01;08

АКУСТИЧЕСКИЙ ЛАЗЕР НА "СВОБОДНЫХ" ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦАХ КАК АНАЛОГ ЛСЭ

С.Т.Завтрак

Научно-исследовательский институт ядерных проблем
при Белорусском государственном университете,
220050, Минск, Беларусь
(Поступило в Редакцию 9 августа 1994 г.)

Предложена теоретическая схема акустического лазера. В качестве активной среды выбран жидкий диэлектрик с распределенными в нем дисперсными диэлектрическими частицами (из другого, чем жидкость, материала). Роль последних могут играть газовые пузырьки, твердые частицы и т.д. Накачка осуществляется переменным электрическим полем, которое за счет электрострикции приводит к изменению объемов частиц. Фазовая группировка первоначально некогерентных излучателей осуществляется за счет сил радиационного давления. Рассчитан временно́й инкремент усиления полезной моды и оценена величина "пускового" значения амплитуды накачки. Предложенная схема аналогична лазеру на свободных электронах (ЛСЭ).

Введение

В настоящее время создано множество типов лазеров — устройств, генерирующих когерентные электромагнитные волны за счет вынужденного испускания или вынужденного рассеяния света активной средой, находящейся в оптическом резонансе. Существующие лазеры охватывают широкий диапазон длин волн — от ультрафиолета до субмиллиметрового. Однако, несмотря на успехи в создании таких приборов для генерации электромагнитных волн, на практике так и не созданы их звуковые аналоги — генераторы когерентного акустического излучения.

В ряде работ были предложены теоретические схемы акустического лазера. Например, в работе [1] на примере газожидкостной смеси были рассмотрены эффекты автосинхронизации (за счет нелинейности) колебаний системы некогерентных механических осцилляторов монопольного типа и усиления акустического поля в содержащей их среде. В работе [2] исследовались звуковые колебания в резонаторе Гельмгольца, заполненном пересыщенным паром. За счет того что конденсация идет более интенсивно, чем испарение, в системе выделяется энергия, часть которой расходуется на усиление акустических колебаний.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы предложить очень простую схему акустического лазера, которая легко может быть реализована экспериментально.

Предлагаемая теоретическая схема является аналогом лазера на свободных электронах (ЛСЭ). Как хорошо известно (см., например, [3]), излучение в ЛСЭ возникает, как правило, при прохождении пучка электронов через магнитное устройство, называемое ондулятором или вигглером, в котором электроны движутся по периодической осциллирующей в пространстве траектории. В качестве ондулятора может быть использовано также некое электростатическое устройство или оптическая волна большой интенсивности. Таким образом, ондулятор играет роль накачки.

Первоначальное излучение осциллирующих в ондуляторе электронов не является когерентным. Однако за счет взаимодействия электронов с полезной электромагнитной волной происходит их группировка. В результате этого их излучение становится когерентным, что приводит к усилению полезной волны.

Схема акустического лазера

В качестве аналога активной среды рассмотрим акустический резонатор, заполненный жидким диэлектриком с равномерно распределенными в нем дисперсными диэлектрическими частицами (из другого, чем жидкость, материала). В качестве жидких диэлектриков могут рассматриваться различные виды масел, а также обыкновенная дистиллированная вода, обладающая, как известно, большой диэлектрической проницаемостью. Роль дисперсных частиц могут играть газовые пузырьки, твердые частицы и т.д.

Если к такой системе приложить постоянное электрическое поле с напряженностью E_0, то произойдут деформация (электрострикция) диэлектриков [4] и соответственно изменение равновесных объемов частиц.

Величина эффективного давления, деформирующего диэлектрическую частицу, равна [4,5]

$$\Delta P = \frac{3}{8\pi}\,\frac{\varepsilon_l E_0^2(\varepsilon_l - \varepsilon_p)}{8\pi(2\varepsilon_l + \varepsilon_p)}. \qquad (1)$$

Здесь ε_l и ε_p — соответственно диэлектрические проницаемости жидкости и частиц. Например, для пузырьков воздуха в дистиллированной воде ($\varepsilon_p \approx 1$, $\varepsilon_l \approx 81$) при $E_0 = 10$ кВ/см величина $\Delta P = 0.5$ кПа.

