

01;03

©1995 г.

О ВОЗНИКНОВЕНИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

С.О.Ширяева, О.А.Григорьев, М.И.Муничев, А.И.Григорьев

Ярославский государственный университет,
150000, Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 19 сентября 1994 г.
В окончательной редакции 22 июня 1995 г.)

Рассмотрены закономерности осуществления неустойчивостей Тонкса-Френкеля и Рэлея в вязкой и идеальной жидкостях. Показано, что эти неустойчивости связаны с асимметрической бифуркацией. Добавление в систему элементов неустойчивости Гельмгольца (появление даже незначительного движения внешней среды, параллельного заряженной границе жидкости) меняет тип реализации неустойчивости с аperiodического на колебательный, т.е. реализуется устойчивая динамическая бифуркация.

Введение

В самых разнообразных задачах физики, техники и технологии приходится встречаться с капиллярными электрогидродинамическими неустойчивостями, играющими в различных ситуациях как положительную, так и паразитную роли (см., например, [1,2]). В этой связи представляется интересным и полезным проследить, как в различных конкретных случаях реализуются возможные неустойчивости, задаваясь в основном вопросом о закономерностях перехода от устойчивых решений соответствующих уравнений к неустойчивым.

1. Рассмотрим неустойчивость Тонкса-Френкеля. Пусть имеется однородно заряженная с поверхностной плотностью заряда κ неограниченная плоская поверхность вязкой несжимаемой идеально электропроводной жидкости, заполняющей в поле сил тяжести полупространство $z < 0$. Уравнение граничной поверхности в отсутствие возмущения записывается в виде $z = 0$. Пусть σ и ν — коэффициенты поверхностного натяжения и кинематической вязкости жидкости, ρ — ее удельная плотность.

Зададимся вопросом об отыскании спектра капиллярных волн в жидкости при сформулированных условиях. С этой целью будем

искать волновые решения уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P^{in} + \nu \Delta \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где P^{in} — давление внутри жидкости, \mathbf{U} — поле скоростей.

Искомые решения на свободной поверхности жидкости, описываемой уравнением вида

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv z - \zeta(x, y, t) = 0,$$

должны удовлетворять граничным кинематическому

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F = 0 \quad (2)$$

и динамическим условиям для касательных

$$\tau(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\tau \nabla) \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

и нормальной

$$-(P^{in} - P^{ex}) - 2\rho\nu\mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} - P_{\sigma} + P_{\kappa} = 0 \quad (4)$$

компонент тензора напряжений. В этих соотношениях $\zeta(x, y, t)$ — возмущение равновесной плоской поверхности жидкости; P_{σ} и P_{κ} — давление сил поверхностного натяжения под искривленной волновым движением поверхностью жидкости и электростатическое давление на нее из-за наличия поверхностного заряда κ ; τ и \mathbf{n} — орты касательной и нормали к поверхности жидкости.

Система уравнений (1) с граничными условиями (2)–(4) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи.

В [3] проводится подробный вывод дисперсионного уравнения для капиллярных волн в подобной системе в отсутствие поверхностного заряда. Повторяя те же рассуждения, что и в [3]; лишь добавив в динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений слагаемое, учитывающее давление электрического поля согласно [4], несложно получить дисперсионное соотношение для рассматриваемой системы

$$\omega^2 + 4i\nu k^2 \omega - 4\nu^2 k^4 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\omega}{\nu k^2}} \right) = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2 - 4\pi k \kappa^2), \quad (5)$$

где ω — комплексная частота во временной зависимости амплитуд капиллярных волн от времени $\zeta \sim \exp(-i\omega t)$, k — волновое число, i — мнимая единица.

В таком выражении мнимая отрицательная часть комплексной частоты дает декремент затухания капиллярных волн, а мнимая положительная — инкремент нарастания неустойчивости Тонкса-Френкеля, которая реализуется, когда правая часть соотношения (5) (по мере увеличения поверхностной плотности электрического заряда) проходит через нуль и становится отрицательной. Вещественная часть комплексной частоты в используемом выражении дает частоту периодического волнового движения.

