

01;03;04;05

## ДИНАМИКА НАГРЕВА И ИСПАРЕНИЯ ПРОВОДНИКА ИМПУЛЬСНЫМ ТОКОМ БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТИ

© В.С.Воробьев

Институт высоких температур РАН,  
127412 Москва, Россия  
(Поступило в Редакцию 3 ноября 1994 г.)

Рассмотрена задача о нагреве плоского проводника током при наличии поверхностного испарения. С помощью специального преобразования она сведена к одному уравнению относительно температуры поверхности. Получено приближенное решение этого уравнения. Показано, что на первой стадии нагрев проводника происходит однородно — при постоянной по сечению температуре практически без испарения. С некоторого момента реализуется переход к неоднородному режиму, когда температура поверхности становится ниже температуры в глубине образца. Найдено выражение для определения этого момента времени в зависимости от параметров внешнего электрического контура и теплофизических свойств материала. Рассчитаны температуры в центре и на поверхности для различных диаметров алюминиевого проводника в зависимости от времени при фиксированных параметрах контура. Дано обоснование некоторым ранее известным эмпирическим закономерностям. Найдены условия, при которых результаты плоской задачи могут быть использованы для цилиндрической.

Рассматриваемая задача тесно связана с проблемой электрического взрыва проводников (ЭВП) [1-4]. Эта проблема, несмотря на длинную историю исследований, еще далека от решения. Однако в последнее время для определенных режимов взрывающихся проводников, называемых, согласно известной классификации [5-8], быстрыми, наметился определенный прогресс. Для этих режимов глубина проникновения электрического поля в расплавленный проводник больше радиуса проволоки или половины толщины фольги, поэтому скин-эффект не играет роли. Одновременно плотность тока достаточно высока, так что характерное время нагрева гораздо меньше времени развития неустойчивостей, приводящих к нарушению симметрии формы проводника.

Отмеченный прогресс связан с разработкой методов численного моделирования [9,10], а также с развитием модельных аналитических подходов [11], позволивших обосновать некоторые ранее известные эмпирические закономерности [12-14]. Согласно этим исследованиям, процесс ЭВП можно разбить на этапы. На первом происходит расширение проводника за счет роста температуры, связанного с джоулевой диссипацией энергии. Существенно отметить, что профиль плотности

при этом остается слабонеоднородным, скорость линейно зависит от расстояния от оси, а температура практически однородна. Так происходит до тех пор, пока проводник не начнет испаряться. Испарение начинается в первую очередь на его поверхности. Из-за чрезвычайно резкой зависимости скорости испарения от температуры рост температуры поверхности замедляется, в то время как температура центральных областей проводника продолжает расти в соответствии с растущим током. Формируется неоднородный температурный профиль с более горячими центральными областями. На этом неоднородном фоне при определенных условиях бурно развивается кавитационный процесс, приводящий к резкому росту сопротивления проводника, падению тока и других явлений, характеризующих собственно взрыв проводника.

В настоящей работе исследуется модельная задача о нагреве проводника импульсным током при наличии поверхностного испарения, приводящего к формированию температурного профиля. Рассматривается плоская геометрия. Однако результаты могут быть использованы и для цилиндрической, если характерная длина изменения температуры меньше радиуса проводника. С помощью метода, развитого ранее для описания нагрева и испарения плоской поверхности лазерным излучением [15], получено решение соответствующей однофазной задачи Стефана. Показано, что первоначально однородный нагрев проводника в некоторый момент времени сменяется неоднородным. Температура центральных областей становится выше температуры поверхности. На плоскости безразмерных переменных, зависящих от параметров внешнего электрического контура и теплофизических свойств материала проводника, построено универсальное семейство линий постоянных значений температуры поверхности. На этой же плоскости нанесены линии, отвечающие изменению плотности тока со временем для конкретного внешнего электрического контура. По пересечению последних с линиями постоянных значений температуры поверхности можно судить о динамике процесса нагрева, начале формирования неоднородного профиля температуры. Рассчитаны температуры в центре и на поверхности для различных диаметров алюминиевого проводника в зависимости от времени при фиксированных параметрах контура. Показано, что в определенный момент времени, отвечающий переходу к неоднородному нагреву, эти температуры начинают заметно отличаться. Получена формула для определения этого момента времени. Из нее вытекает ряд следствий, ранее известных как эмпирические закономерности, в частности зависимость времени начала взрыва и так называемого интеграла действия [5,6] от параметров контура и сечения проводника, а также размеры проводника в оптимальном режиме [13-15], когда вся запасенная в колебательном контуре энергия идет на испарение проводника в первом полупериоде тока.

## 1. Постановка задачи. Основные уравнения

Система МГД уравнений в рамках одномерной модели ЭВП приведена в [9,10]. Для нашей цели воспользуемся упрощенным описанием динамики нагрева проводника. В результате нагрева поверхностные слои проводника начинают испаряться и их температура становится ниже температуры осевых областей. Будем считать, что характерный масштаб изменения температуры мал по сравнению с радиусом

проводника. Тогда для описания поведения температуры вблизи поверхности можно использовать плоскую геометрию.

