01;02;07;09;10

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА КОЛЬЦЕВОЙ И РАДИАЛЬНОЙ РЕШЕТКАХ

И.И.Каликинский

Астраханский государственный педагогический институт им. С.М.Кирова, Астрахань, Россия
(Поступило в Редакцию 14 апреля 1993 г.
В окончательной редакции 22 ноября 1994 г.)

Поставлена и решена задача для переходного излучения на анизотропно проводящей плоскости. Найдены энергия, спектр и поляризация излучения. Показано, что при малых углах падения заряда на кольцевую решетку излучение будет слабым. Предложено использовать кольцевую решетку для поиска магнитных зарядов.

Впервые работа по переходному излучению электрона, пересекающего границу раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями, появилась в 1946 г. [1]. В дальнейшем появилось много работ, посвященных этому вопросу [2]. После открытия ереванской школой рентгеновского переходного излучения и конструирования переходных счетчиков, позволяющих регистрировать заряженные частицы по их переходному излучению, интерес к этим вопросам снова появился.

В работе [3] исследованы особенности переходного излучения на решетке, состоящей из параллельных прутьев. При этом исследовалась длинноволновая часть излучения заряда, когда решетку можно рассматривать в приближении односторонней проводимости.

В работе [4] исследовалась кольцевая и радиальная решетки также в приближении односторонней проводимости. Однако к настоящему времени появились новые аспекты этой задачи, существенно уточняющие полученные результаты. Эти результаты и излагаются в данной работе.

Переходное излучение на кольцевой решетке

Рассмотрим решетку, состоящую из концентрических колец, расположенных в плоскости $z = 0$. Расстояние между соседними кольцами и толщина колец много меньше длины излучаемой волны, так что решетку можно рассматривать в приближении односторонней проводимости.

При этом проводимость вдоль колец бесконечна, проводимость вдоль радиусов нулевая. Можно говорить об анизотропно проводящей плоскости, где анизотропия цилиндрическая. Это приводит к граничному условию

$$E_\varphi\Big|_{z=0} = 0. \tag{1}$$

Параллельно оси z движется точечный заряд q, пересекающий плоскость $z=0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где можно считать $y_0 = 0$.

Равномерно движущийся заряд создает ток с плотностью $\mathbf{j}(0, 0, j)$, где

$$j = qv\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - vt). \tag{2}$$

При этом $v = \text{const}$. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\mathbf{r}_0$, а радиус-вектор точки $M(x, y)$ — через $\mathbf{r}$. Тогда вектор $\mathbf{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'$, где $r' = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi}$. В системе координат с центром в точке M_0

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta(x')\delta(y')\delta(z - vt), \tag{3}$$

где $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$.

Разлагая δ-функции в интеграл Фурье–Бесселя, найдем

$$\mathbf{j} = \frac{q\mathbf{v}_0}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\frac{z}{v})}d\omega \int\limits_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r')d\lambda. \tag{4}$$

Применяя теорему сложения бесселевых функций [5] и подставляя в (4), получим

$$\mathbf{j} \equiv \frac{q\mathbf{v}_0}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\frac{z}{v})}d\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_0^{\infty} \lambda J_m(\lambda r_0)J_m(\lambda r)d\lambda, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}/v$ — единичный вектор в направлении z.

При решении задачи будем исходить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{6}$$

Введем электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}$, который удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{P}, \tag{7}$$

или для фурье-компоненты

$$\Delta\mathbf{\Pi}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{\Pi}_\omega = -4\pi\mathbf{P}_\omega. \tag{8}$$

Поля выражаются через вектор Герца по формулам

$$\mathbf{E}_\omega = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{\Pi}_\omega,$$

$$\mathbf{H}_\omega = -i\frac{\omega}{c}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_\omega. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, связанный с плотностью тока соотношением

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \qquad \mathbf{P}_\omega = \frac{i}{\omega}\mathbf{j}_\omega. \tag{10}$$

Граничные условия имеют вид

$$\left[E_\varphi^{(0)}\tilde{E}_\varphi^{(1)}\right]_{z=0} = 0, \qquad \tilde{E}_r^{(1)}\Big|_{z=0} = \tilde{\tilde{E}}_r^{(1)}\Big|_{z=0},$$

$$\left[E_\varphi^{(0)} + \tilde{\tilde{E}}_\varphi^{(1)}\right]_{z=0} = 0, \qquad \tilde{H}_\varphi^{(1)}\Big|_{z=0} = \tilde{\tilde{H}}_\varphi^{(1)}\Big|_{z=0}, \tag{11}$$

где нулевой индекс соответствует полю заряда, а единичный — полю излучения. Знак $\sim$ над буквой соответствует полю при $z > 0$, а $\approx$ — полю при $z < 0$.