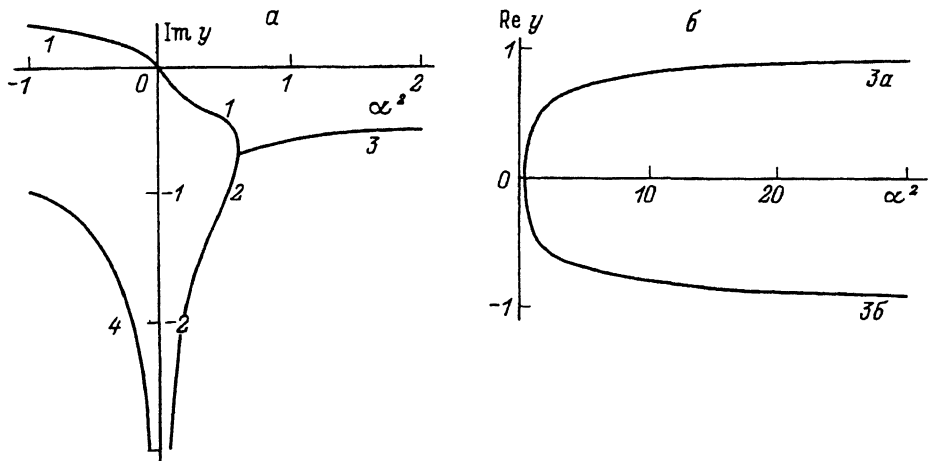


Рис. 1. Зависимости от безразмерного параметра α^2 мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты волнового движения в электропроводной вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей полубесконечное пространство, ограниченное плоскостью $z = 0$.

В безразмерных переменных

$$y = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \alpha = \frac{\omega_0}{\nu k^2};$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\rho} (g\rho + \sigma k^2 - 4\pi k\kappa^2) \quad (6)$$

уравнение (5) примет вид

$$(y - 2i\alpha^{-1})^2 + 1 = 4\alpha^{-2}(1 - i\alpha y)^{1/2}. \quad (7)$$

На рис. 1, а, б представлены рассчитанные численно зависимости мнимой и вещественной компонент частоты ω от параметра α^2 . Зависимость мнимой компоненты частоты от параметра α^2 представлена на рис. 1, а качественным образом, без соблюдения масштаба. Положение точки ветвления решений определяется координатами: $\text{Im } y = 0.69$, $\alpha^2 = 0.58$. При $0 < \alpha^2 < 0.58$ существуют два чисто аperiodически затухающих решения, представленных на рис. 1, а кривыми 1 и 2. При $\alpha \rightarrow 0$ первое решение входит в начало координат (и проходит через него при изменении знака α^2) согласно асимптотической зависимости $\text{Im } y = -0.5\alpha$. Второе решение при $\alpha \rightarrow 0$ стремится к минус бесконечности по закону $\text{Im } y = -4/3\alpha^{-1}$. В точке $\text{Im } y = 0.69$, $\alpha^2 = 0.58$ кривые 1 и 2 пересекаются и порождают два новых решения, существующих при $\alpha^2 > 0.58$, образующих пару решений с одинаковой мнимой частью, определяющей декремент затухания (кривая 3 на рис. 1, а), убывающий при $\alpha \rightarrow \infty$ по асимптотической зависимости $\text{Im } y = -2/\alpha$. Вещественные части решения 3, представленные на рис. 1, б в виде зависимостей $\text{Re } y = \text{Re } y(\alpha^2)$ кривыми 3а и 3б, с увеличением α (при $\alpha \rightarrow \infty$) асимптотически стремятся к ± 1 .

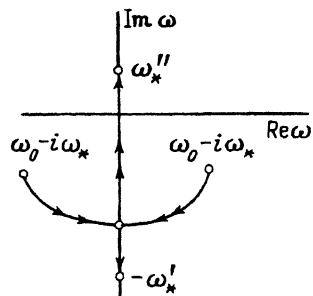


Рис. 2. Схема закономерностей движения точек, изображающих комплексную частоту капиллярного волнового движения в вязкой жидкости при переходе параметра α^2 из области положительных значений в область отрицательных (т.е. при реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля).

