом. В начальный момент времени $t = 0$ в область входит плоская УВ, вызывающая переход вещества из непроводящего состояния в проводящее (рис. 1). Пусть D — скорость фронта УВ, U — массовая скорость, σ — удельная электропроводность вещества за фронтом УВ. Ударная волна движется вдоль оси x в области с поперечным магнитным полем. Магнитное поле вне проводящей области однородно, равно $B = f(t)$ до ударного фронта и $B = g(t)$ за проводящей областью. Здесь $f(t)$, $g(t)$ — заданные функции времени.

Примем следующие допущения: 1) УВ является плоской, а геометрия тока одномерной; 2) массовая скорость U пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света; 3) УВ стационарна; 4) вещество является немагнитным и неполяризуемым; 5) ударный фронт не имеет толщины, проводимость вещество изменяется мгновенно за фронтом УВ и в дальнейшем от времени не зависит.

Задача состоит в нахождении для $t > 0$ магнитного поля и распределения тока в проводящем слое вещества.

Рассмотрим задачу в системе отсчета, связанной с движущимся веществом. Пусть $x = 0$ соответствует границе проводящей области, не связанной с ударным фронтом (в дальнейшем будем называть эту границу задней). В рамках сделанных допущений магнитное поле в проводящей области $0 \leqslant x \leqslant (D-U)t$ удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \sigma}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Краевые условия задачи выражают непрерывность магнитного поля на границах проводящей области

$$B\Big((D-U)t, t\Big) = f(t), \tag{2}$$

$$B(0,t) = g(t). \tag{3}$$

Условие непрерывности магнитного поля на фронте УВ (2) вытекает из допущения о пренебрежении структурой ударного фронта и ступен-

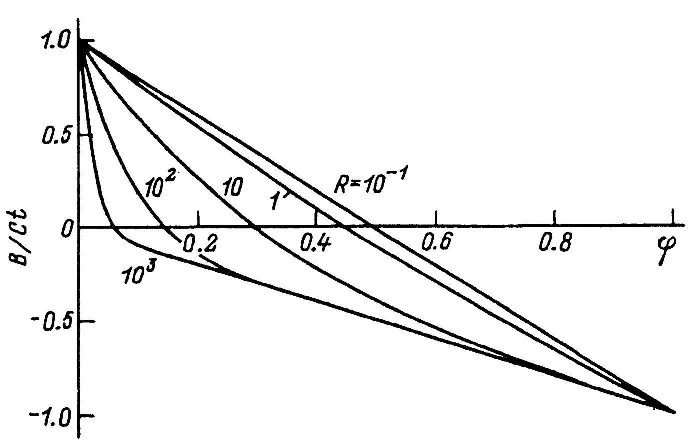

Рис. 1.

чатого изменения проводимости сразу же за фронтом УВ. Отметим, что в начальный момент времени проводящая область отсутствует и функция $B(x,t)$ может иметь разрыв при $x = 0$.

Несмотря на классическую простоту постановки, подобная задача, насколько нам известно, ранее в литературе не рассматривалась. Метод решения краевых задач с подвижными границами на основе тепловых потенциалов [6] приводит к системе интегральных уравнений типа Вольтерра. Этот путь связан с большими техническими сложностями, крайней громоздкостью и явной непрактичностью решения в виде функциональных рядов. Вместе с тем задача допускает простое аналитическое решение, наглядность которого позволяет выявить физический смысл явления.

Общий метод решения задачи

Сначала представим решение задачи в виде суммы решений краевых задач с нулевым значением магнитного поля поочередно на одной из границ проводящей зоны

$$B(x,t) = B_1(x,t) + B_2(x,t).$$

Здесь $B_1(x,t)$ и $B_2(x,t)$ — решения уравнения диффузии с граничными условиями соответственно,

$$B_1(0,t) = 0, \qquad B_1\Big((D-U)t, t\Big) = f(t) \tag{4}$$

и

$$B_2(0,t) = g(t), \qquad B_2\Big((D-U)t, t\Big) = 0. \tag{5}$$

Идея решения задачи основана на расширении области значений величин x, t от треугольной формы, определяемой прямыми $x = 0$ и $x = (D-U)t$ до четверти плоскости.

