

01;04;09;10

©1995 г.

## О СПЕКТРЕ КОСЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ ЗАМАГНИЧЕННОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Г.И.Загинайлов

Харьковский государственный университет им. А.М. Горького,  
310077, Харьков, Украина  
(Поступило в Редакцию 6 апреля 1994 г.)

Получены простые аналитические формулы для спектра радиальных и азимутальных косых ленгмюровских волн (КЛВ) в замагниченном плазменном волноводе с параболическим профилем радиальной неоднородности. Изучено влияние неоднородности на дисперсионные свойства и топографию полей КЛВ. Показано, что в низкочастотной области  $\omega^2 \ll \omega_p^2|_{r=0}$  дисперсионные свойства КЛВ слабо зависят от формы радиального профиля и определяются погонной плотностью плазменного волновода. В отличие от основной моды энергия высших радиальных и азимутальных мод КЛВ сосредоточена полностью в плазме.

### Введение

Вопросы, связанные со спектральными свойствами и структурой собственных полей плазменных волноводов, играют важную роль в исследованиях и разработке плазменных методов ускорения заряженных частиц и генерации СВЧ излучения. К настоящему времени основные свойства плазменных волноводов изучены достаточно полно [1,2]. Несмотря на последние успехи в области экспериментальной реализации плазменных усилителей на нерелятивистских электронных пучках [3], а также в области релятивистской плазменной электроники [4], некоторые из них начали интенсивно исследоваться лишь недавно. К ним относятся учет конечности магнитного поля и радиальной неоднородности плазменного волновода [5,6], который имеет место во всех реальных устройствах, исследование дисперсионных свойств гибридных волноводов, представляющих собой совокупность обычных структур и плазменных волноводов [7,8], и т.д. Как правило, изучение вышеперечисленных вопросов возможно лишь на основе численных методов. В этой связи основные усилия исследователей были направлены на преодоление различных вычислительных трудностей. В частности, в [6] разработана численная методика анализа собственных волн

в плазменном волноводе с произвольной радиальной неоднородностью и степенью замагниченности. Показано, что радиальная неоднородность приводит к понижению фазовой скорости косых ленгмюровских волн (КЛВ). Указано на возможность сильного резонансного затухания КЛВ и быстрых электромагнитных волн в неоднородном переходном слое. Однако, несмотря на многие преимущества, численные исследования не позволяют добиться столь же полного понимания физики процессов, как аналитические. Поэтому рассмотрение моделей, допускающих получение простых аналитических формул, значительно облегчающих рассмотрение количественных и особенно качественных вопросов, вызывает большой интерес. В работе [9] показано, что для замагниченного плазменного волновода с параболическим радиальным профилем неоднородности

$$n(r) = n_0 \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

для спектра КЛВ можно получить простые аналитические формулы. Однако рассмотрение ограничено аксиально-симметричным случаем, к тому же отсутствует анализ распределения полей и потоков энергии. В настоящей работе показано, что аналогичные аналитические результаты можно получить также и для несимметричного случая. Детально обсуждаются топография полей и потоков энергии высших радиальных и азимутальных КЛВ. Анализируется зависимость спектральных свойств КЛВ от вида радиального профиля. Отметим, что параболический профиль часто успешно использовался ранее для моделирования реальных радиальных профилей плазменных волноводов при изучении многих других вопросов (теоретическая интерпретация резонансов Тонкса-Датнера, [10], влияние радиальной неоднородности на дисперсионные свойства поверхностных волн [11], трансформация КЛВ в двумернонеоднородной плазме [12], аномальное рассеяние КЛВ на ионно-звуковых колебаниях [13] и т.д.). Условие замагниченности

$$\omega_H^2 = \left( \frac{eH_0}{m_e c} \right)^2 \gg \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}$$

часто реализуется в плазменных генераторах и усилительных СВЧ.

### Получение и анализ дисперсионного уравнения для спектра КЛВ

В приближении одножидкостной бесстолкновительной гидродинамики линеаризованную систему уравнений для собственных полей в радиально-неоднородном замагниченном плазменном волноводе можно свести к одному уравнению для продольной составляющей электрического поля.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r E_z(r) \right] - \left( \frac{m^2}{r^2} + \kappa^2 \varepsilon(r) \right) E_z(r) = 0,$$

$$E_\varphi = \frac{k_z m}{\kappa^2 r} E_z, \quad H_\varphi = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad E_r = \frac{k_z}{k} H_\varphi,$$

$$H_r = -\frac{k}{k_z} E_\varphi, \quad \varepsilon(r) = 1 - \frac{\omega_p^2(r)}{\omega^2}, \quad \kappa = (k_z^2 - k^2)^{1/2}, \quad \text{Re } \kappa > 0, \quad (1)$$

$k = \omega/c$ ;  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты; фазовый множитель  $\exp(-im\varphi - ik_z z + i\omega t)$  опущен,

$$\omega_p(r) = \left[ \frac{4\pi e^2 n(r)}{m_e} \right]^{1/2}$$

— плазменная частота.

