

01;09;10

©1995 г.

## САМОСОГЛАСОВАННОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО УСКОРЕНИЯ ИОНОВ ПУЧКОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

*В.В.Долгополов, Ю.В.Кириченко, С.С.Романов, Ю.В.Ткач*

Харьковский физико-технический институт,  
310108, Харьков, Украина  
(Поступило в Редакцию 26 сентября 1994 г.)

Теоретически исследуется ускорение ионов потенциалом виртуального катода, образованного релятивистскими электронами. Ионы описываются уравнением Власова. Показано, что появление ионов в области виртуального катода может приводить к ускоренному движению последнего без существенного уменьшения градиента потенциала. Это обуславливает эффективное ускорение ионов.

Первые данные по ускорению ионов в сильноточных электронных пучках были получены в работах [1-4]. В этих экспериментах наблюдались большие ускоряющие поля  $\approx 10^6$  В/см, в которых ионы приобретали энергию, более чем на порядок превышающую энергию электронов (см. также [5]). Коллективность характера ускорения ионов, наблюдавшегося в этих работах, является общепризнанным фактом.

Среди различных коллективных механизмов ускорения ионов [6,7] следует отметить возможность ускорения ионов виртуальным катодом, перемещающимся вдоль камеры [8,9]. Первая попытка самосогласованного кинетического описания этого процесса предпринята в [9], где показано, что появление ионов в области дрейфа может приводить к ускоренному движению виртуального катода без существенного изменения крутизны потенциала, что вызывает эффективное ускорение ионов. В этой работе численно решалась одномерная задача Власова-Пуассона для функции распределения ионов. Для решения уравнения Власова использовалась двумерная разностная схема Ланса-Вендроффа с порядком аппроксимации по временному шагу  $O((\Delta t)^2)$ . Наряду с несомненными достоинствами (простота программной реализации, достаточно высокий порядок аппроксимации) этот метод обладает недостатками. Из-за очень больших градиентов функции распределения последняя становится неопределенной на масштабе длин, меньших шага сетки. Численно это проявляется в нефизических осцилляциях функции распределения и появлении ее отрицательных значений.

Свободным от этих недостатков является метод макрочастиц [10,11]. С помощью этого метода в настоящей работе моделируется процесс коллективного ускорения ионов движущимся виртуальным катодом, образованным релятивистским пучком.

Как и в [9], будем считать, что слева в область пространства  $0 < x < l$  влетают электроны с постоянной скоростью  $v_0$  и плотностью  $n_0$ . В отличие от [9] электроны являются релятивистскими. На границе области поддерживается нулевой электростатический потенциал  $\Phi(x)|_{x=0} = \Phi(x)|_{x=l} = 0$ . От плоскости  $x = x_m$  (координата виртуального катода), на которой  $E = -e\Phi(x)|_{x=x_m} = mc^2(\gamma_0 - 1)$ , часть электронов отражается ( $E$  — кинетическая энергия электронов при  $x = 0$ ;  $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ ;  $-e, m_0$  — заряд и масса покоя электрона). В отсутствие ионов в области  $0 < x < l$  устанавливаются стационарные потоки электронов и распределение потенциала. Появление ионов на входе в эту область и их движение вдоль оси  $x$  будут приводить к изменению во времени координаты виртуального катода  $x_m(t)$ , распределения потенциала  $\Phi(x, t)$ , а также плотностей электронных потоков в промежутках  $0 < x < x_m(t)$  и  $x_m(t) < x < l$ . Так как эти изменения протекают за время, много большее времени пребывания электронов в ускоряющем промежутке, плотность электронов, как и в стационарном случае, будет определяться выражением

$$n(x, t) = \frac{J(t)}{v(x, t)}, \quad (1)$$

где  $J(t)$  — арифметическая сумма плотностей падающего и отраженного потоков электронов в области  $0 < x < x_m(t)$ , или плотность прошедшего потока в области  $x_m(t) < x < l$ ;  $v(x, t)$  — скорость электрона в точке  $x$ , определяемая из уравнения

$$mc^2(\gamma_0 - 1) = mc^2(\gamma - 1) - e\Phi(x, t), \quad (2)$$

где

$$\gamma = \left( \frac{1 - (v^2(x, t))}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