Для первой краевой задачи, определяемой граничными условиями (4), будем искать решение в области $x > 0$, $t > 0$. Решение краевой задачи

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} = 0, \tag{6}$$

$$B_1(0,t) = 0, \qquad B_1(x,0) = b_1(x) \tag{7}$$

может быть построено с помощью функции Грина и имеет следующий вид:

$$B_1(x,t) = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2\mu_0\sigma}{4t}} \int_0^\infty b_1(\eta)\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta x\mu_0\sigma}{2t}\, e^{-\frac{\eta^2\mu_0\sigma}{4t}}\,d\eta. \tag{8}$$

Здесь $b_1(x)$ — неизвестная функция при $t = 0$. Требуя, чтобы (8) давало известную функцию $f(t)$ на ударном фронте, получим интегральное уравнение на $b_1(x)$

$$\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{\pi t}} \int_0^\infty b_1(\eta)\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta(D-U)\mu_0\sigma}{2}\, e^{\frac{\eta^2\mu_0\sigma}{4t}}\,d\eta = f(t)\, e^{\frac{t(D-U)^2\mu_0\sigma}{4}}. \tag{9}$$

Для решения уравнения (9) осуществим над ним преобразование Лапласа. Введем обозначения для изображений Лапласа, соответствующих оригиналам,

$$V(p) = L\left[b_1(t)\,\mathrm{sh}\,\frac{t(D-U)\mu_0\sigma}{2}\right], \qquad F(p) = L[f(t)].$$

Из обобщенной теоремы об умножении образов имеем

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty b_1(\eta)\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta(D-U)\mu_0\sigma}{2}\,e^{\frac{\eta^2}{4t}}\,d\eta\right] = \frac{1}{\sqrt{p}}V\left(\sqrt{p}\right).$$

Таким образом можно получить следующее простое соотношение между образами:

$$\mu_0\sigma V(p) = pF\left(\frac{p^2}{\mu_0\sigma} - \frac{(D-U)^2\mu_0\sigma}{4}\right). \tag{10}$$

Выражение (10) дает возможность по заданной функции $f(t)$ найти образ $V(p)$. Выполняя над последним обратное преобразование Лапласа, найдем функцию $b_1(x)$, а значит, и решение (8), которое при $0 \leqslant x \leqslant (D-U)t$ является решением первой краевой задачи.

Для решения второй краевой задачи (уравнение диффузии с граничными условиями (5)) используется тот же метод. Осуществляя ряд преобразований, сведем задачу к постановке (6), (7). Таким образом можно найти решение второй краевой задачи

$$B_2(x,t) = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2\mu_0\sigma}{4t}}\int\limits_0^\infty b_2(\eta)\,\mathrm{sh}\,\frac{\eta[t(D-U)-x]\mu_0\sigma}{2t}\,e^{-\frac{\eta^2\mu_0\sigma}{4t}}\,d\eta.$$

Требуя, чтобы $B_2(x,t)$ принимала на задней границе проводящей области значение $g(t)$, получим соотношение между лапласовскими образами

$$\mu_0\sigma W(p) = pG\left(\frac{p^2}{\mu_0\sigma}\right),$$

где использованы обозначения для образов

$$W(p) = L\left[b_2(t)\,\mathrm{sh}\,\frac{t(D-U)\mu_0\sigma}{2}\right], \qquad G(p) = L\Big[g(t)\Big].$$

Таким образом может быть построено решение исходной задачи (1)–(3). Отметим, что поскольку в настоящем методе используются прямое и обратное преобразование Лапласа, то решение краевой задачи может быть получено, строго говоря, не для любых функций $f(t)$, $g(t)$. Необходимым и достаточным условием возможности построения решения является существование конечного предела фукнций $f(t)$, $g(t)$ при $t \to 0$. Вместе с тем сформулированные ограничения являются совершенно естественными и оправданными с точки зрения физической реальности и возможностей экспериментальной техники.