В случае параболического профиля неоднородности уравнение (1) путем перехода к новой переменной  $x = \kappa r^2/b$  и новой неизвестной функции  $E_z(r) = r^{|m|} e^{-x/2} F(x)$  можно свести к вырожденному гипергеометрическому уравнению [14]

$$xF''(x) + (|m| + 1 - x)F'(x) - \left( \frac{|m| + 1}{2} + \frac{\varepsilon_0 \kappa b}{4} \right) F(x) = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0 = \varepsilon(r)|_{r=0}$ ,  $b = r_0(1 - \varepsilon_0)^{-1/2}$ .

В результате регулярное на оси решение можно выразить через функцию Куммера

$$E_z(r) = Ar^{|m|} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \Phi(a, c, x),$$

где

$$a = \frac{\kappa b \varepsilon_0}{4} + \frac{|m| + 1}{2},$$

$c = |m| + 1$ ,  $A$  — константа.

Сшивая тангенциальные составляющие электромагнитного поля на границе плазменного волновода  $r = r_0$  с вакуумными решениями

$$E_z^v = BK_m(\kappa r), \quad H_\varphi^v = \frac{ik}{\kappa} BK'_m(\kappa r),$$

где  $k_m(x)$  — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка  $m$ , штрих означает производную по аргументу,  $B$  — константа, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[ Q(x_0) - \frac{m}{x_0} + 1 \right] \Phi(a, c, x_0) = \frac{2a}{c} \Phi(a + 1, c + 1, x_0), \quad (3)$$

где  $Q(x_0) = (1 - \varepsilon_0)^{-1/2} K'_m(x_1) K_m^{-1}(x_1)$ ,  $x_0 = \kappa b(1 - \varepsilon_0)$ ,  $x_1 = x_0/(1 - \varepsilon_0)^{1/2}$ .

В дальнейшем ограничимся исследованием корней, составляющих КЛВ ( $x_0 > 0$ ). Анализ (3) начнем со случая  $x_0 \gg 1$ . Используя асимптотические свойства функций Куммера [14], из (3) легко получить следующее соотношение:

$$\sin \pi a = -\frac{x_0^{-2a+c} \exp(-x_0)}{a\Gamma(c-a)\Gamma(-a)} P(x_0, \varepsilon_0), \quad (4)$$

где

$$P(x_0, \varepsilon_0) = \frac{x_0(2 - 3\varepsilon_0)/2(1 - \varepsilon_0) + Q(x_0) - 2m - 1}{x_0 - Q(x_0) + m},$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция.

В области существования КЛВ ( $\varepsilon_0 < 0$ )  $P(x_0, \varepsilon_0) \lesssim 1$ , что позволяет из (4) получить следующее выражение для спектра КЛВ:

$$\kappa_{nm} b|\varepsilon_0| = c_{nm} + O\left(\frac{e^{-x_0} x_0^{c_{nm}/2}}{n!(n+m)!}\right), \quad (5)$$

где  $c_{nm} = 2(2n + |m| + 1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ;  $\kappa_{nm} = (k_{znm}^2 - k^2)^{1/2}$ ;  $k_{znm}$  — волновое число моды КЛВ с радиальным и азимутальным номерами  $n$  и  $m$  соответственно.

Экспоненциальная малость остаточного члена в (5) приводит к тому, что оценка (5) справедлива с достаточной точностью уже при  $x_0 \gtrsim 4$ , что с учетом (5) эквивалентно

$$\frac{1 - \varepsilon_0}{|\varepsilon_0|} c_{nm} \gtrsim 4.$$

Последнее условие выполняется во всей области существования и для всех мод КЛВ. Исключение составляет лишь область низких частот для основной моды ( $n = m = 0$ ). Дополнительный анализ показывает, что при этом оценка (5) остается качественно верной, а существенные отличия будут лишь в области очень низких частот  $\omega/\omega_p \lesssim 10^{-2}$ , в которой приближение одножидкостной гидродинамики в обычной газоразрядной плазме становится некорректным. Для справки отметим, что здесь вместо (5) нужно пользоваться выражением  $\kappa_{00} b|\varepsilon_0| = C(\varepsilon_0)$ , где  $C(\varepsilon_0)$  определяется из трансцендентного уравнения  $C^2 = 4/3 \ln^{-1}(2|\varepsilon_0|^{1/2}/\gamma C)$ ,  $\gamma = 1.78 \dots$  — постоянная Эйлера [14]. Только в этой области и только для основной моды параметр  $x_0$  может быть меньше единицы.

