01;09

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ФЛАНЦЕМ

Ю.В.Гандель, Г.Л.Сидельников

Харьковский физико-технический институт,
310108, Харьков, Украина
(Поступило в Редакцию 15 августа 1994 г.)

На примере задачи дифракции на плоском волноводе с бесконечным фланцем показано, как с помощью техники интегросумматорных уравнений краевая задача может быть сведена к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) первого рода. Рассмотрены случаи E- и H-поляризации. Решение СИУ проведено методом дискретных особенностей (МДО). Получены простые приближенные формулы для коэффициентов Фурье дифрагированного поля и амплитуды Фурье рассеянного поля.

Введение

Существующие способы решения задач дифракции волн на открытых системах (открытые волноводы, решетки и др.), базирующиеся на методе Винера–Хопфа–Фока или примыкающем к нему методе задачи Римана–Гильберта, требуют проведения довольно громоздких вычислений, которые бывают просты лишь при малых отношениях характерного размера задачи к длине волны. Трудности возникают и в "квазиоптической" области, т.е. когда характерный размер значительно превосходит длину волны. Так, методом факторизации задача об излучении из открытого конца волновода была решена в работе [1], а задача о возбуждении плоского волновода с бесконечным фланцем была решена тем же методом в формулировке Джонса в работе [2].

В настоящей работе предлагается новый численно-аналитический подход к решению задачи дифракции на полубесконечном волноводе с фланцем, основанный на теории парных сумматорных и парных интегральных уравнений [3,4] и специальных интегральных представлениях полей в раскрыве волновода.

Постановка задачи

На полуограниченный плоский волновод с бесконечным фланцем (фланец и стенки волновода считаем идеально проводящими) падает плоская электромагнитная волна (зависимость от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$). Сечение волновода плоскостью $z = 0$ показано на рис. 1.

Требуется найти рассеянное поле в свободном пространстве и дифрагированное поле в щели. Ввиду регулярности структуры вдоль оси $0z$ исходная векторная задача в зависимости от поляризации падающего поля может быть сведена к первой (второй) внешней краевой задаче для уравнения Гельмгольца относительно функции $E_z(H_z)$. Поле должно удовлетворять а) условию излучения Зоммерфельда, б) условиям сопряжения в раскрыве щели, в) условию Майкснера на ребре прямого двухгранного угла $E_z(H_z) \sim \rho^{2/3}$, $\rho \to 0$, где ρ — пространственная координата в локальной в окрестности ребра полярной системе координат.

1. *E*-поляризация

а) Вывод интегро-сумматорных уравнений. Решение задачи будем искать в виде

$$E_z \equiv u(x, y) = \begin{cases} u_D(x, y) + u_0(x, y), & x < 0,\, y \in R, \\ u_G(x, y), & x \geqslant 0,\, 0 < y < a, \end{cases}$$

где $u_0 = e^{iky\sin(\alpha)}\sin(kx\cos(\alpha))$ — сумма падающей под углом α и отраженной от плоскости $x = 0$ волн; u_D и u_G подлежат определению.

Составляющую u_D рассеянного поля представим в виде

$$u_D(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y + \gamma(\lambda) x} d\lambda, \tag{1}$$

где $\gamma^2(\lambda) = \lambda^2 - k^2$, $k = \omega/c$ — волновое число.

В соответствии с условием излучения следует выбрать ту ветвь $\gamma(\lambda)$, для которой $\operatorname{Im}\gamma \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\gamma \geqslant 0$.

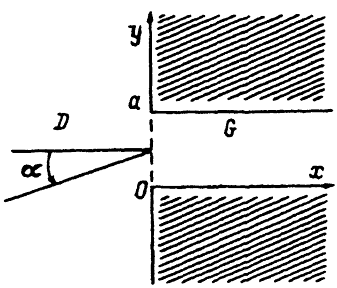

Рис. 1. Плоский волновод с бесконечным фланцем.
$D = \{(x, y) \in R^2 : \; x < 0\}$, $G = \{(x, y) \in R^2 : x \geqslant 0,\; 0 < y < a\}$.

