

01;03;07

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ДИФФУЗИИ ИОНОВ ПРИ КОНВЕКЦИИ РАСПЛАВОВ СТЕКОЛ В СМАЧИВАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

© Л.М.Могилева

Научно-исследовательский и технологический институт
оптического материаловедения Всероссийского научного центра
“ГОИ им. С.И. Вавилова”,
199034 Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 18 января 1995 г.
В окончательной редакции 21 апреля 1995 г.)

Получение градиентных оптических элементов большого диаметра (порядка 1 см) может быть основано на процессе конвективной диффузии ионов в расплавах стекол. Приведена математическая модель этого процесса, опирающаяся на приближение Буссинеска и использующая в качестве граничного условия для вектора скорости условие прилипания. В предположении большой кинематической вязкости (малого числа Рэлея) приведен алгоритм получения первой конвекционной поправки в выражении для концентрации легкой компоненты смеси. Эта модель более точно описывает процесс высокотемпературной взаимодиффузии ионов в стеклах, чем закон Фика, который не объясняет растекания, наблюдаемого в эксперименте при этих условиях.

Введение

Технологический процесс изготовления градиентных линз диаметром порядка 1 см с радиальным распределением показателя преломления может быть основан на процессе взаимодиффузии ионов между полым цилиндром из стекла с низким показателем преломления и коаксиально расположенным стержнем из стекла с высоким показателем преломления при температурах выше T_g наиболее тугоплавкого стекла [1] (широко распространенный способ ионообменной обработки размягченных стекол в расплавах солей пригоден для волоконных градиентных элементов диаметром порядка нескольких миллиметров и не позволяет получать цилиндрические образцы большого диаметра из-за чрезвычайной длительности процесса).

Преобладающее влияние конвекции при высокотемпературной ионной диффузии было отмечено еще в [2]. Однако при исследованиях таких процессов в стеклах старались избегать режимов, связанных с конвекцией [2-4]: в работе [3] образцы изучались в невесомости, а в [4] исследован аксиальный перепад показателя преломления.

В результате высокотемпературного ионного обмена в цилиндрической области Ω , проведенного в поле силы тяжести, получается двумерное распределение концентрации и, следовательно, показателя преломления: радиальное и осевое. Такие (двумерные) распределения успешно рассматривались в электронной оптике [5]. Для оптимизации результирующего распределения в качестве управляющих параметров (помимо химического состава исходных стекол) можно использовать размеры цилиндров (высоту и начальные радиусы), время и температуру реакции.

В работе [6] была предложена аналитическая модель конвективной диффузии ионов в расплавах стекол. В данной работе будет изложено решение задачи конвективной ионной диффузии с условиями прилипания.

Постановка задачи

Распределение концентрации одного диффузанта (более легкого) в приближении Буссинеска [7] определяется системой дифференциальных уравнений, которая здесь выписана в переменных вихрь-функция тока для цилиндрической системы координат (r, z) ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + v \frac{\partial \omega}{\partial z} = \nu \left(\frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) + \frac{g\beta}{r} \frac{\partial c}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r^2 \omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial c}{\partial r} - v \frac{\partial c}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь неизвестными являются отклонение $c(t, r, z)$ от средней в цилиндре $\Omega = \{(r, z) : 0 < r < R, 0 < z < H\}$ концентрации легкого диффузанта, вихрь $\omega(t, r, z)$ и функция тока $\psi(t, r, z)$. Через u и v обозначены радиальная и аксиальная составляющие поля скоростей \mathbf{v} , поэтому

$$\omega = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -rv, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = ru. \quad (4)$$

Коэффициент концентрационного расширения β , кинематическую вязкость ν , коэффициент взаимодиффузии D считаем постоянными и заданными; \mathbf{g} — ускорение свободного падения. Поскольку реакция проходит при постоянной температуре (образец в течение нескольких часов выдерживается в безградиентной печи [4]), то мы предполагаем, что она прекращается сразу же при понижении температуры до уровня T_g , и пользуемся уравнениями (1)–(3) без учета температурных изменений.