В области отрицательных значений параметра α^2 (в области отрицательных значений ω_0^2 , т.е. там, где отрицательное давление сил электрического поля на поверхность жидкости превышает сумму положительных давлений гравитационных и лапласовских сил) периодических волновых движений не существует. Первое решение (кривая 1, являющаяся продолжением кривой 1 из области значений $\alpha^2 > 0$), проходящее через начало координат из четвертого квадрата во второй по закону $\text{Im } y = -0.5\alpha$, определяет инкремент нарастания неустойчивости Тонкса-Френкеля, асимптотически приближающийся к прямой $\text{Im } y = 1$ при $\alpha \rightarrow \infty$ по закону $\text{Im } y = (1 - 2\alpha)$. Второе из решений, существующих в области значений $\alpha^2 < 0$ (кривая 4), является аperiodически затухающим решением, приходящим из $-\infty$ по закону $\text{Im } y = -4/3|\alpha|^{-1}$ при переходе α^2 через нуль и обрывающееся в точке $\alpha^2 = -1$, $\text{Im } y = -1$ (в этой точке числитель выражения, определяющего параметр α^2 (см. (6)), характеризующий размерный инкремент неустойчивости Тонкса-Френкеля, становится равным размерному декременту затухания, стоящему в знаменателе выражения, определяющего параметр α^2 (см. (6)); левее точки $\alpha^2 = -1$, $\text{Im } y = -1$ инкремент неустойчивости всегда превышает декремент затухания и, следовательно, затухающих решений дисперсионного уравнения (7) в этой области не существует).

Поскольку в данном рассмотрении нас интересуют в первую очередь особенности появления неустойчивых решений дисперсионного уравнения, то покажем на рис. 2 поведение комплексной частоты $\omega_0 + i\omega_*$ по мере изменения параметра α^2 от положительных значений к отрицательным (по мере увеличения плотности электрического заряда на поверхности жидкости) в соответствии с результатами расчетов, представленных на рис. 1. Из рис. 2 видно, что по мере уменьшения параметра α^2 сначала обращается в нуль вещественная часть комплексной частоты ω_0 , а ее мнимая часть ω_* (отрицательная при $\alpha^2 > 0$) расщепляется на две компоненты, одна из которых (ω_*'') проходит через нуль и становится положительной (что соответствует появлению неустойчивых решений), другая же (ω_*') остается отрицательной, увеличиваясь при уменьшении α^2 по модулю.

Таким образом, сначала исчезают периодические решения дисперсионного уравнения (что однако не приводит сразу к проявлению неустойчивости) и заменяются на два экспоненциально убывающих, появившихся в результате ветвления мнимой части решения 3. По мере дальнейшего уменьшения α^2 декремент одного из решений также

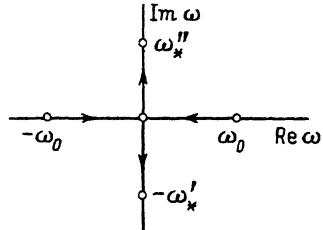


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, в идеальной жидкости.

уменьшается и обращается в нуль одновременно с α^2 . После прохождения α^2 через нуль появляется решение, экспоненциально нарастающее во времени, т.е. условием реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля является прохождение комплексной частоты через начало координат комплексной плоскости. Таким образом, этот вид неустойчивости порождается асимметричной транскритической бифуркацией [5].

Следует, однако, помнить, что меняющимся физическим параметром, обуславливающим появление неустойчивости, является плотность электрического заряда на поверхности жидкости κ и неустойчивость проявляется, когда обращается в нуль выражение, стоящее в правой части уравнения (5).

Если принять, что жидкость идеальна, т.е. если рассмотреть эту задачу в постановке Тонкса и Френкеля (как она, собственно говоря, и изложена в [3]), то соответствующее дисперсионное уравнение принимает вид, получающийся из (5) при $\nu = 0$. Появление неустойчивых решений и в этом случае связано с прохождением ω^2 через нуль, но на комплексной плоскости частоты, изображающие точки с увеличением плотности поверхностного заряда на поверхности жидкости, движутся, как показано на рис. 3, т.е. приближаются к началу координат по вещественной оси и уходят от начала координат вдоль мнимой оси.