Пусть металл занимает полупространство  $x > 0$  в момент времени  $t = 0$ . В результате испарения поверхность начинает смещаться в сторону положительных  $x$  со скоростью  $v_s$ . В системе координат, в которой она неподвижна, уравнение для изменения температуры будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + v_s \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{j^2}{\sigma \rho c_v}, \quad (1)$$

где  $\chi = \kappa / \rho c_v$  — коэффициент температуропроводности;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $\rho, c_v$  — плотность и теплоемкость проводника,  $\sigma$  — его электропроводность;  $j$  — плотность тока, зависящая от времени, но не зависящая от координаты  $x$ .

Граничное условие для температуры на поверхности  $T|_{x=0} = T_s$  имеет вид

$$\kappa \frac{\partial T_s}{\partial x} = \rho v_s (\Lambda - a R T_s / \mu), \quad (2)$$

где  $\Lambda$  — удельная теплота парообразования,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярный вес.

Постоянная  $a$  в (2) зависит от противодействия окружающей проводник среды [16]. Если противодействие мало (испарение в вакуум), то  $a \cong 0.77$ . При большом противодействии  $a = 0.5$ . Так что влиянием окружающей среды на граничное условие невелико. Характерно, что скорость испарения — чрезвычайно резкая функция температуры поверхности  $T_s$ .

$$v_s = v_0 \exp\left(-\frac{\mu \Lambda}{R T_s}\right), \quad (3)$$

где величина  $v_0$  порядка скорости звука в холодном металле.

Для Al  $v_0 = 7.3 \cdot 10^5$  см/с.

## 2. Однородный нагрев

До тех пор пока испарение несущественно, нагрев проводника происходит однородно. В этом случае пространственные производные в (1) становятся несущественными, и оно имеет очевидное решение

$$\rho c_v (T - T_0) = \int_0^t (j^2 / \sigma) dt', \quad (4)$$

где  $T_0$  — начальная температура,  $T$  — температура однородно нагреваемого проводника.

В неоднородном случае она соответствует температуре вдали от границ проводника и (4) можно представить также в виде

$$\int_{T_0}^T \rho c_v \sigma A^2 dT' = \int_0^t I^2 dt', \quad (5)$$

где  $I(t)$  — ток в цепи;  $A(T)$  — поперечное сечение проводника, зависящее в силу его теплового расширения от температуры.

Левая часть (5) определяется температурной зависимостью теплофизических коэффициентов материала проводника, правая — параметрами контура. Покажем, что (5) зависит от одного безразмерного параметра. Интересующий нас диапазон температур  $T_m < T \ll T_c$ , где  $T_m$  и  $T_c$  — температуры плавления и критическая соответственно. Пусть характерными единицами проводимости, плотности и сечения проводника  $\sigma_m$ ,  $\rho_m$  и  $A_m$  будут значения этих величин при  $T = T_m$ , единицей времени  $\omega_0^{-1}$  — характерное время изменения тока, единицей тока —  $I_0$ , температуры —  $\Lambda\mu/R$ . Для Al значения  $\Lambda\mu/R = 38\,990$  К, а безразмерные температуры плавления, кипения и критическая равны  $T_m \cong 0.024$ ,  $T_b \cong 0.07$  и  $T_c \cong 0.2$ . Тогда, полагая  $c_v = 3R/\mu$  и вводя безразмерные величины  $\sigma' = \sigma/\sigma_m$ ,  $\rho' = \rho/\rho_m$ ,  $\tau = t\omega_0$ ,  $A' = A/A_m$ ,  $I' = I/I_0$ ,  $T' = TR/\Lambda\mu$ , из (5) получим

$$F(T') = \Pi_2 \varphi(\tau)/3, \quad (6)$$

где  $\varphi(\tau) = \int_0^\tau I'^2 dt$ , а  $F(T) = \int_{T_0}^T \rho' \sigma' A' dT'$ , величина

$$\Pi_2 = I_0^2/A_m^2 \sigma_m \rho_m \Lambda \omega_0 \quad (7)$$

хорошо известна в исследованиях ЭВП [12–14].

Это так называемый параметр подобия. Он равен отношению удельной энергии джоулева нагрева за время  $\omega_0^{-1}$  к удельной энергии испарения и характеризует интенсивность нагрева. Отметим, что в (7) он выражен через  $\sigma_m$ ,  $\rho_m$  и  $A_m$  в точке плавления, в то время как в параметре  $\Pi_2^*$ , введенном в [12–14], эти величины берутся для холодного металла. Очевидно, что

$$\Pi_2 = \Pi_2^* (\sigma_0 \rho_0 A_0^2 / \sigma_m \rho_m A_m^2). \quad (8)$$

Формальное решение (6) имеет вид

$$T = F^{-1} (\Pi_2 \varphi(\tau)/3). \quad (9)$$

Ток является заданной функцией времени. Ее конкретный вид определяется внешним электрическим контуром, используемым для нагрева и испарения проводника. В частности, широко используется  $L$ – $C$ –контур. Последний обычно состоит из конденсатора емкостью  $C_0$ , заряженного до большой разности потенциалов ( $u_0 = 1$ – $100$  кВ), и  $L_0$  — индуктивности цепи. Конденсатор разряжается на тонкую металлическую проволочку радиусом  $a \sim 0.001$ – $0.1$  см и длиной  $l \sim 1$ – $10$  см или фольгу соответствующей толщины. Обычно индуктивность  $L_0$  и емкость  $C_0$  таковы, что период свободных колебаний контура в режиме короткого замыкания ( $R = 0$ )  $\tau_0 = \omega_0^{-1} = 2\pi\sqrt{L_0 C_0}$  заключен в пределах  $10^{-5}$ – $10^{-8}$  с. При взрыве проводника, как правило, вплоть до начала кавитации волновое сопротивление контура  $z_0 = (L_0/c_0)^{1/2}$  много больше сопротивления проводника. В этом случае ток в цепи изменяется по закону