Вектор Герца также представим в виде

$$\mathbf{\Pi}_\omega = \mathbf{\Pi}_\omega^{(0)} + \mathbf{\Pi}_\omega^{(1)}, \tag{12}$$

где вектор $\mathbf{\Pi}_\omega^{(0)}\left(0, 0, \Pi_\omega^{(0)}\right)$ описывает поля заряда

$$\Pi_\omega^{(0)} = \frac{iq}{\pi\omega}e^{i\frac{\omega}{v}z}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda J_m(\lambda r_0)J_m(\lambda r)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\left(1-\beta^2\right)}d\lambda. \tag{13}$$

Вектор $\mathbf{\Pi}_\omega^{(1)}\left(\Pi_{\omega r}^{(1)}, \Pi_{\omega\varphi}^{(1)}, \Pi_{\omega z}^{(1)}\right)$ описывает поле излучения. Этот вектор удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi}_\omega^{(1)} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{\Pi}_\omega^{(1)} = 0, \tag{14}$$

которое решено в работе [4], и условию

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_\omega^{(1)} = 0. \tag{15}$$

Решение уравнения (14) имеет вид

$$\tilde{\Pi}_{\omega z}^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty \tilde{A}_m(\lambda)J_m(\lambda r)e^{i\varkappa z}\lambda\, d\lambda, \tag{16}$$

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left[\tilde{B}_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) + \tilde{C}_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa z} \lambda d\lambda, \quad (17)$$

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega r} = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left[\tilde{B}_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) - \tilde{C}_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa z} \lambda d\lambda, \quad (18)$$

где $\varkappa = \sqrt{(\omega^2/c^2) - \lambda^2}$, $\operatorname{Im} \varkappa > 0$.

При $z < 0$ знак $\sim$ заменяем на знак $\approx$, функцию $e^{i\varkappa z}$ — на $e^{-i\varkappa z}$. Здесь $\tilde{A}_m(\lambda)$, $\tilde{B}_m(\lambda)$, $\tilde{C}_m(\lambda)$ — неизвестные коэффициенты, которые находятся из граничных условий и условия (15). Так, из условия

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega r}\Big|_{z=0} = \tilde{\tilde{E}}^{(1)}_{\omega r}\Big|_{z=0}$$

находим

$$\tilde{B}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{B}}_m(\lambda) = B_m(\lambda), \quad (19)$$

$$\tilde{C}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{C}}_m(\lambda) = C_m(\lambda). \quad (20)$$

Из граничного условия $\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi}\Big|_{z=0} = \tilde{\tilde{H}}^{(1)}_{\omega\varphi}\Big|_{z=0}$ находим, что

$$B_m(\lambda) = C_m(\lambda). \quad (21)$$

Из условий $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{\Pi}}^{(1)}_\omega = 0$ и $\operatorname{div} \tilde{\tilde{\mathbf{\Pi}}}^{(1)}_\omega = 0$ находим

$$\tilde{A}_m(\lambda) = -\tilde{\tilde{A}}_m(\lambda) = A_m(\lambda)$$

и

$$A_m(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\varkappa} B_m(\lambda). \quad (22)$$

Из граничного условия $\left[E^{(0)}_{\omega\varphi} + \tilde{E}^{(1)}_{\omega\varphi}\right]_{z=0} = 0$ находим

$$B_m(\lambda) = \frac{iqc^2}{2\pi v\omega^2} \frac{J_m(\lambda r_0)\lambda}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)} \quad (23)$$

для $m = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$B_m(\lambda) = -\frac{iqc^2}{2\pi v\omega^2} \frac{J_m(\lambda r_0)\lambda}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)} \quad (24)$$

для целых отрицательных m.