Очевидное различие между капиллярным волновым движением в вязкой и идеальной жидкостях, согласно рис. 2 и 3, сводится к тому, что для вязкой жидкости обращение в нуль $\text{Re } \omega$ не ведет к немедленному появлению экспоненциально растущих решений, как это имеет место для идеальной жидкости. Как видно из рис. 1, $\text{Re } \omega$ обращается в нуль при $\alpha^2 = 0.58$ и на интервале $0 < \alpha^2 < 0.58$ в вязкой жидкости существуют лишь аperiodически затухающие движения. Выразим α^2 через размерные величины согласно (6) и перейдем к новым безразмерным переменным

$$w = 4\pi\kappa^2 a \sigma^{-1}; \quad \nu_0^2 = \nu^2 \rho \sigma^{-1} a; \quad a = (\rho g \sigma^{-1})^{1/2}; \quad X = ak,$$

в которых в точке ветвления решений на рис. 1 при $\alpha^2 = 0.58$ можно записать

$$X^2 - Xw + 1 = 0.58\nu_0^2 X^3. \quad (8)$$

На рис. 4 представлена рассчитанная по (8) зависимость между параметром w , характеризующим неустойчивость плоской заряженной поверхности электропроводной жидкости (неустойчивость реализуется при $w > 2$ [4]), безразмерной вязкостью ν_0 и безразмерным волновым числом X . На рис. 4 в части пространства параметров, расположенной выше изображенной поверхности, капиллярное волновое

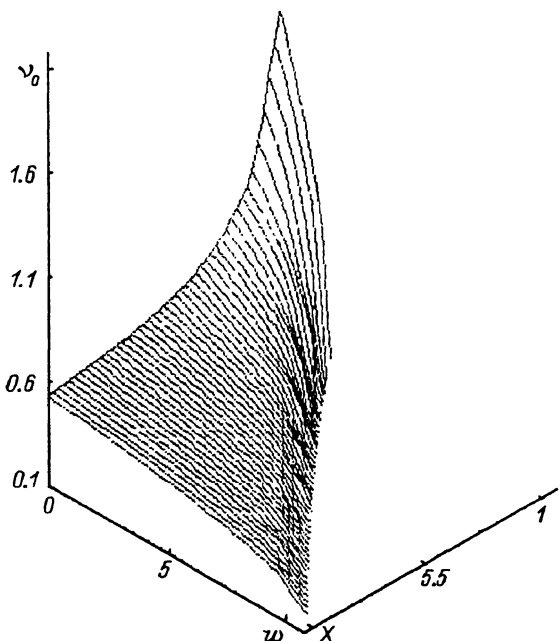


Рис. 4. Поверхность в пространстве параметров w (характеризующего устойчивость плоской заряженной поверхности жидкости), безразмерной вязкости ν_0 и безразмерного волнового числа X , разделяющая области существования капиллярных волновых и чисто аperiodических движений.

движение невозможно ни при каких условиях, так как оно демпфируется вязкостью и поверхностным зарядом. Периодические капиллярные волновые движения возможны лишь ниже приведенной поверхности. Несложно также видеть, что с увеличением безразмерного волнового числа X , т.е. с уменьшением длины капиллярной волны, быстро понижается вязкость жидкости, в которой возможно существование капиллярных волновых движений, и резко увеличивается поверхностная плотность электрического заряда, при которой возможно проявление неустойчивости Тонкса-Френкеля на такой длине волны. При фиксированном волновом числе X с уменьшением вязкости критическое для прекращения периодического волнового движения значение параметра W заметно увеличивается.

2. Посмотрим теперь, как появляются экспоненциально растущие решения в задаче о рэлеевской неустойчивости сферической капли. Пусть имеется сферическая капля радиуса R вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ с коэффициентом кинематической вязкости ν , на поверхности которой существуют капиллярные волны бесконечно малой амплитуды, возникающие вследствие теплового движения молекул жидкости. Пусть жидкость является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ и имеет однородное по объему распределение заряда с плотностью η . Полный заряд капли Q .

Система уравнений электрогидродинамики с электростатическим потенциалом Φ , создаваемым зарядом Q , распределенным в жидкости, формально записывается так же, как и в разделе 1, и имеет вид (1)–(4), лишь в правую часть уравнения (1) добавляется сила, действующая со стороны электрического поля распределенного заряда на единицу объема жидкости $\rho^{-1} \nabla \Phi$. Изменяется и форма свободной поверхности, на которой выполняются граничные условия, имеющая теперь вид

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - R - \zeta(\theta, \phi, t) = 0. \quad (9)$$