Решение уравнения Гельмгольца в области G, удовлетворяющее граничному условию Дирихле на стенках волновода, представим в виде

$$u_G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\pi n \frac{y}{a}\right) e^{-\gamma_n x}, \tag{2}$$

где

$$\gamma_n^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 - \varkappa^2), \quad \varkappa = \frac{ka}{\pi}, \quad \operatorname{Im}\gamma_n \leqslant 0, \quad \operatorname{Re}\gamma_n \geqslant 0.$$

Из граничного условия на фланце и условий сопряжения в раскрыве волновода для функции $u(x,y)$ получаем интегросумматорные уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \leqslant 0, \quad y \geqslant a, \tag{3}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\pi n \frac{y}{a}\right), \quad 0 < y < a, \tag{4}$$

$$k\cos(\alpha) e^{iky\sin(\alpha)} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\gamma(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_n \sin\left(\pi n \frac{y}{a}\right), \quad 0 < y < a. \tag{5}$$

б) Вывод СИУ. Следуя [3–5], введем в рассмотрение функцию

$$F(y) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) \lambda e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in R,$$

которая в силу (3) и условия на ребре удовлетворяет следующим условиям:

а) $F(y) = 0$, $y \leqslant 0$, $y \geqslant a$; б) $\int\limits_0^a F(y)dy = 0$; в) $F(y) \sim \dfrac{\text{const}}{\sqrt[3]{y(a-y)}}$, $y \in (0,a)$.

Из определения $f(y)$, $y \in R$, (4) и условий а и б имеем

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^a F(\zeta) \frac{e^{-i\lambda\zeta} - 1}{\lambda} d\zeta, \quad \lambda \in R, \tag{6}$$

$$C_n = \frac{2}{\pi n} \int\limits_0^a F(\zeta) \cos\left(\pi n \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta, \quad n \in N. \tag{7}$$

Перепишем уравнение (5) в следующем виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)|\lambda|e^{i\lambda y}d\lambda + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\lambda^2-k^2}-|\lambda|\right)C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{a}nC_n\sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{a}\left(\sqrt{n^2-\varkappa^2}-n\right)C_n\sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right) = -k\cos(\alpha)e^{iky\sin(\alpha)}, \qquad (8)$$

где $C(\lambda)$, $\lambda \in R$ и C_n, $n \in N$ выражаются соответственно по формулам (6) и (7) через искомую функцию $F(y)$, $y \in (0,a)$.

Преобразуем в отдельности каждое слагаемое в левой части равенства (8). Используя параметрическое представление преобразования Гильберта [6]

$$G(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{i\lambda\zeta}d\lambda, \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\zeta)}{\zeta-y}d\zeta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)i\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda y}d\lambda,$$

учитывая свойства а и б функции $F(y)$, имеем

$$\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = \int\limits_{0}^{a}\frac{F(\zeta)}{y-\zeta}d\zeta. \qquad (9)$$

Далее, используя представление (6) и изменяя порядок интегрирования, для второго слагаемого в (8) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\lambda^2-k^2}-|\lambda|\right)C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{a}d\zeta F(\zeta)Q(\zeta-y), \quad y\in(0,a), \qquad (10)$$

где

$$Q(z) = \int\limits_{0}^{+\infty}\left(\sqrt{\lambda^2-k^2}-\lambda\right)\frac{\sin(z\lambda)}{\lambda}d\lambda.$$

Аналогично преобразуем ряды в левой части равенства (8).