Рассмотрим поле в волновой зоне $z > 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Переходя от функции Бесселя к функциям Ханкеля, используя соотношения обхода [5], получим

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega zm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\varkappa} B_m(\lambda) H^{(1)}_m(\lambda r) e^{i\varkappa z} d\lambda. \quad (25)$$

Используя асимптотику функций Ханкеля и метод перевала [6], окончательно получаем

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega zm} = \frac{qv}{\pi\omega^2} \frac{\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta} J_m\left(\frac{\omega}{c} r_0 \sin\theta\right) e^{im\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{26}$$

Аналогично вычисляем $\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega rm}$

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega rm} = -\frac{qv}{\pi\omega^2} \frac{sin\theta\cos\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta} J_m\left(\frac{\omega}{c} r_0 \sin\theta\right) e^{im\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{27}$$

Что касается $\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega\varphi m}$, то в волновой зоне оно зависит от R по закону $R^{-3/2}$ и не дает вклада в излучение. Приступим к вычислению полей в волновой зоне

$$\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m} = -\frac{i\omega}{c} \operatorname{rot}_\varphi \tilde{\mathbf{\Pi}}^{(1)}_{\omega m} = -\frac{i\omega}{c}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\tilde{\mathbf{\Pi}}^{(1)}_{\omega\theta m}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega Rm}}{\partial\theta}\right\}.$$

В волновой зоне

$$\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m} = -\frac{i\omega}{c}\frac{\partial\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega\theta m}}{\partial R} = -\frac{i\omega}{c}\frac{\partial}{\partial R}\left\{\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega rm}\cos\theta - \tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega zm}\sin\theta\right\}.$$

Проводя необходимые вычисления, получим

$$\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m} = -\frac{qv}{\pi c^2} e^{im\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta} J_m\left(\frac{\omega}{c} r_0 \sin\theta\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{28}$$

Для $m=-1,-2,\ldots$

$$\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m} = \frac{qv}{\pi c^2} e^{im\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}} \frac{sin\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta} J_m\left(\frac{\omega}{c} r_0 \sin\theta\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{29}$$

Складывая (28) и (29), получим

$$\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m} = -\frac{2qv}{\pi c^2} i\sin m\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta} J_m\left(\frac{\omega}{c} r_0 \sin\theta\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{30}$$

Можно показать, что в волновой зоне $\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m} = \tilde{E}^{(1)}_{\omega\theta m}$, а $\tilde{H}^{(1)}_{\omega\theta m} = \tilde{E}^{(1)}_{\omega\varphi m} = 0$. Таким образом, излучение линейно поляризовано. Энергия излучения

$$W_{\omega m} = \frac{c}{4\pi}\left|\tilde{E}^{(1)}_{\omega\theta m}\right|^2 R^2 =$$

$$= \frac{q^2v^2}{\pi^2c^3}\sin^2 m\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2} J_m^2\left(\frac{\omega}{c} r_0 \sin\theta\right). \tag{31}$$

З а м е ч а н и е 1. Из формулы (31) следует, что при $\varphi=\pi/2$ или $\varphi=3/2\pi$ излучение отсутствует и это совпадает с результатом [3].

Переходное излучение на радиальной решетке

Рассмотрим решетку из радиальных прутьев, расположенных в плоскости $z = 0$. Для длинноволновой части излучения решетку можно рассматривать в приближении односторонней проводимости (по радиусам). Проводимость вдоль радиусов бесконечная, а вдоль окружностей нулевая.

Эту решетку можно рассматривать как анизотропно проводящую плоскость (анизотропия цилиндрическая). Это приводит к граничному условию

$$E_r|_{z=0} = 0. \tag{32}$$

Параллельно оси z движется точечный заряд q, пересекающий плоскость $z = 0$ в точке $M_0(x_0 y_0)$, где y_0 можно положить равным нулю. Плотность тока, создаваемая движущимся зарядом

$$\mathbf{j} = \frac{q\mathbf{v}_0}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)} d\omega \int\limits_{0}^{\infty} \lambda J_m(\lambda r_0) J_m(\lambda r) d\lambda, \tag{33}$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}/v$ и $\mathbf{v} = \text{const}$.