Степенна́я зависимость граничного магнитного поля

Изложенный выше общий метод может быть применен для анализа постановок с различными зависимостями граничных магнитных полей от времени. Достаточно общим и важным случаем является степенна́я зависимость магнитного поля $f(t) = At^{\mu}$, $g(t) = Bt^{\nu}$ ($\mu \geqslant 0, \nu \geqslant 0$). Распределение магнитного поля в проводящей области для этого случая имеет вид для первой краевой задачи

$$B_1(x,t) = At^{\mu} 2^{\mu+1/2} R^{-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{\varphi^2 R}{4}} \int\limits_0^{\infty} \eta^{\mu+1/2} I_{\mu-1/2(\sqrt{R}\eta)} \frac{\operatorname{sh}(\varphi\sqrt{R}\eta)}{\operatorname{sh}(\sqrt{R}\eta)} e^{-\eta^2} d\eta, \tag{11}$$

для второй краевой задачи

$$B_2(x,t) = Bt^{\nu} \frac{2^{2\nu+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} e^{-\frac{\varphi^2 R}{4}} \int\limits_0^{\infty} \eta^{2\nu} \frac{\operatorname{sh}[(1-\varphi)\sqrt{R}\eta]}{\operatorname{sh}(\sqrt{R}\eta)} e^{-\eta^2} d\eta. \tag{12}$$

Здесь $I_{\mu}(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\varphi = x/(D-U)t$, $R = \mu_0\sigma(D-U)^2 t$. Величина φ представляет собой безразмерную координату. Для проводящей области $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, причем в каждый момент времени, $\varphi = 1$ соответствует фронту УВ. Из (11), (12) видно, что магнитное поле в проводящей области определяется значениями магнитного поля на соответствующих границах и двумя безразмерными параметрами φ и R. Для заданного закона изменения граничного поля распределение магнитного поля по проводящей области зависит лишь от одного безразмерного параметра R.

Выясним смысл величины R. Параметр R можно представить в виде отношения времени электромагнитной диффузии θ в проводящем слое ударносжатого вещества к времени движения УВ t по этому слою $R = \theta/t$, где $\theta = \mu_0\sigma x_0^2$, x_c — текущая толщина проводящего слоя. Толщина проводящего слоя нарастает со временем $x_c = (D-U)t$. Таким образом, параметр

$$R = \mu_0\sigma(D-U)^2 t \tag{13}$$

характеризует соотношение двух физически значимых времен настоящей задачи. Если $R \ll 1$, то электромагнитное состояние вещества является равновесным. Если $R \gg 1$, то электромагнитное состояние вещества существенно неравновесно.

Таким образом, электромагнитная картина в проводящем слое вещества определяется первой степенью величины проводимости и времени, второй степенью разности волновой и массовой скоростей. Характер распределения магнитного поля, даваемый выражениями (11)–(13), принципиально отличается как от классических постановок о диффузии магнитного поля в область металла неизменной толщины [7], приводящих к переменной подобия

$$\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{t}},$$

так и от задач магнитной гидродинамики с движением массы материала как целого [8], дающих в качестве управляющего параметра магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = \mu_0 \sigma U x_0$. Отметим, что введенный параметр R можно рассматривать как обобщение магнитного числа Рейнольдса Re_m для настоящей задачи. В отличие от Re_m параметр R зависит от времени.

Наличие в задаче двух характерных скоростей (волновой и массовой) обусловливает существование разных механизмов изменения магнитного поля: конвективного и диффузионного. Конвективный механизм состоит в переносе вещества относительно ударного фронта. Вещество при сжатии переходит в проводящее состояние, что приводит к захвату части магнитного потока проводящей зоной. Действие конвективного механизма существенно зависит от условий на фронте УВ и его структуры. В настоящей работе структура фронта не рассматривается. Диффузионный механизм приводит к установлению равновесного распределения магнитного поля по веществу.

Решение электродинамической задачи с движением волновых фронтов определяется значениями магнитного поля на границах проводящей зоны и слабо зависит от начальных условий. Это связано с монотонным увеличением текущего размера проводящей области. Если в начальный момент времени уже существует проводящий слой конечной толщины, то для больших времен решение слабо зависит от начального распределения поля в слое.

Характерные особенности рассматриваемой задачи поясним на примере простейших временны́х зависимостей тока, протекающего по проводящему слою. Сразу же отметим как тривиальный случай равенства граничных полей. При сформулированных допущениях движение проводящей области в постоянном магнитном поле не сопровождается появлением каких-либо токов.