В силу соотношения (4) имеет место следующее представление функции $F(\zeta)$, $\zeta \in (0,a)$:

$$F(\zeta) = \frac{\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\cos\left(\pi n\frac{\zeta}{a}\right), \qquad (11)$$

которая естественным образом продолжается на всю ось как четная периодическая (с периодом $2a$) функция. Используя преобразование Гильберта

$$H : L_2(-\pi,\pi)\to L_2(-\pi,\pi) : G(\varphi)\to(HG)(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(\varphi)\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi$$

и учитывая, что $H\colon \cos(n\varphi) \to -\sin(n\varphi_0)$, получаем для первой суммы в (8) следующее представление:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{a} n C_n \sin\left(\pi n \frac{y}{a}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{y}{a}\right)}{a} \int_0^a \frac{F(\zeta)}{\cos\left(\pi \frac{\zeta}{a}\right) - \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right)} d\zeta, \quad y \in (0, a). \quad (12)$$

Действуя так же, как в [4], для получения интегрального представления второй суммы в (8) подставим вместо коэффициентов C_n их представление (7), меняя порядок суммирования и интегрирования, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{a} \left(\sqrt{n^2 - \varkappa^2} - n\right) C_n \sin\left(\pi n \frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_0^a d\zeta F(\zeta) P(\zeta, y), \qquad (13)$$

где

$$P(\zeta, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 - \varkappa^2} - n\right) \frac{\sin\left(\pi n \frac{\zeta + y}{a}\right) - \sin\left(\pi n \frac{\zeta - y}{a}\right)}{n}.$$

Теперь с учетом (9), (10), (12), (13) после введения безразмерной переменной $\zeta \equiv g(t) = ((t+1)/2)a$; $y = g(t_0)$, t, $t_0 \in (-1, 1)$ и безразмерного параметра $\varkappa$ приходим к СИУ вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{U(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{t_0}{2}\right) \int_{-1}^{1} \frac{U(t)}{\sin\left(\pi \frac{t}{2}\right) - \sin\left(\pi \frac{t_0}{2}\right)} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} Q(t, t_0) U(t) dt = \varkappa f(t_0),$$

$$|t_0| < 1, \quad \text{где} \quad U(t) = F(g(t)), \quad f(t_0) = \frac{\pi}{a} \cos(\alpha) e^{iky} \frac{t_0 + 1}{2} a \sin(\alpha),$$

$$Q(t, t_0) = -\frac{\pi}{2} \varkappa \int_0^{+\infty} \left(\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 1}}{\tau}\right) \sin\left(\varkappa \pi \frac{t - t_0}{2} \tau\right) d\tau +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{n^2}}\right) \left[(-1)^n \sin\left(\pi n \frac{t + t_0}{2}\right) - \sin\left(\pi n \frac{t - t_0}{2}\right)\right]. \quad (14)$$

в) М о д и ф и к а ц и я М Д О д л я р е ш е н и я п о л у ч е н н о г о С И У. Решение уравнения (14) будем искать в виде

$$U(t) = \frac{u(t)}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad t \in (-1, 1), \qquad (15)$$

где в соответствии с условием на ребре (условие в) $u(t) = \sqrt[6]{1 - t^2}\, v(t)$, а функция $v(t)$, $t \in [-1, 1]$ принимает конечные значения.

Решение уравнения (14) удовлетворяет дополнительному условию

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} U(t)dt = 0$$

(свойство 6 функции $F(\zeta)$).

Для приближенного решения задачи проведем дискретизацию СИУ и дополнительного условия по МДО [7], используя интерполяционные квадратуры. Выберем в качестве узлов интерполяции подынтегральной функции нули полиномов Чебышева первого рода

$$t_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = \overline{1, n},$$

а в качестве точек коллокации — нули полиномов Чебышева второго рода

$$t_{0l} = \cos\left(\frac{l}{n}\pi\right), \quad l = \overline{1, n-1}$$

и обозначим приближенное решение СИУ (на этом этапе дискретизации) $u_n(t)$. Приходим к системе n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно n неизвестных искомых значений функции $u_n(t)$ в узлах интерполирования $u_n(t_k)$, $k = \overline{1, n}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_n(t_k)}{t_k - t_{0l}} + \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\cos\left(\pi\frac{t_{0l}}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{u_n(t_k)}{\sin(\pi t_k/2) - \sin(\pi t_{0l}/2)} +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{K}(t_k, t_{0l})u_n(t_k) = \frac{\pi}{a}\varkappa, \quad l = \overline{1, n-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_n(t_k) = 0, \quad (l = n). \tag{16}$$