Так же как в задаче о кольцевой решетке, вводим электрический вектор Герца, фурье-компонента которого удовлетворяет уравнению (8), а поля выражаются через вектор Герца по формулам (9).

Граничные условия имеют вид

$$\left[E_{\omega r}^{(0)} + E_{\omega r}^{(1)}\right]_{z=0} = 0, \qquad \tilde{E}_{\omega\varphi}^{(1)}|_{z=0} = \tilde{\tilde{E}}_{\omega\varphi}^{(1)}|_{z=0},$$

$$\left[E_{\omega r}^{(0)} + \tilde{\tilde{E}}_{\omega r}^{(1)}\right]_{z=0} = 0, \qquad \tilde{H}_{\omega r}^{(1)}|_{z=0} = \tilde{\tilde{H}}_{\omega r}^{(1)}|_{z=0}, \tag{34}$$

где приняты те же обозначения, что и для кольцевой решетки; вектор $\mathbf{\Pi}_\omega^{(0)}(0, 0, \Pi_\omega^{(0)})$ и $\tilde{\mathbf{\Pi}}_\omega^{(1)}\left(\tilde{\Pi}_{\omega r}^{(1)}, \tilde{\Pi}_{\omega\varphi}^{(1)}, \tilde{\Pi}_{\omega z}^{(1)}\right)$,

$$\mathbf{\Pi}_\omega = \mathbf{\Pi}_\omega^{(0)} + \mathbf{\Pi}_\omega^{(1)}, \tag{35}$$

вектор $\mathbf{\Pi}_\omega^{(0)}\left(0, 0, \Pi_\omega^{(0)}\right)$, где $\Pi_\omega^{(0)}$ находится по формуле (13). Вектор $\mathbf{\Pi}_\omega^{(1)}$ удовлетворяет уравнениям (14) и условию (15). Этот вектор ищем в виде (16)–(18). Граничное условие

$$\tilde{E}_{\omega\varphi}^{(1)}|_{z=0} = \tilde{\tilde{E}}_{\omega\varphi}^{(1)}|_{z=0}$$

приводит к тому, что

$$\tilde{B}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{B}}_m(\lambda) = B_m(\lambda),$$

$$\tilde{C}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{C}}_m(\lambda) = C_m(\lambda).$$

Граничное условие

$$\tilde{H}^{(1)}_{\omega r}|_{z=0} = \tilde{\tilde{H}}^{(1)}_{\omega r}|_{z=0}$$

приводит к условию $B_m(\lambda) = C_m(\lambda)$. Использование условий $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{\Pi}}^{(1)}_\omega = 0$, $\operatorname{div}\tilde{\tilde{\mathbf{\Pi}}}^{(1)}_\omega = 0$ приводит к равенству

$$\tilde{A}_m(\lambda) = -\tilde{\tilde{A}}_m(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\varkappa}B_m(\lambda) = A_m(\lambda).$$

И, наконец, граничное условие $E_{\omega r}|_{z=0} = 0$ приводит к равенству

$$B_m(\lambda) = \frac{iqc^2}{2\pi v\omega^2}\,\frac{\lambda J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)}, \tag{36}$$

причем условие (36) выполняется при всех m.

Перейдем теперь к полю в волновой зоне ($z > 0$). Переходя от функций Бесселя к функциям Ханкеля, используя соотношения обхода [5] получим

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega z m} = -\frac{iqc^2}{2\pi v\omega^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)}H^{(1)}_m(\lambda r)\frac{\lambda^2}{\varkappa}e^{i\varkappa z}d\lambda. \tag{37}$$

Применяя теперь асимптотику функций Ханкеля [5] и метод перевала [6], получим

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega z m} = \frac{qv}{\pi\omega^2}\,\frac{\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}\,J_m\left(\frac{\omega}{c}r_0\sin\theta\right)e^{im\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{38}$$

$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega\varphi m}$ в волновой зоне ведет себя по R как $R^{-3/2}$ и не дает вклада в излучение. Отсюда следует, что $\tilde{E}^{(1)}_{\omega\varphi m} = 0$ (в волновой зоне).