$$I = I_0 \sin(\omega_0 t). \quad (10)$$

Используя данные [17] о температурной зависимости теплофизических коэффициентов, можно показать, что для Al произведение  $\sigma_m \rho_m A_m^2$  при переходе от  $T_m$  к температуре  $T \cong 1.2T_b$  увеличится не более чем на 40%. Это вызвано частичной компенсацией температурных зависимостей  $\sigma$  и  $A$  (первая величина уменьшается с ростом  $T$ , а последняя возрастает). Такого рода температурная зависимость теплофизических коэффициентов в рассматриваемой задаче на данном этапе исследований представляется второстепенной и в дальнейшем учитываться не будет. Для тока, меняющегося по закону (10),

$$\Psi(\tau) = \int_0^{\tau} \psi dt = \int_0^{\tau} \sin^2(\tau) d\tau = [2\tau - \sin(2\tau)]/4,$$

где  $\Psi(\tau) = \sin^2(\tau)$ .

Интегрируя (6) в безразмерных единицах получим (штрихи опущены)

$$T = \Pi_2 \varphi(\tau)/3. \quad (11)$$

Из (4) вытекает, что удельная энергия, выделившейся в проводнике к моменту времени  $\tau$ ,  $w = \int_0^{\tau} (j^2/\sigma) dt'$  в единицах  $\rho\Lambda$  может быть записана как  $T = W/3$ .

Проводимость многих металлов в отмеченном интервале температур хорошо исследована экспериментально. В работе [18], например, приведены данные для Al и Cu; результаты исследований других металлов можно найти в [19]. Как показала проверка, эти данные могут быть с хорошей точностью аппроксимированы зависимостью

$$\sigma = \sigma_m / [1 + \beta_1(T - T_m)], \quad T_m < T < T_b, \quad (12)$$

где  $\beta_1 = 3.66 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,  $\sigma_m = 4.29 \cdot 10^4 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ .

При  $T \cong T_b$  значение  $\sigma_b \cong 2.6 \cdot 10^4 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ . Из (12) следует, что зависимость  $\sigma$  от вложенной энергии  $W$  имеет вид

$$\sigma_m/\sigma = 1 + \beta_1[(W/3) - T_m]. \quad (13)$$

Как видно,  $\sigma^{-1}$  линейно зависит от вложенной энергии. Все это справедливо, пока температуры в центре и на краю проводника не начнут различаться. Для нахождения этого момента времени рассмотрим решение неоднородной задачи.

### 3. Решение неоднородной задачи

В общем виде решение неоднородной задачи с учетом температурной зависимости теплофизических коэффициентов построить не удастся. Однако, как было показано выше, он может быть проведен на однородной стадии, когда температура не зависит от координат, а только от времени. Воспользуемся таким способом учета температурной зависимости до моментов времени, пока температуры  $T$  и  $T_s$  не начнут различаться. На неоднородной стадии будем считать теплофизические коэффициенты постоянными, равными значениям, которых они достигают при начале разделения температур.

Проинтегрируем уравнение (1) по  $x$  от 0 до  $\infty$  и воспользуемся граничными условиями (2). Получим

$$\rho c_v \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} T(x, t) dx = -\rho v_s (\Lambda - aRT_s/\mu) + \rho v_s c_v (T - T_s) + \int_0^{\infty} \frac{j^2}{\sigma} dx. \quad (14)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$T(x, t) = T(t) - T^*(x, t), \quad (15)$$

где  $T(t)$  определяется из (3), (4).

Подставляя (15) в (1), убеждаемся, что функция  $T^*$  удовлетворяет уравнению теплопроводности без члена с джоулевым нагревом

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + v_s \frac{\partial T^*}{\partial x}. \quad (16)$$

Используя (15) в интегральном соотношении (14), получим

$$-\rho c_v \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} T^*(x, t) dx = -\rho v_s (\Lambda - aRT_s/\mu) + \rho v_s c_v (T - T_s). \quad (17)$$

Предположим, что известно поведение функции  $T^*$  на границе, т.е. задана  $T_s^*(t)$ . Тогда можно записать общее решение уравнения (16) с таким граничным условием в виде (19)

$$T^*(x, t) = \frac{-\chi^{1/2}}{(\pi)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{T_s^*(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x + \Delta x)^2}{4\chi(t-\tau)} \right] d\tau. \quad (18)$$

Под интегралом (18)  $\Delta x(\tau, t) = \int_{\tau}^t v_s dt'$  — смещение поверхности за счет испарения за время  $t-\tau$ . Из (18) вытекает, что при  $x \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \tau$  величина