Искомые фурье-амплитуды (6) и коэффициенты Фурье (7) выражаются согласно (15) через $u(t)$, $t \in (-1, 1)$ следующим образом:

$$C(\lambda) = \frac{a}{4\pi i}\int_{-1}^{1} dt\frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{e^{-i\lambda\frac{t+1}{2}a} - 1}{\lambda}, \quad \lambda \in R,$$

$$C_m = \frac{a}{\pi m}\int_{-1}^{1} dt\frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}\cos\left(\pi m\frac{t+1}{2}\right), \quad m \in N.$$

Используя квадратуры Гаусса, выражаем приближенные значения $C^{(n)}(\lambda)$ функций $C(\lambda)$ и $C_m^{(n)}$, коэффициентов C_m, непосредственно через решение СЛАУ (16)

$$C^{(n)}(\lambda) = \frac{a}{4i}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n(t_k)\frac{e^{-i\lambda\frac{t_k+1}{2}a}-1}{\lambda}, \quad \lambda \in R,$$

$$C_m^{(n)} = \frac{a}{mn}\sum_{k=1}^{n} u_n(t_k)\cos\left(\pi m\frac{t_k+1}{2}\right), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

2. H-поляризация

Для нахождения рассеянного и дифрагированного полей в случае H-поляризации имеем внешнюю краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца относительно функции $H_z(x, y)$, $(x, y) \in DUG$. Решение задачи будем искать в виде

$$H_z \equiv u(x,y) = \begin{cases} u_D(x,y) + e^{iky\sin(\alpha)}\cos(kx\cos(\alpha)), & x < 0,\ y \in R, \\ u_G(x,y), & x \geqslant 0,\ 0 < y < a, \end{cases}$$

где u_D и u_G ищем в следующем виде:

$$u_D(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\lambda)}{\gamma} e^{i\lambda y + \gamma(\lambda)x} d\lambda, \quad \mathrm{Im}\,\gamma \leqslant 0, \quad \mathrm{Re}\,\gamma \geqslant 0,$$

$$u_G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\gamma_n}\sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right) e^{-\gamma_n x}, \quad \mathrm{Im}\,\gamma_n \leqslant 0, \quad \mathrm{Re}\,\gamma_n \geqslant 0.$$

Из граничного условия на фланце и условий сопряжения в раскрыве для функции $u(x, y)$ получаем следующую систему интегросумматорных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = 0, \quad y \leqslant 0, \quad y \geqslant a, \tag{17}$$

$$e^{iky\sin(\alpha)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(\lambda)}{\gamma}e^{i\lambda y}d\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{\gamma_n}\cos\left(\pi n\frac{y}{a}\right), \quad 0 < y < a, \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{i\lambda y}d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\cos\left(\pi n\frac{y}{a}\right), \quad 0 < y < a. \tag{19}$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in R.$$

В силу (17) имеем $F(y) = 0$, $y \leqslant 0$, $y \geqslant a$, так что

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^a F(\zeta) e^{-i\lambda\zeta} d\zeta, \quad \lambda \in R.$$

Согласно (19), имеет место следующее представление функции $F(y)$ на интервале $(0, a)$:

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\pi n \frac{y}{a}\right), \quad 0 < y < a$$