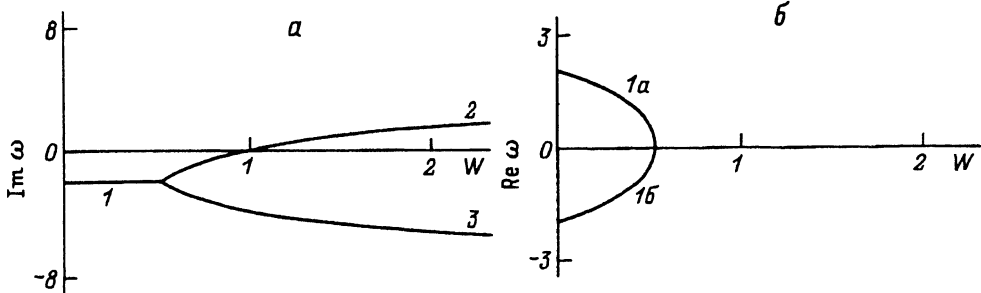


Рис. 5. Зависимости от безразмерного параметра Рэлея W мнимой (а) и вещественной (б) компонент комплексной частоты волнового движения в сферической капле электропроводной вязкой несжимаемой жидкости.

Неустойчивые решения появляются, когда $\text{Im } \omega$ (2) пересекает значение $\text{Im } \omega = 0$, в той же точке исчезают периодические капиллярные колебания капли; 1 — затухающие волны, 3 — декремент аperiodически затухающего движения.

Введем безразмерные переменные, такие что $R = 1, \rho = 1, \sigma = 1$. Тогда все физические величины будут выражены в единицах своих характерных значений $r_* = R; t_* = R^{3/2} \rho^{1/2}; U_* = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}; p_* = R^{-1} \sigma; Q_* = R^{3/2} \sigma^{1/2}; \nu_* = R^{1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}$.

Решая задачу (1)–(4), (9) методом, описанным в [6,7], можно найти дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний капли, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$-\omega^2 - i2(n-1)\left((2n+1) - n(n+2)f_n(x)\right)\left(1 - f_n(x)\right)^{-1} \nu\omega + \omega_n^2 = 0,$$

$$\omega_n^2 = n(n-1)(n-2) - n(n-1) \frac{(\varepsilon - 1)^2 n + 5\varepsilon + 1}{\varepsilon(\varepsilon n + n + 1)} \frac{Q^2}{4\pi},$$

$$f_n(x) \equiv 2x^{-1} j_{n+1}(x)/j_n(x), \quad x \equiv (-i\omega/\nu)^{1/2},$$

где $f_n(x)$ — сферическая функция Бесселя.

Результаты численного анализа этого дисперсионного уравнения для основной моды капиллярных колебаний при $\varepsilon = 80$ приведены на рис. 5, а, б в виде зависимостей $\text{Im } \omega$ и $\text{Re } \omega$ от величины параметра Рэлея $W = Q^2/16\pi\sigma R^3$ (капля испытывает неустойчивость при $W \geq 1$ [8], когда кривая 2 на рис. 5, а пересекает ось W) для мнимых и вещественных компонент частоты соответственно. Общая картина появления экспоненциально растущих решений такая же, как и в выше-разобранном случае неустойчивости Тонкса–Френкеля: условием появления экспоненциально нарастающих капиллярных колебаний капли является прохождение комплексной частоты через начало координат комплексной плоскости, а сам переход происходит, как это показано на рис. 6. В отличие от случая неустойчивости Тонкса–Френкеля (рис. 2) при увеличении параметра W изменение величины мнимой части частоты от нуля до точки ветвления весьма незначительно. Общая картина реализации неустойчивости не зависит от величины диэлектрической проницаемости жидкости ε . Таким образом в задаче о неустойчивости сильно заряженной капли мы опять имеем дело с асимметричной транскритической бифуркацией.

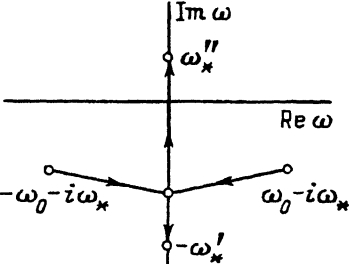


Рис. 6. Схема закономерностей движения точек, изображающих комплексную частоту капиллярного волнового движения в сферической сильно заряженной капле вязкой несжимаемой жидкости, реализующееся с увеличением параметра W , характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду.

Эту задачу можно рассмотреть и в приближении идеальной жидкости, как это и сделал Рэлей [8]. И в этом случае реализация неустойчивости связана с прохождением квадрата частоты через нуль, а движение изображающей точки по комплексной плоскости частоты при увеличении собственного заряда происходит согласно рис. 3.