Аналогично находится $\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega r m}$

$$\tilde{\Pi}^{(1)}_{\omega r m} = \frac{qv}{\pi\omega^2}e^{im\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}J_m\left(\frac{\omega}{c}r_0\sin\theta\right)\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{39}$$

Для полей в волновой зоне получаем

$$\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m} = -\frac{2qvi}{\pi c^2}\cos m\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}J_m\left(\frac{\omega}{c}r_0\sin\theta\right)\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}, \tag{40}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$.

Энергия на частоте ω

$$W_{\omega m} = \frac{c}{4\pi}\left|\tilde{H}^{(1)}_{\omega\varphi m}\right|^2\cdot R^2 \doteq \frac{q^2v^2}{\pi^2c^3}\cos^2 m\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2}J_m^2\left(\frac{\omega}{c}r_0\sin\theta\right) \tag{41}$$

Замечание 2. Из формулы (41) следует, что при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ излучение, так же как и в случае кольцевой решетки, отсутствует, что совпадает с результатом [3]. Таким образом, наш результат переходит в результат К.А.Барсукова [3].

Если заряд движется по центру решетки ($r_0 = 0$), то получаем

$$W_{\omega 0} = \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}, \tag{42}$$

т. е. совпадает с формулой [1]. В этом же случае ($r_0 = 0$) для кольцевой решетки из формулы (31) следует, что излучение будет отсутствовать. Таким образом, в случае дипольного излучения при движении заряда по центру решетки на кольцевой решетке излучение отсутствует, а на радиальной совпадает с излучением на изотропной идеально проводящей плоскости. Поляризация излучения в случае кольцевой и радиальной решеток и $r_0 \neq 0$ одинакова и совпадает с поляризацией на изотропно проводящей металлической плоскости.

Перейдем теперь к излучению магнитного заряда. Как отмечено в работе [7], для получения соответствующих формул нет необходимости проводить расчеты, дополнительные к теории переходного излучения электрического заряда q. Результаты можно получить сразу, пользуясь симметрией уравнений Максвелла и заменяя q на g и вектор $\mathbf{E}$ на вектор $\mathbf{H}$. В волновой зоне векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ одинаковы по величине (меняются местами), g — величина магнитного заряда. Поэтому изменяются поляризация излучения и его интенсивность в $(g/q)^2$ раз. Если в плоскости $z = 0$ расположена радиальная решетка, то заряд g не возбуждает поля излучения. Если же в плоскости $z = 0$ расположена кольцевая решетка, то заряд g возбуждает излучение такое же, как на изотропной идеальной проводящей плоскости.

Приведенные соображения позволяют надеяться на использование кольцевой решетки для поисков магнитных зарядов. Если имеется пучок, содержащий электрические и магнитные заряды, то, поставив на его пути кольцевую решетку, надо следить за наличием излучения. Если будет зарегистрировано излучение, то из этого следует, что в пучке есть магнитные заряды. Если же излучения нет, то пучок целиком состоит из электрических зарядов.

Заметим, что полученные для бесконечной решетки результаты будут верны и для решетки конечных размеров радиуса R_0, если выполняется неравенство $a \ll \lambda \ll R_0$, т. е. бесконечность решетки не носит принципиального характера. Указанное двойное неравенство относится к дипольному излучению. Для ультрарелятивистского случая отмеченное двойное неравенство выполняется, так как R_0 можно выбрать достаточно большим, но конечным.