и все искомые коэффициенты фурье-гармоник выражаются через $F(y)$, $y \in (0, a)$

$$C_0 = \frac{1}{a} \int\limits_0^a F(\zeta) d\zeta, \quad C_n = \frac{2}{a} \int\limits_0^a F(\zeta) \cos\left(\pi n \frac{\zeta}{a}\right) d\zeta, \quad n \in N. \tag{20}$$

Переходя к выводу СИУ, продифференцируем интегросумматорное уравнение (18) и зафиксируем (18) в одной (произвольной) точке y_0 интервала $(0, a)$. Имеем

$$ik \sin(\alpha) e^{iky\sin(\alpha)} + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{C(\lambda) e^{i\lambda y}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{C_n \sin\left(\pi n \frac{y}{a}\right)}{\sqrt{n^2 - \varkappa^2}}, \quad 0 < y < a, \tag{21}$$

$$e^{iky_0} \sin(\alpha) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{C(\lambda)}{\gamma} e^{i\lambda y_0} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\gamma_n} \cos\left(\pi n \frac{y_0}{a}\right), \quad 0 < y_0 < a. \tag{22}$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства (21), представив его в виде

$$i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{C(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{i\lambda y} d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i \frac{\lambda}{|\lambda|} e^{i\lambda y} C(\lambda) d\lambda +$$

$$+ i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} - \frac{\lambda}{|\lambda|}\right) e^{i\lambda y} C(\lambda) d\lambda.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства совпадает с преобразованием Гильберта функции $F(y)$, и поскольку $F(y) = 0$, $y \notin (0, a)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\frac{\lambda}{|\lambda|}e^{i\lambda y}C(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{F(\zeta)}{\zeta - y}d\zeta.$$

Второй интеграл преобразуем, подставляя выражение для $C(\lambda)$, $\lambda \in R$ и изменяя порядок интегрирования.

Для преобразования правой части равенства (21) перепишем ее в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{C_n}{\sqrt{n^2 - \varkappa^2}}\sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - \varkappa^2}} - 1\right)C_n \sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right).$$

Используя преобразование Гильберта с ядром котангенс, получаем интегральное представление для первого ряда справа

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{2a}\int_0^a d\zeta F(\zeta)\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2a}(\zeta - y) - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2a}(\zeta + y)\right],$$

а вторую сумму преобразуем, подставляя выражение для C_n, $n \in N$ и изменяя порядок суммирования и интегрирования. Опуская подробности, приведем конечный результат преобразований равенства (21)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a d\zeta\frac{F(\zeta)}{\zeta - y} + \frac{1}{2a}\int_0^a d\zeta F(\zeta)\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2a}(\zeta - y) - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2a}(\zeta + y)\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a d\zeta F(\zeta)K(\zeta, y) = f(y),$$

где

$$K(\zeta, y) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} - 1\right)\sin\lambda(\zeta - y)d\lambda -$$

$$-\frac{2\pi}{a}\sum_{n\in N}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - \varkappa^2}} - 1\right)\cos\left(\pi n\frac{\zeta}{a}\right)\sin\left(\pi n\frac{y}{a}\right),$$

$$f(y) = -ik\sin(\alpha)e^{iky\sin(\alpha)}, \quad y \in (0, a). \tag{23}$$

Полученное СИУ перепишем в “стандартном виде”, сделав замену переменной

$$\zeta \equiv g(t) = \frac{t + 1}{2}a.$$

Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} dt\frac{\mathcal{F}(t)}{t-t_0}+\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} dt\mathcal{F}(t)\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}(t-t_0)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(t+t_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} dt\mathcal{F}(t)\mathcal{K}(t,t_0)=f(g(t_0)),$$

$$\mathcal{K}(t,t_0)=\frac{\varkappa\pi}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{i\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}-1\right)\sin\left(\varkappa\pi\frac{t-t_0}{2}\tau\right)d\tau+\frac{\varkappa\pi}{2}\int\limits_{1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{\tau^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\sin\left(\varkappa\pi\frac{t-t_0}{2}\tau\right)d\tau-\pi\sum_{\substack{n<\varkappa\\ n\in N}}\left(\frac{in}{\sqrt{\varkappa^2-n^2}}-1\right)\cos\left(\pi n\frac{t+1}{2}\right)\sin\left(\pi n\frac{t_0+1}{2}\right)-$$