Краевые условия на концентрационную функцию c будут иметь вид

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5)$$

$$c|_{t=0} = c_0(r, z). \quad (6)$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω . Начальное условие для поля скоростей задается в виде

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0(\nu^{-1}), \quad (7)$$

а граничное условие в случае смачивания стекольным расплавом стенок $\partial\Omega$ цилиндрической формы представляет собой так называемое условие прилипания

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8)$$

В терминах переменных вихрь-функция тока условие (8) означает, что

$$\psi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Метод решения

Опишем решение сформулированной выше краевой задачи для случая медленного ("ползущего") течения, которое характеризуется большой вязкостью. Тогда разложим искомые функции по малому параметру ν^{-1}

$$c = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{-i} c^{(i)}, \quad \omega = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{-i} \omega^{(i)}, \quad \psi = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{-i} \psi^{(i)}, \quad (10)$$

причем

$$\omega^{(i)} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial z} - \frac{\partial v^{(i)}}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} = -r v^{(i)}, \quad \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial z} = r u^{(i)}. \quad (11)$$

Так как в силу начального условия (7) $\mathbf{v}^{(0)} = 0$, то

$$\omega^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Подставив разложения (10) в систему (1)–(3), получим уравнения относительно $c^{(i)}$, $\psi^{(i)}$ и $\omega^{(i)}$. В частности, для $c^{(0)}$, $\psi^{(1)}$ и $\omega^{(1)}$ будем иметь

$$0 = \frac{3}{r} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{g\beta}{r} \frac{\partial c^{(0)}}{\partial r}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial z^2} = r^2 \omega^{(1)}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial c^{(0)}}{\partial t} = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial c^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial z^2} \right). \quad (15)$$

Функция $c^{(0)}$ при начальной концентрации вида

$$c_0(r, z) = \begin{cases} c_1 = \text{const} & \text{при } 0 < r \leq r_0, \\ c_2 = \text{const} & \text{при } r_0 < r < R \end{cases} \quad (16)$$

(что соответствует ионной диффузии между двумя coaxialными цилиндрами, состоящими из стекол различных марок) определяется рядом [1]

$$c^{(0)}(t, r) = \frac{2r_0(c_1 - c_2)}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_m r_0)}{\beta_m J_0^2(\beta_m R)} \exp(-\beta_m^2 Dt) J_0(\beta_m r), \quad (17)$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно,

$$\beta_m : J_1(\beta_m R) = 0. \quad (18)$$

Выразим $\omega^{(1)}$ из (14) через $\psi^{(1)}$ и подставим это выражение в (13). Тогда получим дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $\psi^{(1)}$ (далее индекс (1) опущен)

$$L\psi \equiv \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^3} \right) + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} = rg\beta \frac{\partial c^{(0)}}{\partial r}. \quad (19)$$

Левую часть (19) удобно разбить на три слагаемых

$$L\psi = rL_1\psi + L_2\psi + L_3\psi, \quad (20)$$

где

$$L_1\psi = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right),$$

$$L_2\psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4}, \quad L_3\psi = 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right).$$

Сначала выберем базисные функции $\varphi_{m,k}$, по которым затем будем раскладывать функцию тока ψ .

Рассмотрим задачу на собственные значения самосопряженного дифференциального оператора L_1 с нулевыми краевыми условиями (с весом r^{-1})

$$L_1\varphi^{(1)} = r^{-1}\gamma^4\varphi^{(1)}, \quad \varphi^{(1)} \Big|_{r=0,R} = d\varphi^{(1)}/dr \Big|_{r=0,R} = 0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид $r[aJ_1(\gamma r) + bY_1(\gamma r) + cI_1(\gamma r) + dK_1(\gamma r)]$. Если в точке $r = 0$ брать только $\varphi^{(1)} \sim r^2$ (чтобы было правильным в нуле поведение функции $v = -r^{-1}\partial\psi/\partial r$), то $b = d = 0$. Из граничных условий заключаем, что собственными числами этой задачи будут числа γ_m , удовлетворяющие уравнению

$$J_1(\gamma_m R)I_0(\gamma_m R) = I_1(\gamma_m R)J_0(\gamma_m R) \quad (21)$$

(ср. с уравнением колебаний остроконечного стержня [8]), а собственными функциями — функции

$$\varphi_m^{(1)}(r) = \frac{r}{R} \left[\frac{J_1(\gamma_m r)}{J_1(\gamma_m R)} - \frac{I_1(\gamma_m r)}{I_1(\gamma_m R)} \right], \quad (22)$$