В силу сохранения потока электронов величины  $J(t)$  слева и справа от виртуального катода связаны соотношением

$$J_{x < x_m} + J_{x > x_m} = 2n_0v_0 = 2J_0. \quad (3)$$

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi_m(\tau) = \frac{x_m(t)}{l}, \quad \tau = \frac{V_0 t}{l}, \quad V_0 = \sqrt{2E/M}, \quad \eta = \frac{V}{V_0},$$

$$j(\tau) = \frac{1}{J_0} J(t) \Big|_{x > x_m(t)}, \quad q = \frac{4\pi n_0 e^2 l^2}{E},$$

$$\varphi(\xi, \tau) = \frac{e\Phi(x, t)}{E}, \quad f(\xi, \eta, \tau) = \frac{V_0}{n_0} F(x, v, t), \quad (4)$$

где  $Ze$  и  $M$  — заряд и масса иона;  $F(x, v, t)$  — функция распределения ионов;  $V = V_0$  — скорость иона, при которой его кинетическая энергия равна кинетической энергии электрона  $E$ , что соответствует  $\eta = 1$ .

В этих безразмерных переменных уравнение Пуассона и уравнение Власова для ионов примут вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} q \left\{ \sqrt{\frac{1 - \gamma_0^{-2}}{1 - [\gamma_0 + (\gamma_0 - 1)\varphi]^{-2}}} (2 - j(\tau)) - Z \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta f \right\}, \quad 0 < \xi < \xi_m, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} q \left\{ j(\tau) \sqrt{\frac{1 - \gamma_0^{-2}}{1 - [\gamma_0 + (\gamma_0 - 1)\varphi]^{-2}}} - Z \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta f \right\}, \quad \xi_m < \xi < 1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{Z}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0. \quad (7)$$

Уравнения (5), (6) следует дополнить граничными и начальными условиями

$$\varphi(\xi, \tau)|_{\xi=0} = \varphi(\xi, \tau)|_{\xi=1} = 0, \quad \varphi(\xi, \tau)|_{\xi=\xi_m(\tau)} = -1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_m(\tau)} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) при известном потенциале  $\varphi(\xi, \tau)$  моделировалось методом макрочастиц [10, 11]. Мы использовали вариант PIC (particle in cell) метода макрочастиц. Это соответствует линейной интерполяции при раздаче заряда в узлы ячеек  $\xi_n$ , на которые разбивается интервал координат  $0 < \xi < 1$ , и линейной интерполяции при нахождении силы, действующей на макрочастицу. Уравнение характеристик решалось с помощью разностной аппроксимации

$$\frac{\xi_i^{\tau+\Delta\tau} - \xi_i^\tau}{\Delta\tau} - \eta_i^{\tau+\Delta\tau/2}, \frac{\eta_i^{\tau+\Delta\tau/2} - \eta_i^{\tau-\Delta\tau/2}}{\Delta\tau} = -\frac{Z}{2} \frac{d\varphi^0}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_i}, \quad (9)$$

где  $i$  — номер макрочастицы,  $\Delta\tau$  — временной шаг.

Граничное условие  $f(\xi, \eta, \tau)|_{\xi=0}$  моделировалось заданием числа частиц  $N(\tau)$  в момент времени  $\tau$  на границе  $\xi = 0$

$$N(\tau)|_{\xi=0} = N_0 (1 - e^{-\beta\tau}), \quad (10)$$

где  $N_0$  — число макрочастиц в начальный момент времени;  $\beta$  — параметр, определяющий скорость нарастания  $N(\tau)|_{\xi=0}$ .

Макрочастицы на границе  $\xi = 0$  размещались по оси  $\eta$  таким образом, чтобы их скорости были ограничены некоторой постоянной величиной  $\eta_0$ , а максимум плотности макрочастиц приходился на середину интервала

$$0 \leq \eta \leq \eta_0. \quad (11)$$

$$\rho(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta f(\xi, \eta, \tau) \quad (12)$$

в узлах  $\xi_n$ . Зная  $\rho(\xi, \tau)$ , можно перейти к решению уравнения Пуассона (5), (6). Основная трудность при этом заключается в том, чтобы сшить решения уравнений (5) и (6) в точке  $\xi = \xi_m$ . Положение облегчается тем, что вблизи этой точки можно пренебречь ионной плотностью в правых частях уравнений (5), (6). Кроме того, вблизи  $\xi = \xi_m$  электроны, замедляясь, становятся нерелятивистскими. Тогда уравнения (5) и (6) упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = q(2 - j(\tau)) \sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma_0^2}} [1 + \varphi(\xi, \tau)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi < \xi_m, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = qj(\tau) \sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma_0^2}} [1 + \varphi(\xi, \tau)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi > \xi_m. \quad (14)$$