В качестве волны накачки, действующей на активную среду, выберем периодически изменяющееся электрическое поле $E_0\cos(\Omega t)$. Поскольку электромагнитные волны распространяются в среде практически мгновенно, то можно считать, что на дисперсные частицы действует волна давления, не зависящая от их координат,

$$P(t) = P_н \exp(i\omega t). \qquad (2)$$

При этом круговая частота $\omega = 2\Omega$, амплитуда давления волны накачки $P_н$ легко определяется из формулы (1), постоянный член в (2) опущен.

Будем считать, что длина звуковой волны в жидкости с дисперсными частицами, соответствующая круговой частоте ω, мала по сравнению с размерами резонатора. Под действием волны давления (2) частицы начинают пульсировать и излучать звук. Поскольку первоначально частицы распределены в жидкости равномерно, то волны, излучаемые отдельными частицами, складываясь с различными фазами, дают в среднем нуль.

Однако поскольку активная среда находится в резонаторе, то может сложиться ситуация, когда в нем возбудится акустическая мода, например стоячая волна. Тогда за счет сил радиационного давления, действующих на дисперсные частицы, последние начнут группироваться в сгустки. Более того, хорошо известно, что, например, состояние среды с однородной концентрацией газовых пузырьков неустойчиво не только для стоячей, но даже для бегущей волны [6].

В зависимости от свойств жидкости и дисперсных частиц последние будут группироваться вблизи пучностей или вблизи узлов стоячей волны. В результате группировки излучение станет когерентным, что в свою очередь приведет к усилению полезной моды.

Основные уравнения

Для упрощения расчетов будем считать, что дисперсные частицы имеют форму шариков. Их пульсации под воздействием акустических волн исследовались в работах многих авторов (см., например, [7–9]). В монопольном приближении уравнение пульсаций радиуса отдельной частицы имеет вид [7]

$$R_1(t) = -\frac{A}{\rho_l R_0^2 \omega^2}\Big(P_{\text{н}} \exp(i\omega t) + P(\bar{r}, t)\Big). \qquad (3)$$

Здесь A — амплитуда рассеяния волны на частице, ρ_l — плотность жидкости, R_0 — равновесное значение радиуса частицы, $\bar{r}$ — радиус-вектор ее местоположения в жидкости. В правой части этой формулы в скобках стоит результирующее давление, действующее на частицу. При этом первый член соответствует давлению волны накачки (2), а второй — волне давления, создаваемой пульсациями остальных дисперсных частиц.

В случае газового пузырька в жидкости

$$A = \frac{R_0}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 + i\delta}, \qquad (4)$$

где $\omega_0 = \omega_0(R_0)$ — резонансная круговая частота пульсаций пузырька, δ — безразмерная постоянная затухания.

Общее выражение для амплитуды рассеяния A можно найти, например, в работах [8,9]. Основной целью статьи [9] явился расчет силы радиационного давления, действующей на частицу. Результаты этой работы понадобятся ниже.

Волна давления, распространяющаяся в жидкой среде с фазовыми включениями, в линейном приближении описывается хорошо известным уравнением [6]

$$\Delta P' = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \rho_l \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^\infty 4\pi n(\bar{r}, R_0, t) R_0^2 R_1(t) dR_0, \tag{5}$$

где c_l — скорость звука в чистой жидкости, свободной от частиц; $n(\bar{r}, R_0, t)$ — число дисперсных частиц в единице объема жидкости вблизи точки $\bar{r}$ с равновесными радиусами в интервале от R_0 до $R_0 + dR_0$.

Интеграл в правой части уравнения (5) определяет изменение удельного объемного содержания фазовых включений в жидкости.

Будем считать, что в начальный момент времени ($t = 0$) пространственное распределение дисперсных частиц в жидкости однородно, т.е.

$$n(\bar{r}, R_0, 0) = n_0(R_0). \tag{6}$$

Из (3) и (5) получается уравнение для акустической волны давления, порождаемого накачкой

$$\Delta P' - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - (\alpha + i\beta)P' = (\alpha + i\beta)P_{\text{н}} \exp(i\omega t), \tag{7}$$

где

$$\alpha = \alpha(\bar{r}, t) = -4\pi \operatorname{Re}\int\limits_0^\infty A n(\bar{r}, R_0, t) dR_0, \tag{8}$$

$$\beta = \beta(\bar{r}, t) = -4\pi \operatorname{Im}\int\limits_0^\infty A n(\bar{r}, R_0, t) dR_0. \tag{9}$$