причем $\|\varphi_m^{(1)}\|_{L_2(0,R),r^{-1}} = 1$, $m \geq 1$.

Аналогично рассмотрим задачу

$$L_2 \varphi^{(2)} = \delta^4 \varphi^{(2)}, \quad \varphi^{(2)} \Big|_{z=0,H} = d\varphi^{(2)}/dz \Big|_{z=0,H} = 0.$$

Ее собственными числами будут δ_k

$$\operatorname{ch} \delta_k H \cos \delta_k H = 1, \quad (23)$$

а собственными функциями

$$\varphi_k^{(2)}(z) = [B_k(\operatorname{ch} \delta_k z - \cos \delta_k z) - A_k(\operatorname{sh} \delta_k z - \sin \delta_k z)] / (B_k H^{1/2}), \quad (24)$$

где

$$k \geq 1, \quad A_k = \operatorname{ch} \delta_k H - \cos \delta_k H, \quad B_k = \operatorname{sh} \delta_k H - \sin \delta_k H. \quad (25)$$

Разложим функцию тока в ряд (26)

$$\psi(r, z) = \sum_{m,k=1}^{\infty} \psi_{m,k}(t) \varphi_{m,k}(r, z), \quad (26)$$

где $\varphi_{m,k}(r, z) = \varphi_m^{(1)}(r) \varphi_k^{(2)}(z)$.

После подстановки этого ряда в дифференциальное уравнение (19) и скалярного умножения обеих его частей на функции $\varphi_{m,k}(r, z)$ в функциональном пространстве $L_2(\Omega, r^{-1})$ имеем

$$\psi_{j,l}(t)(\gamma_j^4 + \delta_l^4) - 2 \sum_{m,k=1}^{\infty} \psi_{m,k}(t) \gamma_m^2 \delta_k^2 Q_{m,j}^{(1)} Q_{k,l}^{(2)} = T_{j,l}(t), \quad (27)$$

где

$$T_{j,l}(t) = \frac{-8r_0 g \beta (c_1 - c_2)}{H^{1/2} R^2} \frac{(1 - (-1)^l) A_l}{\delta_l B_l} \times \\ \times \gamma_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma_j^4 - \beta_n^4} \frac{J_1(\beta_n r_0)}{J_0(\beta_n R)} \exp(-\beta_n^2 D t), \quad (28)$$

$$Q_{m,j}^{(1)} = \begin{cases} \frac{J_0(\gamma R)}{J_1(\gamma R)} \left(\frac{J_0(\gamma R)}{J_1(\gamma R)} - \frac{2}{\gamma R} \right), & \text{если } \gamma_j = \gamma_m = \gamma, \\ \frac{4\gamma_j^2}{R(\gamma_m^4 - \gamma_j^4)} \left(\gamma_j \frac{J_0(\gamma_j R)}{J_1(\gamma_j R)} - \gamma_m \frac{J_0(\gamma_m R)}{J_1(\gamma_m R)} \right), & m \neq j, \end{cases} \quad (29)$$

$$Q_{k,l}^{(2)} = \begin{cases} (-A_l^2 H + 2A_l B_l \delta_l^{-1}) / (B_l^2 H), & \text{если } k = l, \\ 4\delta_l^2 (\delta_k^4 - \delta_l^4)^{-1} (1 + (-1)^{k+l}) (\delta_k A_k B_l - \delta_l B_k A_l) / (B_k B_l H), & k \neq l. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, получили линейную алгебраическую (бесконечную) систему уравнений второго рода относительно функций $\psi_{j,l}(t)$, правая часть которой — известная функция от t , а “матрица” (4-мерная) не зависит от t . Отсюда