Эти уравнения имеют решения

$$\varphi(\xi, \tau) = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} [q(2 - j(\tau))]^{2/3} \left(\frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma_0^2}\right)^{1/3} (\xi_m(\tau) - \xi)^{4/3}, \quad \xi < \xi_m, \quad (15)$$

$$\varphi(\xi, \tau) = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} [qj(\tau)]^{2/3} \left(\frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma_0^2}\right)^{1/3} (\xi - \xi_m(\tau))^{4/3}, \quad \xi > \xi_m. \quad (16)$$

Путем подбора параметров  $\xi_m(\tau)$  и  $j(\tau)$  в каждый момент времени численные решения уравнений (5), (6) сшивались с функциями (15), (16) с учетом условий (8). Уравнения (5), (6) решались методом Рунге-Кутты [12] с порядком аппроксимации 0  $((\Delta\xi)^4)$ . Полученная функция  $\varphi(\xi, \tau)$  затем использовалась для моделирования решения уравнения (7) методом макрочастиц.

Конкретные вычисления были выполнены для следующих значений параметров:  $Z = 3$ ,  $\gamma_0 = 1.5$ ,  $q = 7.8$ ,  $\eta_0 = 0.5$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $N_0 = 20$ . Результаты приведены на рис. 1-3. На рис. 1 приведена зависимость потенциала  $\varphi(\xi, \tau)$  от  $\xi$  в различные моменты времени  $\tau$ . Видно, что виртуальный катод движется вправо, причем крутизна ускоряющего ионы склона потенциальной ямы практически не изменяется, что подтверждает выводы работы [9]. Неизменность крутизны склона  $\varphi(\xi, \tau)$  левее точки  $\xi_m(\tau)$  связана с образованием и ростом максимума  $\varphi(\xi, \tau)$  вблизи  $\xi = 0$ . Постоянство ускоряющего склона функции  $\varphi(\xi, \tau)$ , а также тот факт, что виртуальный катод движется с ускорением (это следует из рис. 2), и являются причиной того, что ускоряемые ионы приобретают энергию, значительно превышающую энергию электронов [9]. На

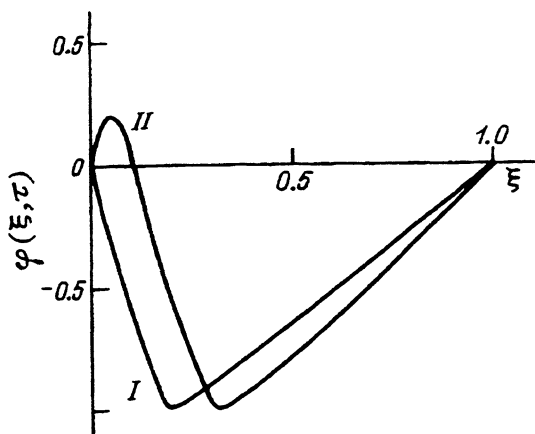


Рис. 1. Потенциал  $\varphi(\xi, \tau)$  в различные моменты времени.  
 I —  $\tau = 0$ , II — 0.08.

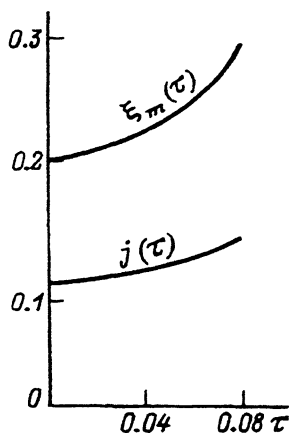


Рис. 2. Зависимость  $\xi_m$  и  $j$  от  $\tau$ .

рис. 2 показано также, как нарастает со временем электронный ток в промежутке  $\xi_m(\tau) < \xi < 1$ .

Из определения величины  $\eta$  (4) следует, что  $\varepsilon_i = \eta^2$  есть кинетическая энергия иона в единицах энергии электрона. На рис. 3 приведено распределение ионов  $N(\varepsilon_i)$  по энергии  $\varepsilon_i$  в момент времени  $\tau = 0.08$

$$N(\varepsilon_i) = \int_0^1 d\xi f(\xi, \tau). \quad (17)$$

Видно, что при выбранных параметрах задачи возможно ускорение ионов до энергии, в несколько раз превышающей энергию электронов.