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp \left[ -(x + \delta x)^2 / 4\chi(t-\tau) \right] / (t-\tau)^{1/2} \rightarrow \delta(t-\tau)$$

имеет  $\delta$ -образную особенность по времени. Подставим (18) в (17), выполним интегрирование по  $x$ , перейдем от  $T_s^*$  к  $T_s$ , после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho c \chi^{1/2}}{\pi^{1/2}} \int_0^t \frac{d[T - T_s(\tau)]/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{\Delta x^2}{4\chi(t-\tau)} \right] d\tau = \\ = \rho v_s (\Lambda - aRT_s/\mu) - \rho v_s c_v (T - T_s). \end{aligned} \quad (19)$$

Нелинейное интегральное уравнение (19) содержит только одну неизвестную функцию  $T_s(\tau)$  и является решением поставленной задачи. Проанализируем его. Интегральный нестационарный член, стоящий слева, связан с перераспределением температуры за счет теплопроводности. Справа в квадратных скобках записана фактически разность между удельной энергией джоулева нагрева и удельной энергией, идущей на испарение. Отметим, что в работе [9] с помощью аналогичного преобразования получено также уравнение для температуры  $T_s$  при наличии поверхностного источника нагрева. Хотя в обоих случаях рассматривается испарение с поверхности, имеется существенное различие между рассматриваемым здесь объемным тепловыделением и поверхностным. В первом случае предел  $\chi \rightarrow 0$  означает прекращение (2) испарения. При поверхностном источнике возможен бестеплопроводный режим, когда вся энергия, поглощенная в поверхностном слое, целиком идет на испарение (режим развитого испарения [20]). В нашем случае испарение вызвано потоком тепла, идущим из глубины тела на поверхность, и поэтому по постановке задачи испарение возможно только при наличии теплопроводности.

#### 4. Приближенное решение

В широком диапазоне условий выполняется неравенство  $v_s t \ll \sqrt{\chi t}$ . Для Al при температуре кипения  $T_b = 2727$  К величина  $v_s \cong 0.46$  см/с,  $\chi \cong 1$  см<sup>2</sup>/с, для  $t = 10^{-6}$  с оно выполняется с большим запасом. Это позволяет пренебречь экспонентой под знаком интеграла в (19). К этому же результату можно прийти, опустив член с  $v_s$  в уравнении (1), но не в граничном условии (2). В результате после короткого преобразования (19) примет вид

$$T_s(t) = T(t) - (1/\pi\chi c_v)^{1/2} \int_0^t \frac{v_s(\tau)(\Lambda + bRT_s/\mu - 3RT/\mu)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau, \quad (20)$$

где  $b = 3 - a$ .

Перейдем в (20) к безразмерным величинам. Пусть в дополнение к ранее введенным единицей измерения скорости будет  $v_0$ . Получим

$$T_s(t) = T(t) - \sqrt{1/\mu\pi} \int_0^t d\tau \frac{\exp(-1/T_s)(1 + bT_s - 3T)}{(t-\tau)^{1/2}}. \quad (21)$$

В (21) возник еще один, вызванный теплопроводностью безразмерный параметр  $\mu = 9\chi\omega_0/v_0^2$ , представляющий отношение времени, за которое фронт испарения проходит расстояние  $(\chi t)^{1/2}$ , двигаясь с предельной скоростью  $v_0$ , к времени изменения тока  $\omega_0^{-1}$ .

Уравнение, аналогичное (21), исследовалось в работе [16], где рассматривались нагрев и испарение металла под воздействием лазерного импульса. Там же предложена процедура построения приближенного решения таких уравнений. Она справедлива для безразмерной температуры  $T < T_c$  и основана на модификации известного метода разложения экспоненты, широко используемом в теории горения и взрыва.

[21]. Применяя ее к уравнению (21) и опуская подробности вычислений, получим

$$T_s(t) = T + \frac{T_s^2}{f} \ln \left\{ 1 - \frac{f^{1/2} \exp(-1/T_s)(1 + bT_s - 3T)}{T_s \pi^{1/2} \mathcal{R}} \gamma(1/2, g) \right\}, \quad (22)$$

где  $f = 1 - bT_s + bT_s^2/(1 + bT_s - T)$ ,  $g = f(dT/dt)t/T_s^2$ ,

$$\gamma(1/2, g) = \int_0^g \frac{\exp(-u)}{u^{1/2}} du$$

— неполная гамма-функция.

При не слишком малых  $t$  ее аргумент велик, так как  $f/T_s^2 \gg 1$ , и можно использовать  $\gamma \cong \sqrt{\pi}$ .

В (22) величина

$$\mathcal{R} = \left[ (dT/dt)\mu \right]^{1/2} = \left[ \Pi_2 \mu \Psi(\tau) / 3 \right]^{1/2} = \left[ I_0^2 \chi \sin^2(\omega_0 t) / (A_m^2 \sigma_m \rho_m \Lambda v_0^2) \right]^{1/2} \quad (23)$$

зависит от отношения удельной энергии джоулевого нагрева  $j^2/\sigma$  за время  $\chi/v_0^2$  к удельной энергии испарения  $\rho\Lambda$  и характеризует часть джоулевой энергии, затрачиваемой на испарение.