$$\psi_{(m,k)}(t) = \sum_{(j,l)} \alpha_{(m,k),(j,l)} T_{(j,l)}(t) = \frac{-8r_0 g \beta (c_1 - c_2)}{H^{1/2} R^2} \times \\ \times \sum_{(j,l)} \alpha_{(m,k),(j,l)} \frac{(1 - (-1)^l) A_l}{\delta_l B_l} \gamma_j^2 \sum_n \frac{\beta_n}{\gamma_j^4 - \beta_n^4} \frac{J_1(\beta_n r_0)}{J_0(\beta_n R)} \exp(-\beta_n^2 D t), \quad (31)$$

где $\alpha_{(m,k),(j,l)}$ — элементы “матрицы” оператора, обратного по отношению к оператору системы (27).

Пользуясь затем соотношениями (11), легко получить выражение для первой (по вязкости) поправки $v^{(1)}$ скорости течения. Ее подстановка в уравнение

$$\frac{\partial c^{(1)}}{\partial t} = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial c^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 c^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 c^{(1)}}{\partial z^2} \right) - u^{(1)} \frac{\partial c^{(0)}}{\partial r} - v^{(1)} \frac{\partial c^{(0)}}{\partial z} \quad (32)$$

и скалярное умножение в пространстве $L_2(\Omega, r)$ обеих частей на функции $g_{j,l}$, где

$$g_{j,l}(r, z) = \xi_{j,l} J_0(\beta_j r) \cos \frac{\pi l}{H} z, \\ \xi_{j,l} = \frac{2}{RH^{1/2} J_0(\beta_j R)} \begin{cases} 2^{-1/2}, & \text{если } l = 0, \\ 1, & \text{если } l \geq 1, \end{cases} \quad (33)$$

дает обыкновенное дифференциальное уравнение относительно проекций $c_{j,l}^{(1)}(t)$ функции $c^{(1)}(t, r, z)$ на базисные функции $g_{j,l}(r, z)$. Решениями этих дифференциальных уравнений будут функции вида

$$c_{j,l}^{(1)}(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{j,l,m,n} [\exp(-(\beta_m^2 + \beta_n^2)Dt) - \exp(-B_{j,l}Dt)], \quad (34)$$

где $B_{j,l} = \beta_j^2 + (\pi l/H)^2$,

$$S_{j,l,m,n} = -\frac{128r_0^2 g \beta (c_1 - c_2)^2 \xi_{j,l}}{H R^5 D (B_{j,l} - \beta_m^2 - \beta_n^2)} \frac{\beta_n J_1(\beta_n r_0) J_1(\beta_m r_0)}{J_0(\beta_n R) J_0^2(\beta_m R)} \times \\ \times \sum_{m',m''=1}^{\infty} \sum_{\substack{k',k''=1 \\ k',k'' \neq odd}}^{\infty} \alpha_{(m',k'),(m'',k'')} \frac{(\pi l/H)^2 \delta_{k'}^2 A_{k''}}{\delta_{k''} B_{k''} (\delta_{k'}^4 - (\pi l/H)^4)} \frac{\gamma_{m''}^2}{\gamma_{m''}^4 - \beta_n^4} \times \\ \times \left[\int_0^R J_1(\beta_m r) \frac{J_1(\gamma_m, r)}{J_1(\gamma_m, R)} J_0(\beta_j r) r dr - \int_0^R J_1(\beta_m r) \frac{I_1(\gamma_m, r)}{I_1(\gamma_m, R)} J_0(\beta_j r) r dr \right].$$

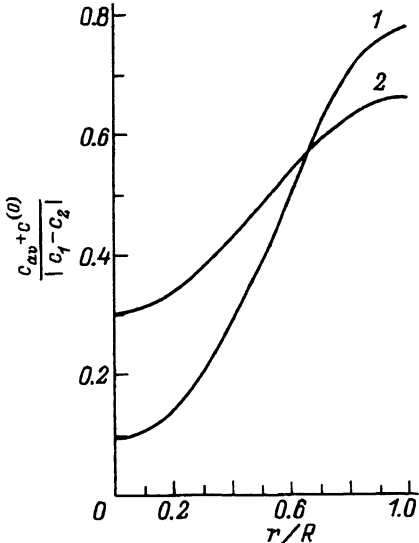


Рис. 1. Зависимость диффузионной составляющей $(c_{av} + c^{(0)})/|c_1 - c_2|$ от приведенного радиуса r/R . 1 — при $\tau = 0.10$, 2 — при $\tau = 0.20$.