Случай постоянного тока

Практически важным является случай постоянства тока в проводящей области. В режиме постоянного тока проводятся измерения электропроводности ударно сжатых веществ [1,2,4,5]. Для того чтобы проанализировать электромагнитную картину в этом случае, положим $f(t) = 0$, $g(t) = B_0$, где B_0 — постоянная. Основываясь на соотношениях (11), (12), нетрудно получить распределение магнитного поля в сжатом веществе

$$B(x,t) = B_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\varphi^2 R}{4}} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{sh}[(1-\varphi)\sqrt{R}\eta]}{\mathrm{sh}(\sqrt{R}\eta)} e^{-\eta^2} d\eta. \tag{14}$$

Зная магнитное поле, можно найти плотность тока

$$j = -\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{t}\frac{\partial B}{\partial \varphi}.$$

На рис. 2 показаны распределения плотности тока в слое ударно сжатого вещества. Здесь использованы переменные $(jt/B_0, \varphi)$, позволя-

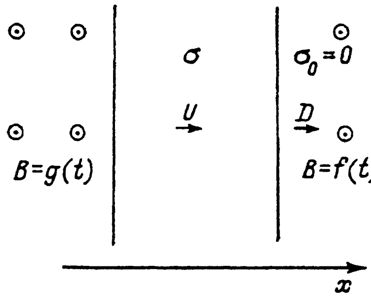

Рис. 2.

ющие наглядно представить распределение тока в большом диапазоне изменения управляющего параметра R.

Совместное влияние эффектов диффузии магнитного поля и конвективного переноса вещества с полем приводит по мере движения ударного фронта к качественным изменениям электромагнитной картины. При $R \ll 1$ ток следует за фронтом УВ, распределяясь равномерно по слою проводящего материала. При $R = 1$ плотность тока непостоянна по сечению вещества, электромагнитное состояние сжатого вещества неравновесно. При $R \gg 1$ ток занимает лишь небольшую часть проводящей области, значительно отставая от ударного фронта. Явление отрыва фронта УВ от "волны" тока характерно для ударно индуцированных волн проводимости с переходом диэлектрик–металл и наблюдается для постановок с различными краевыми условиями. В этом случае конвективный и диффузионный механизмы установления магнитного поля имеют место в существенно разных областях пространства. При $R \to \infty$ распределение магнитного поля в проводящей зоне сводится к

$$B(x,t) = B_0\left(1 - \int_0^{\xi} e^{-\eta^2}\,d\eta\right), \qquad \xi = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu_0\sigma}{t}},$$

что представляет решение классической задачи о диффузии магнитного поля в проводящее полупространство [7].

Как видно из (13), расщепление ударной волны и "волны" тока существенно для большого времени наблюдения или большой электропроводности вещества. Принимая характерные ударно-волновые параметры $D \approx 5 \cdot 10^{13}$ м/с, $U \approx 10^3$ м/с, $t \approx 10^{-6}$ с, получим, что нестационарность электромагнитного состояния вещества становится существенной для проводимости $\sigma \approx 5 \cdot 10^4$ $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, что примерно на три порядка меньше проводимости меди при нормальных условиях. Стандартная техника измерения проводимости [1,2] предполагает наличие электромагнитного равновесия в ударно-сжатом веществе. Как следует из приведенной выше оценки, известная техника не может быть использована для исследования переходов диэлектрик–металл. Достоверная информация об электромагнитных свойствах ударно сжатых веществ может быть получена на основе анализа электродинамики ударно индуцированных волн проводимости в измерительной ячейке.

Линейно растущий ток

Примем зависимости магнитного поля на границах проводящей области в виде $f(t) = -Ct$, $g(t) = Ct$ (C — некоторая постоянная). Распределение магнитного поля в проводящей области имеет следующий вид:

$$B(x,t) = -Ct\varphi + Ct\frac{4}{\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{\varphi^2 R}{4}} \int\limits_0^\infty \eta^2 \frac{\mathrm{sh}[(1-\varphi)\sqrt{R}\eta]}{\mathrm{sh}(\sqrt{R}\eta)}\, e^{-\eta^2}\, d\eta. \qquad (15)$$

На рис. 3 показана серия распределений магнитного поля по толщине проводящего слоя при изменении параметра R на четыре порядка. Особенности изображенных распределений поля легче понять, обратившись к анализу отдельных слагаемых в формуле (15). Второе слагаемое соответствует решению второй краевой задачи (нулевое значение поля на фронте УВ). Характер зависимости $B_2(x,t)$ знаком по предыдущему разделу: при $R \ll 1$ распределение стационарно, при $R \gg 1$ фронт УВ и "волна" тока расщеплены. Отличие состоит в том, что ток в проводящей области возрастает со временем.