Переходное излучение на кольцевой решетке при малых углах падения заряда

Рассмотрим кольцевую решетку, расположенную в плоскости $z = 0$. Решетку будем рассматривать в приближении односторонней проводимости, что означает наличие граничного условия (1). В плоскости $x0z$ движется равномерно точечный заряд q, имеющий скорость $\mathbf{v}(v_x, 0, v_z)$, причем

$$\frac{v_x}{v_z} \ll 1. \tag{43}$$

Заряд создает ток с плотностью $\mathbf{j}(j_x, 0, j_z)$, где

$$j_x = qv_x\delta(x - v_xt)\delta(y)\delta(z - v_zt),$$

$$j_z = qv_z\delta(x - v_xt)\delta(y)\delta(z - v_zt). \tag{44}$$

Разлагая все величины в интеграл Фурье по частоте, получим

$$j_{\omega x} = \frac{q}{(2\pi)^3}\frac{v_x}{v_z}e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int e^{ik_xx+ik_yy-ik_x\frac{v_x}{v_z}z}dk_xdk_y,$$

$$j_{\omega z} = \frac{q}{(2\pi)^3}\,e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int e^{ik_xx+ik_yy-ik_x\frac{v_x}{v_z}z}dk_xdk_y. \tag{45}$$

Электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}_\omega$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{\Pi}_\omega = -\frac{4\pi i}{\omega}j_\omega. \tag{46}$$

При этом кроме условия (1) должны выполняться граничные условия (11). Вектор Герца $\mathbf{\Pi}_\omega$ подставим в виде

$$\mathbf{\Pi}_\omega = \mathbf{\Pi}_\omega^{(0)} + \mathbf{\Pi}_\omega^{(1)}. \tag{47}$$

Еще должно выполняться условие

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_\omega^{(1)} = 0 \tag{48}$$

и условия излучения на бесконечности.

Из уравнения (46) для $\mathbf{\Pi}_\omega^{(0)}$ получаем

$$\Pi_{\omega z}^{(0)} = -\frac{iq}{2\pi^2\omega}e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int\frac{e^{ik_xx+ik_yy-ik_x\frac{v_x}{v_z}z}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{k_xv_x-\omega}{v_z}\right)^2}dk_xdk_y, \tag{49}$$

$$\Pi_{\omega x}^{(0)} = -\frac{iq}{2\pi^2\omega}\frac{v_x}{v_z}\,e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int\frac{e^{ik_xx+ik_yy-ik_x\frac{v_x}{v_z}z}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{k_xv_x-\omega}{v_z}\right)^2}dk_xdk_y. \tag{50}$$

Разложим выражение

$$\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{k_xv_x-\omega}{v_z}\right)^2}$$

в ряд по степеням v_x/v_z и ограничимся первыми членами этого разложения. Получим

$$\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\left(\frac{k_x v_x-\omega}{v_z}\right)^2}=\frac{1}{k^2+\frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)}+\frac{2k_x\omega}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{\omega^2}{v_z^2}}\frac{v_x}{v_z}, \tag{51}$$

где $\beta_z = v_z/c$.

Перейдем к полярным координатам

$$k_x = k\cos\tau, \qquad x = r\cos\varphi,$$

$$k_y = k\sin\tau, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{52}$$

Для $\mathbf{\Pi}_\omega^{(0)}$ получим

$$\Pi_{\omega z}^{(0)}=\frac{iq}{4\pi^2\omega}e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int\limits_0^\infty\int\limits_o^{2\pi}\frac{e^{ikr\cos(\tau-\varphi)-ikz\frac{v_x}{v_z}\cos\tau}kdkd\tau}{k^2+\frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)}, \tag{53}$$

$$\Pi_{\omega x}^{(0)}=\frac{iq}{4\pi^2\omega}\frac{v_x}{v_z}e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int\limits_0^\infty\int\limits_o^{2\pi}\frac{e^{ikr\cos(\tau-\varphi)-ikz\frac{v_x}{v_z}\cos\tau}kdkd\tau}{k^2+\frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)}. \tag{54}$$

Разложим $e^{ikz\frac{v_x}{v_z}\cos\tau}$ в ряд по степеням v_x/v_z и ограничимся первыми членами этого разложения

$$e^{-ikz\frac{v_x}{v_z}\cos\tau}=1-ikz\frac{v_x}{v_z}\cos\tau. \tag{55}$$

Получим

$$\Pi_{\omega z}^{(0)}=\frac{iq}{2\pi\omega}e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{J_0(kr)-ikz\frac{v_x}{v_z}}{k^2+\frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)}\left[J_1(kr)e^{i\varphi}+j_{-1}(kr)e^{-i\varphi}\right]\right\}k\,dk, \tag{56}$$

$$\Pi_{\omega x}^{(0)}=\frac{iq}{2\pi\omega}\frac{v_x}{v_z}e^{i\frac{\omega}{v_z}z}\int\limits_0^\infty\frac{J_0(kr)kdk}{k^2+\frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)}. \tag{57}$$