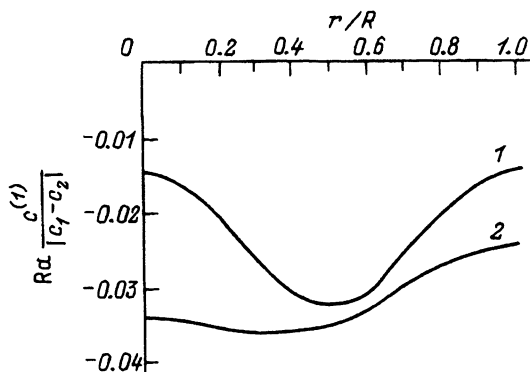


Рис. 2. Зависимость конвекционной поправки $Ra c^{(1)}/|c_1 - c_2|$ от приведенного радиуса r/R на четверти высоты цилиндра. 1 — при $\tau = 0.10$, 2 — при $\tau = 0.20$.

Полную концентрацию (с учетом нулевой и первой конвекционных поправок) будет давать выражение $c^*(t, r, z) = c_{av.} + c^{(0)}(t, r) + \nu^{-1} c^{(1)}(t, r, z)$, где

$$c^{(1)}(t, r, z) = \sum_{\substack{j,l=0 \\ l-\text{odd}}}^{\infty} c_{j,l}^{(1)}(t) g_{j,l}(r, z),$$

$c_{av.}$ — среднее по области Ω значение концентрации легкой компоненты смеси.

Система дифференциальных уравнений (1)–(3), а также краевые условия допускают запись в терминах безразмерных переменных. Приведенный выше метод разложения по малому параметру ν^{-1} будет в этом случае соответствовать разложению по числу Рэлея $Ra = \beta g |c_1 - c_2| R^3 / (\nu D)$ при условии, что число Шмидта $Sc = \nu / D$ достаточно велико.

На рис. 1 и 2 приведены соответственно графики “диффузионной” составляющей $(c_{av.} + c^{(0)})/|c_1 - c_2|$ и “гидродинамической” добавки $Ra c^{(1)}/|c_1 - c_2|$ при $Ra = 300$ и различных значениях приведенного времени $\tau = Dt/R^2$. Время τ измерялось в долях “времени релаксации” $\theta = -(\ln \epsilon) / R^2 / \beta_1^2$ для $\epsilon = 0.001$. Высота цилиндра $H = 3R$, радиус втулки $r_0 = (2/3)R$. В ряде (17) бралось 20 членов, а при расчете по формуле (34) ряды по каждому индексу обрывались на пятом члене.

Оценки конвекционной поправки обосновывают сделанные приближения и показывают применимость предложенного метода в широком диапазоне значений Ra , характеризующих расплавы различных стекол, используемые для изготовления градиентных оптических элементов.

В большинстве практических интересных случаев знания концентрации ионов достаточно для определения показателя преломления образца: например, при взаимном замещении компонентов в бариево-щелочных стеклах зависимость показателя преломления от концентрации выражается дробно-линейной функцией [9]

$$n = \frac{a_1 c^* + a_2}{a_3 c^* + a_4}, \quad (35)$$

где a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — постоянные, зависящие от марок исходных стекол.