Первое слагаемое в (15) соответствует решению первой краевой задачи. Магнитное поле $B_1(x,t)$ изменяется в проводящей области линейным образом. Плотность тока в слое вещества $0 \leqslant x \leqslant (D-U)t$ постоянна и равна $j(x,t) = C$. Такой характер решения является необычным для ударно индуцированных волн проводимости. Равномерное распределение тока в данном случае обусловлено подобным характером изменения размера проводящей области и магнитного поля на фронте УВ. Линейно растущее во времени магнитное поле вследствие его непрерывности на фронте волны заполняет линейно растущую проводящую область. В этом частном случае со специальным видом граничных условий нестационарное уравнение диффузии имеет стационарное решение.

Распределение магнитного поля в проводящей области, даваемое формулой (15), при $R \ll 1$ является линейным, что соответствует равномерному заполнению области током. При $R \gg 1$ плотность тока

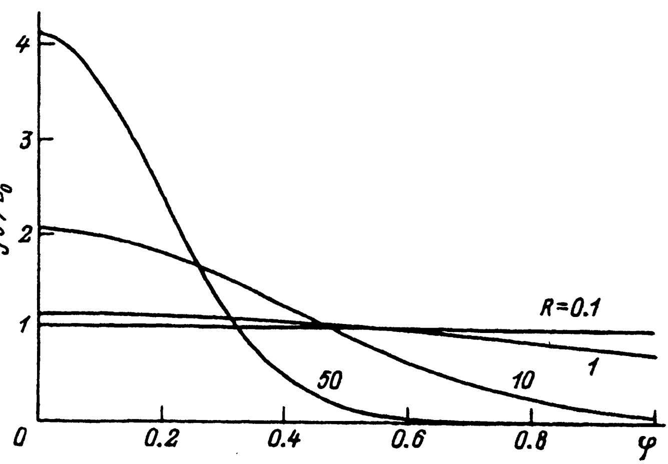

Рис. 3.

в части области, примыкающей к фронту, постоянна. Вблизи задней границы области, как видно из рис. 3, сосредоточено резкое изменение магнитного поля. Растущее магнитное поле диффундирует с поверхности в глубь проводящего материала. При этом вблизи задней границы сосредоточен ток, который не успевает растекаться по всей проводящей области. При равенстве по модулю коэффициентов линейной зависимости магнитного поля при $R \approx 1$ происходит отрыв от фронта УВ половины тока, текущего в данный момент в области.

Случай линейно растущего тока или близкий к нему реализуется при использовании вещества с переходом в проводящее состояние в качестве управляющего элемента электрической цепи [5]. В начальном состоянии элемент находится в положении "выключено", ток через него не идет. В момент прихода управляющего импульса давления элемент включается, в цепи появляется ток. Поскольку реальный ход изменения тока в электрической цепи можно представить в виде степенного ряда по времени, то линейно растущее слагаемое может служить неплохим приближением для анализа процессов в энергетических системах с токовыми ключами, управляемыми УВ. Более точное описание явления возможно с учетом следующих членов ряда и использования полученных решений (11), (12).

Таким образом, общий метод решения проблемы и рассмотренные характерные случаи позволяют выявить закономерности класса явлений механики электромагнитных сплошных сред, связанного с движением волновых фронтов проводимости в конденсированном веществе. Непрерывность и отсутствие характерного времени изменения магнитного поля на границах проводящей области обеспечивает существование единственного управляющего параметра R.

Авторы выражают благодарность за полезные обсуждения Е.И.Биченкову, А.М.Трубачеву.

Работа выполнена при частичной поддержке грантом № 94-02-04022 Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

[1] *Styris D.L., Duvall G.E.* // High Temp.-High Pres. 1970. Vol. 2. N 5. P. 477–499.
[2] *Килер Р.* // Физика высоких плотностей энергии. М.: Наука, 1974. С. 120–143.
[3] *Гилев С.Д., Трубачев А.М.* // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 15. С. 914–917.
[4] *Гилев С.Д., Трубачев А.М.* // ПМТФ. 1988. № 6. С. 61–67.
[5] *Биченков Е.И., Гилев С.Д., Трубачев А.М.* // ПМТФ. 1989. № 2. С. 132–145.
[6] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
[7] *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
[8] *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967.