В случае газовых пузырьков имеем

$$\alpha = \alpha(\bar{r}, t) = 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{R_0(1 - \omega_0^2/\omega^2)}{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + \delta^2} n(\bar{r}, R_0, t) dR_0, \tag{10}$$

$$\beta = \beta(\bar{r}, t) = 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{R_0 \delta}{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + \delta^2} n(\bar{r}, R_0, t) dR_0. \tag{11}$$

Если с течением времени пространственное распределение частиц не изменяется и остается однородным, то

$$P'(\bar{r}, t) = P_0'(t) = \frac{(\alpha_0 + i\beta_0)P_{\text{н}} \exp(i\omega t)}{k_l^2 - (\alpha_0 + i\beta_0)}. \tag{12}$$

Здесь $\alpha_0 = \alpha(\bar{r}, 0)$, $\beta_0 = \beta(\bar{r}, 0)$ и не зависят от $\bar{r}$, а величина $k_l = \omega/c_l$. При этом амплитуда результирующего давления также пространственно однородна

$$P_0(t) = P_{\text{н}} \exp(i\omega t) + P_0'(t) = \frac{P_{\text{н}} \exp(i\omega t)}{1 - \left(\frac{\alpha_0 + i\beta_0}{k_l^2}\right)}. \tag{13}$$

Фактор

$$F = \left(1 - \frac{\alpha_0 + i\beta_0}{k_l^2}\right)^{-1} \tag{14}$$

обусловлен коллективным эффектом, связанным с присутствием множества частиц. Уравнение движения отдельной частицы как целого имеет вид [10]

$$\frac{4\pi}{3}\left(\rho_p + \frac{1}{2}\rho_l\right) R_0^3 \frac{d\bar{U}}{dt} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{D} + \bar{F}_B + \bar{F}_r. \tag{15}$$

В левую часть этого уравнения входит наряду с обычной массой частицы $m_p = (4/3)\pi\rho_p R_0^3$ (ρ_p — плотность частицы) также и присоединенная масса жидкости $m_l = (2/3)\pi\rho_l R_0^3$ (см., например, [11]);

$$\bar{F}_1 = -4\pi\left(\rho_p + \frac{1}{2}\rho_l\right) R_0^2 \bar{U} \frac{dR_1}{dt}$$

— сила сопротивления, связанная с изменением объема частицы, которая при усреднении по высокочастотной составляющей дает нуль; $\bar{F}_2$ — выталкивающая сила, которой ввиду малости размеров частиц будем пренебрегать; $\bar{D}$ — сила вязкостного сопротивления, которая при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 2R_0 U\rho_l/\mu_l$ (μ_l — вязкость жидкости) выражается формулой Стокса

$$\bar{D} = -6\pi\mu_l R_0 \bar{U} f_\nu, \tag{16}$$

где f_ν — корректирующий множитель, который равен $f_\nu = 1$ для твердых частиц и $f_\nu = 2/3$ для газовых пузырьков [11]; $\bar{F}_r$ — средняя по времени сила радиационного давления, действующая на частицу.

В общем случае выражение для этой силы очень сложно, однако для рассматриваемой задачи, как показано в Приложении, оно может быть представлено в виде

$$\bar{F}_r = -\frac{4\pi}{3}\left\langle R^3(t)\bar{\nabla} P(\bar{r}, t)\right\rangle f_r, \tag{17}$$

где множитель

$$f_r = \frac{\left(1 + 2\frac{\rho_p}{\rho_l} - 3\frac{\rho_p^2 c_p^2}{\rho_l^2 c_l^2}\right)}{\left(1 + 2\frac{\rho_p}{\rho_l}\right)}, \tag{18}$$

$R(t) = R_0 + R_1(t)$ — текущий радиус частицы; $P(\bar{r}, t)$ — результирующее давление (в точке ее местонахождения); $\bar{F}_B$ — сила Беркнеса радиационного взаимодействия частиц (так называемая вторичная сила Беркнеса [12]), которая обычно мала по сравнению с $\bar{F}_r$ (первичной силой).

После подстановки в (15) всех членов и проведения усреднения по времени приходим к уравнению

$$\gamma \bar{U} = -\alpha \bar{\nabla} |P|^2 + i\beta \Big(P^* \bar{\nabla} P - P \bar{\nabla} P^* \Big), \tag{19}$$

где функции α и β определяются соответственно формулами (8) и (9), коэффициент $\gamma = 12\pi\mu_l R_0 \rho_l \omega^2 N f_\nu / f_r$.

Величина $N(\bar{r}, t)$ — полное число дисперсных частиц в единице объема жидкости, которые для упрощения расчетов будем считать одинаковыми (см. ниже).