Трансцендентное уравнение (22) дает зависимость температуры поверхности от времени. При малых временах логарифмический член в (22), описывающий испарение, несуществен, нагрев однороден по сечению,  $T_s = T$ . По мере роста температуры испарение начинает играть все большую роль. Когда выражение, стоящее в квадратных скобках в (22), стремится к нулю, логарифмический член становится определяющим. В этом случае температура находится из уравнения

$$\mathcal{R} = f^{1/2} \exp(-1/T_s)(1 + bT_s - 3T)/T_s. \quad (24)$$

Переписывая (24) в размерных единицах, получим

$$v_s(\Lambda\mu/RT_s)f^{1/2}(1 + bRT_s/\Lambda\mu - 3RT/\Lambda\mu) = \left( j^2(t)\chi/3\sigma_m\rho_m\Lambda \right)^{1/2}. \quad (25)$$

При постоянной плотности тока скорость испарения выходит на постоянное значение  $v_s \sim j$ .

Покажем, что выражение (24) для объемного источника тепла в некоторых аспектах соответствует условию для “режима развитого испарения”, хорошо известному при поверхностном нагреве. Последнее при нагреве поверхности, например, лазерным излучением имеет вид  $\rho\Lambda v_s = q$ , где  $q$  — интенсивность лазерного излучения. При объемном тепловыделении аналогичное условие будет иметь вид

$$(j^2/\sigma)\delta l \sim \rho\Lambda v_s, \quad (26)$$

где  $\delta l$  — характерный размер области изменения температуры.



Сначала найдем  $\delta l$  для постоянной скорости перемещения фронта испарения. При теплопроводностном механизме переноса тепла характерный масштаб изменения температуры  $(\chi t)^{1/2}$ , время, за которое фронт проходит это расстояние,  $t \sim \sqrt{\chi t}/v_s$  или  $t \sim \chi/v_s^2$ . Отсюда смещение фронта  $\delta l \sim \chi/v_s$ . Подставляя это  $\delta l$  в (26), получим (25), но без множителя  $(\Lambda\mu/RT_s)$  и, естественно, без поправок  $f^{1/2}$  и  $(1 + bT_s - \dots)$  в правой части (25). Учтем теперь, что скорость  $v_s$  — резкая функция температуры. В этом случае относительные изменения скорости и температуры связаны соотношением  $\Delta v_s/v_s = (\Lambda\mu/RT_s)\Delta T_s/T_s$ , где  $(\Lambda\mu/RT_s) \gg 1$ . Поэтому на длине  $\sqrt{\chi t}$ , где  $\Delta T_s/T_s \sim 1$ , скорость  $v_s$  меняется очень сильно. Заметные изменения скорости ( $\Delta v_s/v_s \sim 1$ ) происходят на существенно меньшей длине  $(RT_s/\Lambda\mu)\sqrt{\chi t}$ . Далее, повторяя рассуждения, проведенные выше для постоянной скорости, получим, что для переменной смещение фронта  $\delta l \sim (RT_s/\Lambda\mu)^2 \chi/v_s$ . Подставляя последнее выражение в (26), получаем (25) с точностью до поправок.

## 5. Результаты решения

Как следует из (22), температура  $T_s$  определяется безразмерными параметрами  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{R}$ . Отметим, что  $\mathcal{T}$  пропорциональна  $\int_0^t j^2(\tau) d\tau$ , а  $\mathcal{R} - j(t)$ . Коэффициенты пропорциональности определяются свойствами материала проводника и параметрами контура. Обе эти величины параметрически зависят от  $t$ . Рассмотрим плоскость  $\mathcal{T}-\mathcal{R}$ . На ней можно построить универсальное семейство линий  $T_s = \text{const}$  (изотерм). Это сделано на рис. 1. Около каждой из изотерм указано соответствующее значение  $T_s$ . Как видно, кривые имеют вертикальные и слабопадающие горизонтальные участки. Вертикальные ветви кривых отвечают решению  $T_s = T$ , т.е. однородному, горизонтальные — описываемому уравнением (24). Переход от одного режима к другому происходит достаточно резко из-за сильной зависимости скорости испарения от температуры. На графике отмечена также критическая температура  $(T_c)$ .

Физически важной величиной является температура  $T_e$ , разделяющая однородное и неоднородное решения. Определим ее из условия, при котором однородное решение  $T_s = T$  переходит в решение, даваемое формулой (24). Поскольку переходная область от одного решения к другому достаточно узка, то приближенно этот момент можно найти по точке пересечения соответствующих решений. Полагая в (24)  $T_s = T = T_e$ , получим зависимость  $\mathcal{R}$  от  $\mathcal{T}$ . Ей на плоскости  $\mathcal{T}-\mathcal{R}$  отвечает штриховая линия  $mm'$ , соответствующая началу разделения температур. Она разделяет плоскость на две области, в которых справедливы однородное и неоднородные режимы. Связь между  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{R}$  на линии  $mm'$  найдем, разрешая (24) относительно  $T_s$ , входящей в показатель экспоненты, получим, полагая  $T_s = T = T_e$ , уравнение для определения  $T_e$

$$T_e = \left[ \ln \frac{f^{1/2}(1 - aT_e)}{T_e \mathcal{R}} \right] = 1/\mathcal{L}, \quad (27)$$