На рис. 3 приведено распределение показателя преломления как функции цилиндрических координат, полученное по формуле (35), где $a_1 = 16.639$, $a_2 = 40.512$, $a_3 = 18.421$, $a_4 = 25.496$, что соответствует замене ВаО на К₂О в бариево-щелочных стеклах [10]; функция c^* вычислась при $\tau = 0.1\theta$. Рисунок показывает существенную зависимость показателя преломления от аксиальной координаты, что характеризует влияние конвекции на концентрацию и, следовательно, показатель преломления. Аналитический подход к определению концентрации и показателя преломления позволяет оптимизировать процесс конвективной диффузии, варьируя параметры в широких пределах без существенных затрат машинного времени. Приведенное на рис. 3 распределение представляет собой результат такого оптимизированного по оптическим характеристикам процесса, как показали результаты дальнейших оптических расчетов, оставшихся за рамками данной работы.

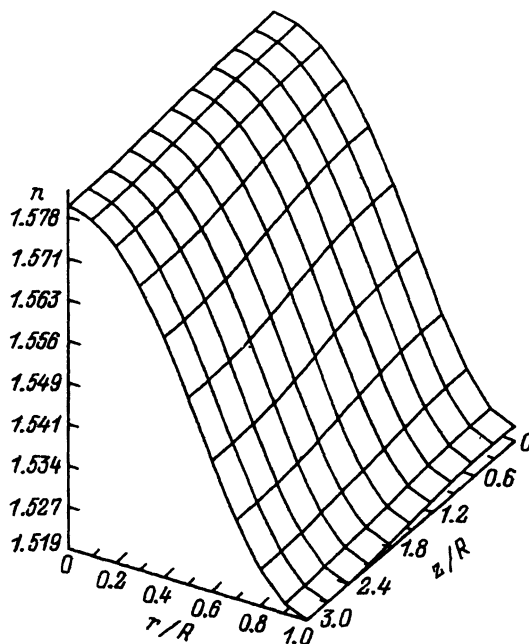


Рис. 3. Распределение показателя преломления как функции цилиндрических координат (r, z).

Предложен численно-аналитический алгоритм решения краевой задачи, описывающей высокотемпературную конвективную диффузию ионов в стеклах при смачивании расплавами стенок цилиндрической формы. По сравнению с методом [6] этот алгоритм более трудоемок, но для учета прилипания необходимо обратиться к предложенному в настоящей работе методу. Однако его реализация на ЭВМ требует лишь однократного обращения матрицы, элементы которой не зависят от временной переменной t , что дает по сравнению с сеточными методами большую экономию машинного времени.

Применимость этого алгоритма определяется величиной числа Рэлея и гладкостью краевых условий.

Изложенный численно-аналитический подход позволяет в широких пределах варьировать параметры процессы конвективной диффузии и тем самым оптимизировать двумерную градиентную среду по оптическим характеристикам.

Автор выражает благодарность Ю.А. Флегонтову за ценные советы и внимание к работе, А.К. Яркинду за предоставление экспериментальных данных и постоянную поддержку, а также признательность И.Р. Петровой за помощь при компьютерной обработке результатов.

Список литературы

- [1] Могилева Л.М. // Физ. и хим. стекла. 1990. Т. 16. № 5. С. 738-741.
- [2] Herr K., Frischat G.H. // J. Non-Cryst. Solids. 1980. Vol. 41. N 1. P. 117-126.
- [3] Beier W., Braedt M., Frischat G.H. // Phys. and Chem. of Glasses. 1983. Vol. 24. N 1. P. 1-4.
- [4] Григорьев В.С., Яркинд А.К., Алаев В.Я. // Физ. и хим. стекла. 1988. Т. 14. № 2. С. 226-231.
- [5] Рустергольц А. Электронная оптика. Основы теоретической электронной оптики. М.: ИЛ, 1952. 264 с.
- [6] Могилева Л.М., Флегонтов Ю.А. // Физ. и хим. стекла. 1994. Т. 20. № 4. С. 483-491.
- [7] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
- [8] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
- [9] Яркинд А.К. // Физ. и хим. стекла. 1987. Т. 13. № 6. С. 886-893.
- [10] Григорьев В.С., Яркинд А.К. // Физ. и хим. стекла. 1988. Т. 14. № 2. С. 308-311.