Система уравнений (7) и (19) должна быть дополнена уравнением баланса [6] числа частиц в элементе фазового объема $d\bar{r}dR_0$ (эффектами возникновения и исчезновения частиц данного радиуса за счет коагуляции пренебрегаем)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\bar{U}) = 0. \tag{20}$$

Анализ уравнений

Будем рассматривать начальную стадию группировки частиц, когда отклонение функции их распределения $n'(\bar{r}, R_0, t)$ от равновесного значения $n_0(R_0)$ мало́,

$$n(\bar{r}, R_0, t) = n_0(R_0) + n'(\bar{r}, R_0, t). \tag{21}$$

Давление в рассматриваемой системе ищем в виде

$$P(\bar{r}, t) = P_0(t) + \Psi(\bar{r}, t), \tag{22}$$

соответственно $P'(\bar{r}, t) = P_0'(t) + \Psi(\bar{r}, t)$, где $\Psi(\bar{r}, t)$ — искомая полезная акустическая волна, которую считаем малой в сравнении с $P_0(t)$.

Величины давлений $P_0'(t)$ и $P_0(t)$ определяются соответственно формулами (12) и (13) для невозмущенной среды.

Функции $\alpha(\bar{r}, t)$ и $\beta(\bar{r}, t)$ также претерпевают видоизменения

$$\alpha(\bar{r}, t) = \alpha_0 + \alpha'(\bar{r}, t) = \alpha_0 - 4\pi \operatorname{Re} \int_0^\infty A n(\bar{r}, R_0, t) dR_0, \tag{23}$$

$$\beta(\bar{r}, t) = \beta_0 + \beta(\bar{r}, t) = \beta_0 - 4\pi \operatorname{Im} \int_0^\infty A n(\bar{r}, R_0, t) dR_0. \tag{24}$$

После линеаризации (7), а также уравнения, которое получается после подстановки (19) в (20), по возмущению плотности распределения частиц и амплитуде полезной волны приходим к самосогласованной системе двух уравнений

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0)\right)\Psi(\bar{r}, t) = (\alpha' + i\beta')FP_{\text{н}}\exp(i\omega t), \qquad (25)$$

$$\gamma\frac{\partial n'}{\partial t} - n_0\Big((\alpha_0 - i\beta_0)P_0^*\Delta\Psi + (\alpha_0 + i\beta_0)P_0\Delta\Psi^*\Big) = 0. \qquad (26)$$

Будем рассматривать простейший одномерный случай, когда все функции, входящие в (25) и (26), зависят только от одной пространственной координаты (например, от z). Кроме того, для упрощения формул предположим, что все частицы имеют одинаковые радиусы, т.е.

$$n(\bar{r}, \tilde{R}_0, t) = N(\bar{r}, t)\delta\left(\tilde{R}_0 - R_0\right), \qquad (27)$$

где $N(\bar{r}, t)$ — полное число частиц в единице объема жидкости вблизи точки с радиус-вектором $\bar{r}$.

Начальное значение $N(\bar{r}, 0)$ обозначим N_0.

Для решения (25) и (26) сделаем подстановку

$$\Psi(\bar{r}, t) = -\frac{\partial Z(\bar{r}, t)}{\partial t}\exp(i\omega t). \qquad (28)$$

Зависимость $Z(\bar{r}, t)$ и $n'(\bar{r}, t)$ от пространственной координаты z будем искать в виде стоячей волны

$$Z(\bar{r}, t) \sim \sin(k_{\text{eff}} z), \qquad n'(\bar{r}, t) \sim \sin(k_{\text{eff}} z),$$

где эффективное волновое число

$$k_{\text{eff}} = \sqrt{k_l^2 - \alpha_0}.$$

Это позволяет явным образом из уравнения (26) выразить n' через Z и, подставив в (25), получить для Z дифференциальное уравнение 3-го порядка

$$\frac{d^3 Z}{dt^3} + 2i\omega\frac{d^2 Z}{dt^2} + i\beta_0 c_l^2\frac{dZ}{dt} =$$

$$= \frac{FP_{\text{н}}^2 c_l^2 k_{\text{eff}}^2}{\gamma}(\alpha_0 + i\beta_0)\Big\{(\alpha_0 - i\beta_0)F^* Z + (\alpha_0 + i\beta_0)FZ^*\Big\}. \qquad (29)$$

Для дальнейшего анализа необходимо сделать некоторые упрощения. Будем считать, что удельное объемное содержание частиц мало́, т.е. $|\alpha_0| \ll k_l$, а сами частицы находятся вдали от резонанса. Тогда $\beta_0 \ll |\alpha_0|$, $k_{\text{eff}} \approx k_l$.