3. Таким же образом реализуется неустойчивость незаряженной капли в сильном однородном внешнем электростатическом поле. К сожалению, точное дисперсионное уравнение для этой задачи пока не получено ввиду сложности проблемы: равновесная форма незаряженной капли в однородном электростатическом поле близка к сфероидальной [2] и на пороге потери устойчивости такой каплей значение квадрата ее эксцентриситета немалое, что и затрудняет аналитическое решение. Тем не менее существующий анализ для слабосфероидальной вязкой капли [9] позволяет прийти к выводу, что и в этом случае потеря устойчивости связана с прохождением частоты через начало координат комплексной плоскости. Этот вывод подтверждается и анализом устойчивости пленки идеальной жидкости на поверхности твердого сферического ядра во внешнем однородном электростатическом поле, проведенным в [10], где строго доказано, что для реализации неустойчивости в такой системе необходимо и достаточно прохождения квадрата частоты дисперсионного уравнения через нуль (в соответствии с рис. 3).

4. Как показано в [11], к рассмотренным задачам примыкают и задачи о неустойчивости в поле сил тяжести заряженного тангенциального разрыва двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей, массовая плотность верхней из которых больше, чем нижней (другими словами, речь идет о комбинации трех видов неустойчивости: Тонкса-Френкеля, Гельмгольца и Тейлора). В [11] эта задача решена для идеальных жидкостей, но и такой идеализации достаточно, чтобы выделить некоторые любопытные особенности реализации неустойчивости в этом случае.

Итак, рассмотрим задачу об устойчивости тангенциального разрыва двух несмешивающихся жидкостей разной плотности ρ_1 и ρ_2 , каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, причем верхняя жидкость движется со скоростью V вдоль оси X , а на границе раздела имеется электрический заряд с постоянной поверхностной плотностью κ . Эволюция капиллярных волн в такой системе может быть определена как решение задачи для потенциалов скоростей волнового движения ψ_1 в верхней и ψ_2 в нижней жидкостях в декартовой системе координат, плоскость XOY которой совпадает с невозмущенной границей раздела,

а ось OZ направлена вниз, в направлении действия силы тяжести

$$\Delta\psi_i = 0; \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$z \rightarrow -\infty, \quad \psi_1 \rightarrow 0, \quad (11)$$

$$z \rightarrow \infty, \quad \psi_2 \rightarrow 0, \quad (12)$$

$$z = \zeta(x; t): \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx V \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\rho_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \zeta + \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla\psi_1)^2 = \rho_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \rho_2 g \zeta + P_* - \sigma \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \quad (15)$$

где $\zeta(x, t)$ — возмущение границы раздела, связанное с капиллярным волновым движением, которое будем считать не зависящим от координаты y ; V — постоянная скорость движения верхней жидкости относительно нижней, направление которой определяет ориентацию оси OX ; $P_* = 4\pi\kappa^2 k \zeta$ — электростатическое давление на границу раздела [4], связанное с возмущением поверхности $z = \zeta$.

Решение задачи (10)–(15) естественно искать в виде бегущей волны [4]

$$\psi_1 = Vx + Ae^{kz} \cos(kx - \omega t),$$

$$\psi_2 = Be^{-kz} \cos(kx - \omega t),$$

$$\zeta(x, t) = C \sin(kx - \omega t). \quad (16)$$

Подставим (16) в граничные условия (11)–(15), взятые на невозмущенной поверхности $z = 0$, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [3], и в линейном по малым амплитудам A , B , C приближении получим систему однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A , B и C . Из условия разрешимости такой системы легко найти дисперсионное уравнение для капиллярных волн

$$\omega^2(\rho_1 + \rho_2) - 2k\omega\rho_1 V - k \left[k^2 \sigma - k(\rho_1 V^2 + 4\pi\kappa^2) + g(\rho_2 - \rho_1) \right] = 0. \quad (17)$$

Решения уравнения (17) имеют вид

$$\omega_{1,2} = (\rho_1 + \rho_2)^{-1} \left[V k \rho_1 \pm \left(\sigma k^3 (\rho_1 + \rho_2) + g k (\rho_2^2 - \rho_1^2) - V^2 k^2 \rho_2 \rho_1 - 4\pi\kappa^2 k^2 (\rho_1 + \rho_2) \right)^{1/2} \right]. \quad (18)$$