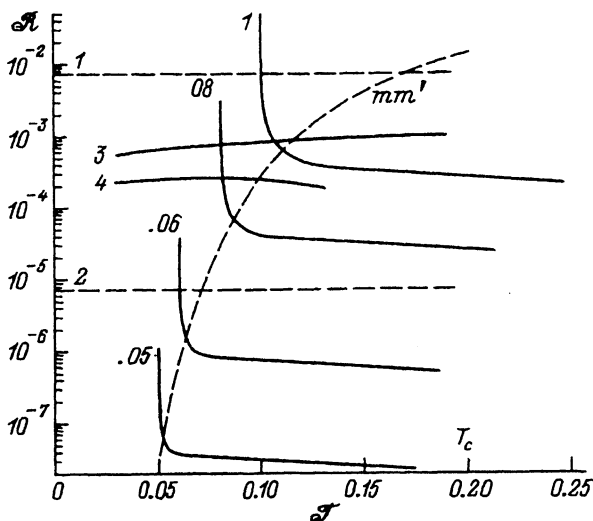


Рис. 1. Плоскость безразмерных  $T$ - $\tau$ .

1, 2 — импульсы тока (1 —  $10^5$ , 2 —  $10^8$  А/см<sup>2</sup>); 3, 4 — импульсы для  $L$ - $C$ -контура из [13, 14].

откуда следует, что безразмерная температура  $T_e$  в момент перехода к неоднородному режиму слабо (логарифмически) зависит от параметров контура, материала проводника, времени.

В этих же координатах можно построить линию  $\mathcal{R}(T)$ , соответствующую реальной зависимости  $j(t)$ . По пересечению этой линии изоэнтальпий и линии  $mm'$  можно судить о динамике нагрева и испарения проводника, начале расслоения температур  $T_s$ ,  $T$  и т.д.

Прежде всего рассмотрим случай  $j = \text{const}$ . Тогда  $\Psi = 1$ , а  $\varphi = \tau$ . На рис. 1 штриховая линия 1 отвечает  $j = 10^5$  А/см<sup>2</sup>, а 2 —  $j = 10^8$  А/см<sup>2</sup>. Этот диапазон плотностей тока характерен для электрического взрыва проводников. Как видно, в первом случае  $T_s$  достигает значений 0, 0..., во втором —  $T_s \cong 0.11$ .

Теперь пусть ток меняется по закону (10). Рассмотрим один из режимов взрыва проводника из Al [13, 14]. Параметры внешнего контура фиксированны и равны  $U_0 = 8$  кВ,  $c_0 = 47.6$  мкф,  $L_0 = 11.8$  мкГ,  $\omega_0 = 4.2 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>. Плотность тока при  $a = 0.21$  мм равна  $j_0 = 1.2 \times 10^7$  А/см<sup>2</sup>. Будем менять радиус проводника. При этом безразмерный параметр  $\mu$  остается фиксированным (его значение для этих параметров контура равно  $\mu = 7.1 \cdot 10^{-6}$ ), а  $\Pi_2$  меняется. Кривая 3 на рис. 1 соответствует  $a = 0.11$  мм,  $\Pi_2 = 27.5$ ; 4 — 0.36 мм,  $\Pi_2 = 0.275$ .

На рис. 2 для того же контура построены безразмерные температуры  $T_s$  и  $T$  в зависимости от безразмерного времени  $t$  для различных значений  $\Pi_2$ . Как видно, сначала  $T_s$  и  $T$  совпадают. Затем кривые резко расходятся.  $T_s$ , определяемая из (24), становится меньше  $T$  и слабее зависит от времени. При больших  $\Pi_2$  температуры нарастают очень резко. Причем для больших  $\Pi_2$  резкий рост начинается в более ранние моменты времени (экспериментальное подтверждение см. в [13]). С уменьшением  $\Pi_2$  он начинается позже и не столь резко. Обратим

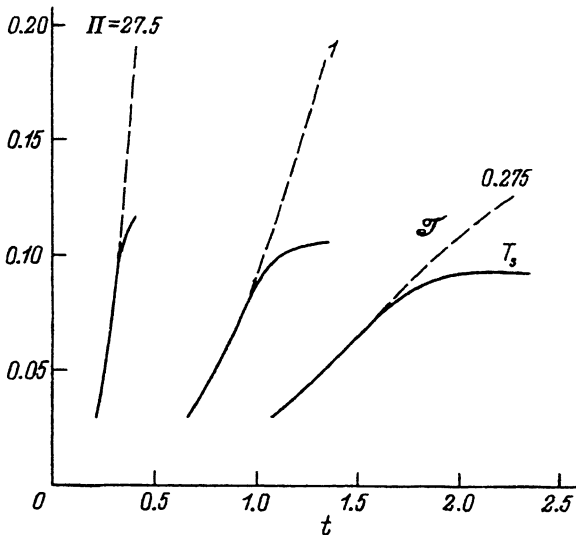


Рис. 2. Зависимость безразмерных  $T$  и  $T_s$  от времени  $t$  для различных значений параметра  $\Pi_2$ .