Имеем

$$E_{\omega\varphi}^{(0)}=\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\Pi_{\omega z}^{(0)}}{\partial z}+\frac{\partial\Pi_{\omega x}^{(0)}}{\partial x}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\Pi_{\omega\varphi}^{(0)}. \tag{58}$$

Продифференцируем $\Pi_{\omega z}^{(0)}$ вначале по φ, а затем по z. Получим при $z=0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\Pi_{\omega z}^{(0)}}{\partial z}=\frac{iq}{4\pi\omega}\frac{v_x}{v_z}\int\limits_0^\infty\frac{iJ_1(kr)e^{i\varphi}-iJ_{-1}(kr)e^{-i\varphi}}{r\left[k^2+\frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)\right]},$$

$$\frac{\partial \Pi^{(0)}_{\omega x}}{\partial \varphi} = 0. \tag{59}$$

Подставим

$$\Pi^{(0)}_{\omega\varphi} = -\Pi^{(0)}_{\omega x} \sin\varphi = -\frac{1}{2} i \Pi^{(0)}_{\omega x} \left(e^{i\varphi} - e^{i\varphi}\right).$$

Итак,

$$E^{(0)}_{\omega\varphi} = \frac{v_x}{v_z}\frac{q}{8\pi\omega}\int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)\left(ik^2 e^{i\varphi} - k^2 e^{-i\varphi} - 2\frac{\omega^2}{c^2} e^{i\varphi} + 2\frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\varphi}\right)}{k^2 + \frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)} +$$

$$+ \frac{q}{8\pi\omega}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{v_x}{v_z}\int\limits_0^\infty J_2(kr)\left(ie^{\subset\varphi} - ie^{-i\varphi}\right) k^3 dk. \tag{60}$$

Из работы [4]

$$\Pi^{(1)}_{\omega\varphi} = \int\limits_0^\infty \Big[D_1(k) J_2(kr) + E_1(k) J_0(kr)\Big] e^{i\varphi} k dk +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \Big[D_{-1}(k) J_2(kr) + E_{-1}(k) J_0(kr)\Big] e^{-i\varphi} k dk.$$

Приравнивая члены при $\exp(\pm i\varphi)$, получим

$$D_1(k) = -\frac{q}{8\pi\omega}\frac{v_x}{v_z}\frac{k^2}{k^2 + \frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)},$$

$$E_{-1}(k) = \frac{q}{8\pi\omega}\frac{v_x}{v_z}\frac{k^2}{k^2 + \frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)},$$

$$E_1(k) = -\frac{q}{8\pi\omega}\frac{v_x}{v_z}\frac{k^2}{k^2 + \frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)},$$

$$D_{-1}(k) = \frac{q}{8\pi\omega}\frac{v_x}{v_z}\frac{-k^2 + 2\frac{\omega^2}{c^2}}{k^2 + \frac{\omega^2}{v_z^2}\left(1-\beta_z^2\right)}.$$

Таким образом, составляющие полей пропорциональны v_x/v_z, а энергия излучения $(v_x/v_z)^2$ и излучение при малых углах падения заряда будут малыми.

В заключение автор выражает благодарность Б.М.Болотовскому и С.Н.Столярову за обсуждение результатов работы.

Список литературы

[1] *Гинзбург В.Л., Франк И.М.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. Вып. 1. С. 15–28.

[2] Библиография работ по переходному излучению (1945–1982). Ереван. Ереванский физический институт.

[3] *Барсуков К.А., Нарышкина Л.Г.* // Радиофизика. 1965. Т. 8. № 5. С. 936–941.

[4] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 9. С. 20–26.

[5] *Градштейн И.С., Рыжик Н.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1097 с.

[6] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

[7] *Франк И.М.* // Ядерная физика. 1979. Т. 9. № 1. С. 180–187.