Если далее представить $Z = a+ib$, где a и b — действительные функции, то в первом приближении по β_0 из (29) можно получить уравнение для функции a (или b)

$$\frac{d^3 a}{dt^3} + 4\omega^2 \frac{da}{dt} = 2\left(\frac{\alpha_0^2 P_{\text{н}}^2 \omega^2}{\gamma} - 2\beta_0\omega c_l^2\right) a. \tag{30}$$

Если искать решение уравнения (30) в виде $a \sim \exp(Gt)$, где G — временнóй инкремент усиления моды, то величина $G \geqslant 0$ при условии

$$P_{\text{н}} \geqslant P_{\text{st}} = \frac{c_l}{|\alpha_0|}\sqrt{\frac{2\beta_0\gamma}{\omega}} = \frac{c_l}{|\operatorname{Re} A|}\sqrt{(-6\operatorname{Im} A)\mu_l\rho_l R_0\omega f_\nu/f_r}. \tag{31}$$

Величина P_{st} соответствует пусковому (или стартовому) току в теории ЛСЭ [3].

Из (31) следует, что $P_{\text{st}} \sim \mu_l^{1/2}$ и $P_{\text{st}} \sim \beta_0^{1/2}$. Физический смысл этих зависимостей понятен. Чем больше вязкость жидкости, тем труднее частицам группироваться, что, естественно, ведет к повышению P_{st}. Поглощение в системе также требует определенных затрат энергии, и с ростом β_0 стартовое значение давления волны накачки также возрастает.

Для газовых пузырьков в жидкости в пределе $\omega \ll \omega_0$ (при этом $\operatorname{Re} A \approx R_0\omega^2/\omega_0^2$, $\operatorname{Im} A \approx -\delta R_0\omega^4/\omega_0^4$) из (31) можно получить

$$P_{\text{st}} \approx 2c_l\sqrt{\mu_l\rho_l\omega\delta}. \tag{32}$$

В случае пузырьков воздуха с радиусами $R_0 = 15$ мкм в дистиллированной воде при частоте $f = 1.5$ кГц получается оценка $P_{\text{st}} = 2.8$ кПа, что соответствует $E_0 \approx 25$ кВ/см.

Аналогичные оценки P_{st} можно получить, если вместо газовых пузырьков использовать дисперсные частицы из твердого диэлектрика с хорошей сжимаемостью.

Выводы

Таким образом, прослеживается глубокая аналогия между ЛСЭ и предложенной схемой лазера на "свободных" дисперсных частицах. В обоих случаях мы имеем дело с такими неотъемлемыми составляющими, как активная среда, фазовая группировка излучателей, стартовый ток. В отличие от ЛСЭ для акустического лазера на пузырьках имеет место проблема коагуляции излучателей за счет сил Беркнеса по мере того, как они начинают группироваться в узлах или пучностях (в зависимости от их размеров) стоячей волны. За счет коагуляции мелкие пузырьки могут объединяться в более крупные и быстро всплывать. Однако, во-первых, как показано в работах [12–14], возможно образование устойчивых кластеров даже из синфазно пульсирующих пузырьков. Экспериментально образование таких кластеров наблюдалось в [15]. Во-вторых, вместо газовых пузырьков можно использовать, как уже отмечалось выше, твердые дисперсные частицы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Радиационная сила, действующая на взвешенную сферическую частицу, записывается в виде

$$\bar{F} = -\int\limits_{S(t)} p d\bar{S} = \rho_l \int\limits_{S(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} - \frac{1}{2c_l^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2\right] d\bar{S}, \qquad (\Pi.1)$$

где интегрирование производится по движущейся поверхности $S(t)$, изменение давления p дается обобщенным интегралом Бернулли, φ — потенциал скоростей жидкости, $\bar{V} = \bar{V}\varphi$ — скорость жидкости.