внимание на очень существенное обстоятельство, вытекающее из этих графиков. Большим значениям  $\Pi_2$  отвечают большие значения температуры  $T$ , соответствующей началу неоднородного нагрева. Действительно, при  $\Pi_2 = 27.5$  температуры  $T_s$  и  $T$  начинают различаться при  $T \cong 0.118$ , в то время как при  $\Pi_2 = 0.275$  такое разделение происходит при  $T \cong 0.097$ . Поскольку  $T$  пропорциональна удельной джоулевой энергии  $W$ , выделившейся в проводнике к моменту времени  $\tau$  (в безразмерных единицах  $W \cong T/3$ ), то это означает, что большим интенсивностям нагрева отвечают и большие энергии  $W$ , соответствующие переходу к неоднородному режиму. Это обстоятельство проливает свет на так называемую аномальную зависимость сопротивления проводника от введенной энергии при ЭВП [8], заключающуюся в том, что резкое возрастание сопротивления начинается раньше при малых скоростях энерговода.

Перенесение результатов, полученных для плоской геометрии, на цилиндрическую оправдано, пока расстояние  $\delta l \ll a$ . Полагая  $\delta l \sim (RT_s/\Lambda\mu)^2 \chi/v_s$ , а из (25)  $v_s \sim (j^2 \chi/3\sigma_m \rho_m \Lambda)^{1/2} (RT_s/\Lambda\mu)$  и представляя плотность тока как  $j = I/\pi a^2$ , получим ограничение на  $a$

$$a \ll (\Lambda\mu/RT_s)I/(\rho\sigma\Lambda\chi)^{1/2}. \quad (28)$$

Для Al величина  $(\rho\sigma\Lambda\chi)^{1/2} \cong 35$  кА/см, а  $(RT_s/\Lambda\mu) \sim 0.1$ . В выше приведенном режиме  $I = 16$  кА, так что неравенство (30) выполняется. Энергия, затрачиваемая на испарение, пропорциональна геометрическому фактору  $2\pi a \delta l$ , а на джоулев нагрев —  $\pi a^2$ . Поэтому (28) одновременно означает малость потерь на испарение в баланс энергии. Здесь проявляется сильное отличие режима нагрева и испарения с объемным источником тепла от режима развитого испарения.

## 6. Момент начала формирования неоднородного профиля температуры

Момент времени  $t_e$ , когда температуры  $T_s$  и  $T$  начинают различаться, означает переход от стадии медленного однородного расширения к стадии интенсивного неоднородного испарения и, собственно говоря, может служить некоторым предвестником начала взрыва. Это утверждение будет тем более точным, чем быстрее начнется кавитационный процесс после образования неоднородного профиля температуры. Проведенные расчеты дают основание для такого предположения. Как видно из рис. 2, вермя, когда  $T$  приближается к  $T_c$ , не сильно превосходит  $t_e$  (особенно при больших  $\Pi_2$ ). Это означает, что в действительности взрыв произойдет в интервале между этими значениями времен. Вместе с тем эти наши расчеты на неоднородной стадии, когда  $T$  составляет заметную долю  $T_c$ , нуждаются в корректировке и могут рассматриваться лишь как ориентировочные. Сама же стадия неоднородного интенсивного вскипания заслуживает отдельного исследования.

Время  $t_e$  определим из формулы (27). Приближенно ассоциируя его со временем начала взрыва, получим ряд следствий, которые были ранее известны как эмпирические или полуэмпирические закономерности.

Воспользуемся (12), (27) и перейдем к размерным единицам, тогда получим, что интеграл

$$\int_0^{t_e} I_0^2 \sin(\omega_0 t) dt = A^2 \rho_m \sigma_m c_v / \mathcal{L} \quad (29)$$

практически не зависит от параметров контура (логарифмической зависимостью от них через величину  $\mathcal{L}$  будем пренебрегать), а определяется только свойствами материала проводника и пропорционален квадрату площади поперечного сечения. Этот факт известен достаточно давно и подтверждался многими исследователями. Интеграл в левой части (29) получил название интеграла действия. Как подчеркивается в [7], указанный характер зависимости интеграла действия для многих металлов был отмечен в широкой области параметров цепи и размеров проводника. Погрешность этой зависимости не превышает примерно 11%.

Из (12), (27) вытекает также, что

$$t_e \omega_0 - \sin(t_e \omega_0) / 2 = 6 / (\mathcal{L} \Pi_2) = 2A^2 \rho_m \sigma_m c_v \omega_0 / (\mathcal{L} I_0^2). \quad (30)$$

Последняя часть формулы (30) записана в размерных единицах. При  $t_e \omega_0 \ll 1$  значение  $t_e \sim A^{2/3}$ . В другом предельном случае  $t_e \omega_0 \gg 1$  величина  $t_e \sim A^2$ . Если  $t_e \omega_0 \sim 1$ , то зависимость  $t_e(A)$  близка к линейной. Этот факт многократно подтвержден экспериментально [22].