$$-\pi\sum_{\substack{n\geqslant\varkappa\\ n\in N}}\left[\left(1-\frac{\varkappa^2}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right]\cos\left(\pi n\frac{t+1}{2}\right)\sin\left(\pi n\frac{t_0+1}{2}\right),\quad |t_0|<1. \tag{24}$$

Нетрудно показать, что дополнительному условию (22) можно придать форму

$$\int\limits_{-1}^{1}\mathcal{F}(y)\mathcal{Q}(y)dy=1, \tag{25}$$

где $\mathcal{Q}(y)=A\ln|y-y_0|+R(y)$ и $R(y)$ — гладкая функция.

Решение СИУ (24) при дополнительном условии (25) следует искать в классе функций, рассмотренном в разделе 1. Модификация МДО для численного решения этой задачи (СИУ с дополнительным условием вида (25)) описана в работе [8].

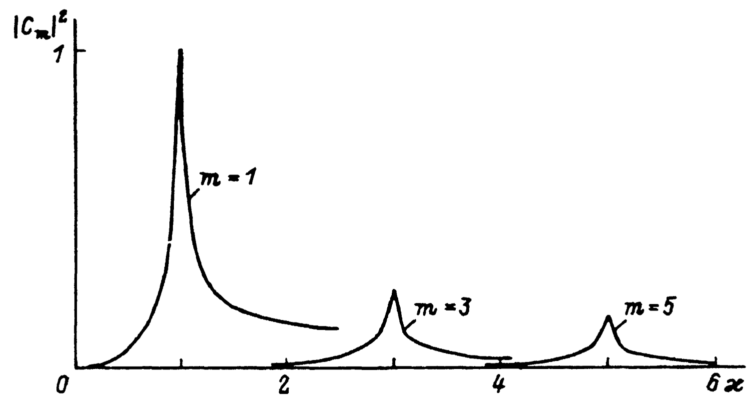

Рис. 2. Зависимость квадратов модулей амплитуд первых трех фурье-гармоник от параметра $\varkappa$.

3. Результаты численного решения задачи в случае ортогонально падающей E-поляризованной волны

На рис. 2 для $a = 1$ приведены зависимости от $\varkappa$ квадратов модулей амплитуд для первых трех фурье-гармоник поля, прошедшего в волноводный канал. Наличие резонансных пиков, отвечающих нечетным целочисленным значениям $\varkappa$, объясняется "включением" гармоник с соответствующими номерами в суммарное поле, прошедшее внутрь волновода. Гармоники с четными номерами для случая E-поляризации падающей волны отсутствуют. Результаты численного эксперимента показали эффективность алгоритма предложенной модификации метода дискретных особенностей. Вычисления проводились при различных значениях n — числа узлов интерполирования. Отмечена устойчивость вычислительного процесса. Результаты счета приведены для значения $n = 10$.

Список литературы

[1] *Воскресенский Г.В., Журав С.М.* // РЭ. 1976. Т. 21. № 7. С. 1390–1395.

[2] *Галстьян Е.А., Горностаева О.В.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 5. С. 99–107.

[3] *Гандель Ю.В.* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вища школа, 1982. № 38. С. 15–18.

[4] *Гандель Ю.В.* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вища школа, 1983. № 40. С. 33–36.

[5] *Гандель Ю.В.* // Вопросы кибернетики. № 124. М.: Наука, 1986. С. 166–183.

[6] *Ахиезер Н.И.* Лекции об интегральных преобразованиях. Харьков, 1984. 120 с.

[7] *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.

[8] *Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн. Учебное пособие. Харьков, 1992. 145 с.