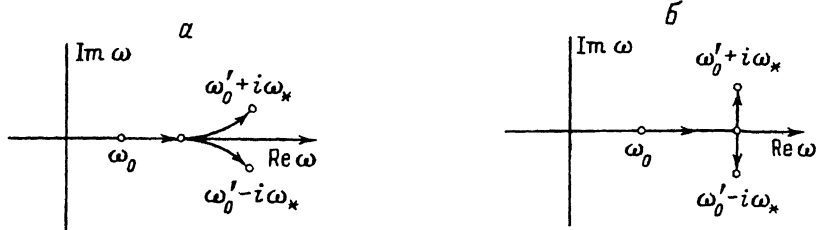


Рис. 7. Схема закономерностей движения точек, изображающих комплексную частоту капиллярного волнового движения в идеальной жидкости при реализации линейной комбинации неустойчивостей Гельмгольца, Тонкса-Френкеля и Тейлора.

a — по мере увеличения скорости V относительного движения верхней жидкости относительно нижней при неизменной плотности поверхностного заряда κ на границе раздела, когда верхняя жидкость имеет плотность меньшую, чем нижняя; *b* — по мере увеличения поверхностной плотности электрического заряда κ или когда $\rho_1 > \rho_2$, если скорость V сохраняет неизменное, отличное от нуля значение.

В рассматриваемом случае неустойчивость появляется, когда становится отрицательным выражение, стоящее под корнем в (18), что может произойти и при значительной поверхностной плотности электрического заряда κ , и из-за большой величины скорости движения верхней среды относительно нижней V , и в том случае, когда $\rho_1 > \rho_2$. При выполнении одного из этих требований или всех вместе частота ω становится комплексной величиной $\omega = \omega_0 + i\omega_*$. Причем реальное движение границы раздела рассматриваемых сред будет колебательным с частотой ω_0 (увеличивающейся с увеличением скорости V) и амплитудой, экспоненциально растущей со временем с инкрементом ω_*'' . Несложно видеть, что колебательный режим реализации неустойчивости связан с наличием поступательного движения одной из сред со скоростью V , т.е. происходит из-за включения в рассматриваемую систему неустойчивости Гельмгольца.

На комплексной плоскости частоты движение изображающей точки при $\kappa = \text{const}$, $\rho_1 < \rho_2$ по мере увеличения скорости V (приводящего к изменению знака подкоренного выражения в (18)) происходит так, как это показано на рис. 7, *a*. Если же неустойчивость реализуется за счет увеличения поверхностной плотности электрического заряда κ или при выполнении условия $\rho_1 > \rho_2$ при неизменной (но отличной от нуля) скорости V , то движение изображающей точки по комплексной плоскости частоты происходит в соответствии с рис. 7, *b*, т.е. во всех случаях имеем дело с устойчивой динамической бифуркацией [5].

Имея в виду физические особенности реализации неустойчивости в рассматриваемой системе, отметим, что при колебательном (динамическом) режиме перехода системы в неустойчивое состояние порог такого перехода должен зависеть от вязкости обеих жидкостей, т.е. исходная задача должна формулироваться для системы уравнений Навье-Стокса. К сожалению, в такой более общей постановке обсуждаемая задача пока не решена.

При $V = 0$ реализация неустойчивостей Тонкса-Френкеля и Тейлора, которые могут иметь место в исследуемой системе, происходит аperiодическим образом при переходе ω^2 через нуль в соответствии с рис. 3.

5. Колебательный режим реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости характерен и для параметрической неустойчивости капиллярных волн, когда временная эволюция амплитуд волн описывается уравнениями Матье-Хилла (см. задачи [1²⁻¹⁴]).

Список литературы

- [1] Дудников В.Г., Шабалин А.Л. Препринт ИЯФ СОАН СССР. № 287-63. Новосибирск, 1987. 66 с.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3-20.
- [3] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [5] Томсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
- [6] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 10. С. 12-19.
- [7] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // ЖВММФ. 1992. Т. 31. № 6. С. 929-938.
- [8] Rayleigh (Strutt J.W., Lord) // Phil. Mag. 1982. Vol. 14. P. 184-188.
- [9] Cheng K. // Phys. Lett. 1985. Vol. 112A. N 8. P. 392-396.
- [10] Григорьев А.И., Дорошенко Д.И. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 10-15.
- [11] Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 6. С. 73-77.
- [12] Нестеров С.В. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 170-172.
- [13] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 52-56.
- [14] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 11. С. 49-56.