Представляет интерес определить, какой вклад в  $\varepsilon_i$  дает ускоренное движение виртуального катода. Пусть энергия иона, влетающего в ускоряющий промежуток, равна  $\varepsilon_i^0$ , а энергия иона, находящегося в некоторой точке  $\xi$ , есть  $\varepsilon_i$ . При неподвижной потенциальной яме ион приобретает кинетическую энергию  $Z\varphi(\xi)$ . Тогда приращение кинетической энергии иона  $\Delta\varepsilon_i$ , обусловленное ускоренным движением ямы, будет равно

$$\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_i^0 - Z|\varphi|. \quad (18)$$

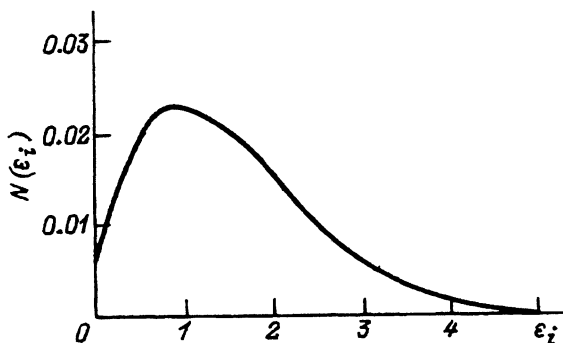


Рис. 3. Распределение ионов по энергии  $N(\varepsilon_i)$  в момент времени  $\tau = 0.08$ .

Анализ распределения ионов в камере показывает, что они распределены в основном на интервале  $0 < \xi < \xi_m$ . Кроме того,  $0 < \varepsilon_i^0 < \eta_0^2$ . Поэтому величина  $\Delta\varepsilon_i$  находится в пределах

$$\varepsilon_i - \eta_0^2 - Z \leq \Delta\varepsilon_i \leq \varepsilon_i. \quad (19)$$

Для примера возьмем  $\varepsilon_i = 5$  (рис. 3). Учитывая, что в нашем расчете  $\eta_0 = 0.5$ ,  $Z = 3$ , получим

$$1.75 \leq \Delta\varepsilon_i \leq 5. \quad (20)$$

Следовательно, имеет место “чистый” эффект ускорения, обусловленный ускоренным движением виртуального катода.

Следует отметить, что расчеты при  $\tau > 0.08$  не были проведены из-за ограниченности ресурсов используемой ПЭВМ, а не срывом виртуального катода, как в [9], который должен произойти при  $\tau > 0.08$ . Вычисления при  $\tau > 0.08$  привели бы к еще большему ускорению ионов потоком релятивистских электронов.

Таким образом, моделирование методом макрочастиц, так же как и вычисления методом разностных схем [9], указывают на возможность эффективного ускорения ионов потенциалом движущегося виртуального катода.

#### Список литературы

- [1] Плютто А.А., Беленцов П.Е., Корон Е.Д. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6. Вып. 3. С. 540–541.
- [2] Graybill S.E., Uglum J.R. // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41. N 1. P. 236–240.
- [3] Rander J., Ecker B., Yonas G. et al. // Phys. Rev. Lett. 1970. Vol. 24. N 6. P. 283–286.
- [4] Luce J.S., Sahlin H.L., Crites T.R. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1973. Vol. 20. N 3. P. 336–343.
- [5] Степаненко И.А., Ткач Ю.В., Пащенко А.В. и др. Препринт ХФТИ АН УССР. № 88-37. Харьков, 1988. 15 с.
- [6] Файнберг Я.Б. // Атомная энергия. 1959. Т. 6. № 4. С. 431–446.
- [7] Курилко В.И., Кучеров В.И. // Тр. IV совещ. по ускорителям заряженных частиц. М., 1974. С. 272.
- [8] Rostoker N. // Intern. Conf. on High Energy Accel. Yerevan, 1970. Vol. 11. P. 509–516.
- [9] Долгополов В.В., Кириченко Ю.В., Романов С.С. и др. Препринт ХФТИ АН УССР. № 91–37. Харьков, 1991. 8 с.
- [10] Хокни Р., Истеуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Наука, 1987. 640 с.
- [11] Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. М.: Наука, 1980. 208 с.
- [12] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1876. 576 с.