Отметим, что формула, близкая к (30), была получена в [13] в рамках тепловой модели электровзрыва. Однако в ней в правой части (30) фигурирует величина  $2/\Pi_2^2(n+1)$ , где  $n$  — показатель степени, входящий в используемую в рамках этой модели формулу для зависимости сопротивления проводника  $R_w$  от температуры ( $R_w = R_w(0)(1 - T/T_c)^{-n}$ ).

Последнее взято по аналогии с поведением удельной электропроводности в окрестности критической температуры и не может считаться обоснованным.

Среди всевозможных типов ЭВП отмечаются оптимальные режимы. При этом вся запасенная в конденсаторе энергия вводится в проводник в первой половине периода тока [13-15]. Для этого крайней мере момент  $t_e$  должен быть близок к моменту максимума тока (напряжение на конденсаторе при этом равно нулю). Полагая в (30)  $t_e = \pi/2$ , получим

$$P_2 = 12/\pi\mathcal{L}. \quad (31)$$

В оптимальном режиме вся запасенная на конденсаторе энергия идет на испарение проводника, т.е.

$$c_0 U_0^2/2 = \rho\Lambda Al, \quad (32)$$

где  $l$  — длина проводника.

Из (31), (32) вытекают соотношения для оптимальных сечения  $A_{opt}$  и длины проводника  $l_{opt}$

$$A_{opt} = \left( \frac{\pi\mathcal{L}}{12} \frac{U_0^2 C_0^{3/2}}{L_0^{3/2} \rho\sigma\Lambda} \right)^{1/2}, \quad (33)$$

$$l_{opt} = U_0(L_0 c_0)^{1/4} (\pi\mathcal{L}/12)^{1/2} (\sigma/\rho\Lambda)^{1/2}. \quad (34)$$

Такие зависимости от теплофизических свойств проводника и параметров контура, если отвлечься от слабоменяющейся величины  $\mathcal{L}$ , ранее были известны как эмпирические [13,14,23]. Наконец, рассчитывая значения  $\sigma_0\rho_0 A_0^2/\sigma_m\rho_m A_m^2 \cong 5.4$  и  $\mathcal{L} \cong 10$ , из (8) и (31) получим  $P_2^* \cong 0.2$ . Последнее значение  $P_2^*$ , полученное на основе обработки экспериментальных данных, приводится в [13,14] и рекомендуется для реализации оптимальных режимов.

Автор благодарит А.Д.Рахеля за обсуждение результатов этой работы.

### Список литературы

- [1] Чейс У. Взрывающиеся проволоки // УФН. 1965. Т. 85. № 2. С. 381-386.
- [2] Взрывающиеся проволоки / Под ред. А.А.Рухадзе. М.: ИЛ, 1963. 342 с.
- [3] Электрический взрыв проводников / Под ред. А.А.Рухадзе, И.С.Шпигеля. М.: Мир, 1965. 360 с.
- [4] *Exploding Wires* / Eds W.G.Chace, H.K.Moore. Vol. 3. New York: Plenum Press, 1964. 424 p.
- [5] Столович Н.Н. Электровзрывные преобразователи энергии. Минск: Наука и техника, 1983. 151 с.
- [6] Бурцев В.А., Калинин Н.В., Лучинский А.В. Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках. М.: Энергоатомиздат, 1990. 289 с.
- [7] Чейс У. Электрический взрыв проводников / Под ред. А.А.Рухадзе, И.С.Шпигеля. М.: Мир, 1965. С. 7-11.
- [8] Уэбб Ф., Хилтон Г., Левин П., Толлестран Э. // Ibid. С. 47-95.
- [9] Воробьев В.С., Рахель А.Д. // ТВТ. 1990. Т. 28. № 1. С. 18-23.
- [10] Vouchenko A.I., Raknel A.D., Vorob'ev V.S. // Proc. 3-r Intern. Conf. on Properties and Applications of Dielectric Materials. Tokyo, 1991. P. 1254-1257.

- [11] *Воробьев В.С., Ратель А.Д.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 16. Вып. 8. С. 89–92.
- [12] *Азаркевич Е.И.* // ЖТФ. 1973. Т. 43. Вып. 1. С. 141.
- [13] *Кривицкий Е.В.* Динамика электровзрыва в жидкости. Киев: Наукова думка, 1986.
- [14] *Гулий Г.А.* Научные основы разрядно-импульсных технологий. Киев: Наукова думка, 1990.
- [15] *Кривицкий Е.В., Апостоли В.Н., Сорочинский А.П.* // Применение ЭГЭ в технологических процессах производства. 1970. Вып. 4. С. 77.
- [16] *Воробьев В.С.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. Вып. 5.
- [17] *Столович Н.Н., Маницкая Н.С.* Температурные зависимости теплофизических свойств некоторых металлов. Минск: Наука и техника, 1975.
- [18] *Gathers G.R.* // Int. J. Therm. 1983. Vol. 4. N 3. P. 209–226.
- [19] *Gathers G.R.* // Rep. Prog. Phys. 1986. Vol. 49. P. 341–396.
- [20] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [21] *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
- [22] *Бункин Ф.В., Проторов А.М.* // УФН. 1976. Т. 119. С. 425.
- [23] *Нэш Ч., Олсен К.* Электрический взрыв проводников / Под ред. А.А.Рухадзе, И.С.Шпигеля. М.: Мир, 1965. С. 12–22.
-