Используя равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} \varphi d\bar{S} = \int\limits_{S(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\bar{S} + \int\limits_{S(t)} \bar{\nabla}\varphi\left(\bar{\nabla}\varphi \cdot \bar{n}\right) dS, \qquad (\Pi.2)$$

интеграл (П.1) может быть сведен к интегралу по невозмущенной поверхности [6,9]

$$\langle \bar{F} \rangle = -\rho_l \Big\langle \int\limits_{S_0} \bar{\nabla}\varphi \left(\bar{V} \cdot d\bar{S}\right) \Big\rangle + \rho_l \Big\langle \int\limits_{S_0} \left[\frac{V^2}{2} - \frac{1}{2c_l^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2\right] d\bar{S} \Big\rangle. \qquad (\Pi.3)$$

При вычислении радиационной силы давления на частицу автор работы [9] решал задачу о рассеянии звука в граничными условиями, соответствующими равенству нормальных скоростей и давлений внутри и вне шара. При этом он получил

$$R_1(t) = -\frac{1}{3}\frac{k_p^2 R_0 B}{\omega}, \qquad (\Pi.4)$$

где

$$B = \varphi(\bar{r}, t)\frac{1 + (ik_l R_0)^3/3}{\rho_p/\rho_l + (ik_l R_0)^2(1 + ik_l R_0)^3/3}. \qquad (\Pi.5)$$

Здесь $K_p = \omega / c_p$, $\varphi(\bar{r}, t)$ — потенциал скоростей внешнего поля. Результирующая сила радиационного давления записывается в виде [9]

$$\langle F_\alpha \rangle = -\frac{2}{9}\pi\rho_l R_0^3 \left[k_p^2\left(1 + 2\frac{\rho_p}{\rho_l} - 3\frac{\rho_p^2 c_p^2}{\rho_l^2 c_l^2}\right)\mathrm{Re}(BB_\alpha) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\left(3\frac{\rho_p}{\rho_l} + 2\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_l} - 1\right)\mathrm{Re}\left(3B_\gamma B_{\alpha\gamma}^* - B_\alpha B_{\gamma\gamma}^*\right)\right], \qquad (\Pi.6)$$

причем

$$B_\alpha = \left(\frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial X_\alpha}\right)\frac{3\rho_l}{\rho_l + 2\rho_p}\left[1 + \frac{(ik_l R_0)^3}{3}\frac{\rho_l - \rho_p}{\rho_l + 2\rho_p}\right], \qquad (\Pi.7)$$

$$B_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial^2\varphi(\bar{r},t)}{\partial\chi_\alpha\partial\chi_\beta}\right)\frac{5\rho_l}{2\rho_l+\rho_p}\left[1+\frac{2ik_lR_0}{45}\frac{\rho_p-\rho_l}{3\rho_p+2\rho_l}\right]. \qquad (\text{П}.8)$$

Поскольку давление в рассматриваемой системе ищется в виде (22), то в линейном по $\Psi(\bar{r},t)$ приближении можно ограничиться только первым членом в формуле (П.6), так как производные $\partial P_0/\partial\chi_\alpha = \partial^2 P_0/\partial\chi_\alpha\partial\chi_\beta = 0$.

Используя (П.4)–(П.7), путем несложных преобразований можно получить

$$\bar{F}_r = -4\pi R_0^2 \left\langle R_1(t)\bar{\nabla}\Psi(\bar{r},t)\right\rangle f_r,$$

где f_r определяется формулой (18), что в точности соответствует (17).

При $c_p \ll c_l$ формула (17) переходит в хорошо известное выражение для газовых пузырьков в жидкости.

Список литературы

[1] *Кобелев Ю.А., Островский Л.А., Соустова И.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1129–1136.
[2] *Котюсов А.Н., Немцов Б.Е.* // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 123–129.
[3] *Маршалл Т.* Лазеры на свободных электронах. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 240 с.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 664 с.
[5] *Завтрак С.Т., Коробко Е.В.* // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 5. С. 944–949.
[6] *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
[7] *Клей Л., Медвин Г.* Акустическая океанография. М.: Мир, 1980. 580 с.
[8] *Yosioka K., Kavasima Y.* // Acustica. 1955. Vol. 5. N 3. P. 167–173.
[9] *Алексеев В.Н.* // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 129–136.
[10] *Левковский Ю.Л.* Структура кавитационных течений. Л.: Судостроение, 1978. 222 с.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1990. 736 с.
[12] *Заболотская Е.А.* // Тр. ИОФАН (Нелинейные волновые процессы). 1989. Т. 18. С. 121–165.
[13] *Дойников А.А., Завтрак С.Т.* // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 429–432.
[14] *Zavtrak S.T.* // J. Phys. A. 1990. Vol. 23. N 9. P. 1493–1499.
[15] *Кобелев Ю.А., Островский Л.А., Сутин А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. Вып. 7. С. 423–425.