Аналитическая оценка (5) хорошо согласуется с результатами прямого численного анализа. На рис. 1 представлены сравнительные результаты для двух низших мод КЛВ. Расхождение между численными и аналитическими значениями порядка толщины линии и заметно лишь в низкочастотной области.

Таким образом, спектр КЛВ в сильнозамагниченном плазменном волноводе с параболическим радиальным профилем с экспоненциальной точностью описывается формулой (5), за исключением поведения основной симметричной моды при низких частотах, где тем не менее она дает качественно верные результаты.

### Анализ дисперсионных свойств, распределение полей и потоков энергии КЛВ

Непосредственно из (5) можно установить следующие свойства КЛВ: 1) дисперсионные кривые для мод КЛВ, радиальные и азимутальные индексы которых удовлетворяют условию  $2n + |m| = \text{const}$ , с экспоненциальной точностью совпадают; 2) радиальная неоднородность приводит к повышению уровня дисперсии КЛВ по сравнению со случаем кусочно-однородного профиля плотности, т.е. к увеличению параметра  $|(dV_\phi(\omega))/(d\omega)|$ , где  $V_\phi(\omega) = \omega/(k_z(\omega))$  для всех мод спектра, в то же время фазовая скорость понижается, особенно вблизи  $\omega_p$  (рис. 1);

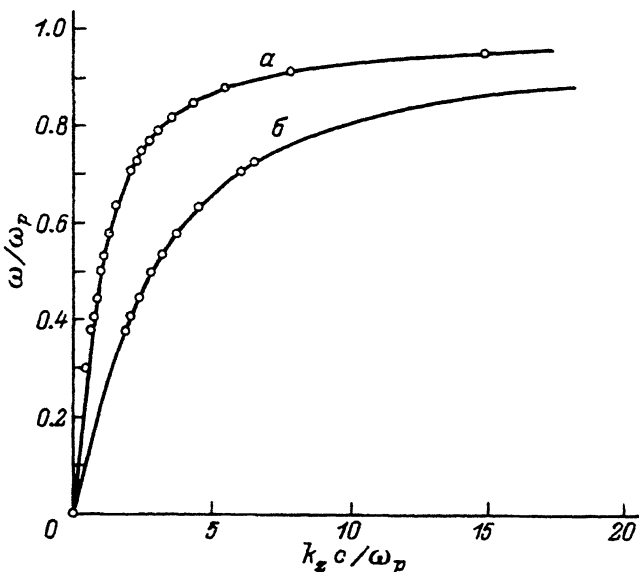


Рис. 1. Дисперсионные кривые КЛВ в неоднородном замагниченном плазменном волноводе.

*a* — основная мода ( $n = 0, m = 0$ ), *b* — первая мода ( $n = 1, m = 0$ ). Кружки — результаты прямого численного анализа (3), сплошная линия — приближенная аналитическая формула (5).

в низкочастотной области  $\omega^2 \ll \omega_p^2$  дисперсионные кривые КЛВ близки к соответствующим кривым для однородного плазменного волновода, имеющего ту же погонную плотность (плотность на единицу длины); 3) поля всех радиальных и несимметричных мод кроме основной полностью сосредоточены в плазме.

Воспользовавшись (5), а также связью функций Куммера с присоединенными полиномами Лагерра, выражения для полей в плазме можно значительно упростить, например

$$E_z^{nm}(r) = A_{nm} \exp \left[ -\frac{c_{nm} r^2 (1 - \varepsilon_0)}{2|\varepsilon_0| r_0^2} \right] L_n^m \left( \frac{c_{nm} (1 - \varepsilon_0) r^2}{|\varepsilon_0| r_0^2} \right), \quad (6)$$

где  $A_{nm}$  — константы,  $L_n^m(x)$  — присоединенные полиномы Лагерра [14].

На рис. 2 приведены типичные структуры полей для основной и первой радиальной мод. Поток энергии КЛВ мод внутри  $S_p$  и вне  $S_v$  плазменного волновода с помощью (1), (7) можно легко найти в явном виде по формулам

$$S_p = \frac{c}{4} \operatorname{Re} \int_0^{r_0} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] r dr, \quad S_v = \frac{c}{4} \operatorname{Re} \int_{r_0}^{\infty} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] r dr. \quad (7)$$

В области  $\omega \sim \omega_p$  поток энергии мод КЛВ сосредоточен в плазме. С понижением частоты поперечные волновые числа КЛВ уменьшаются.

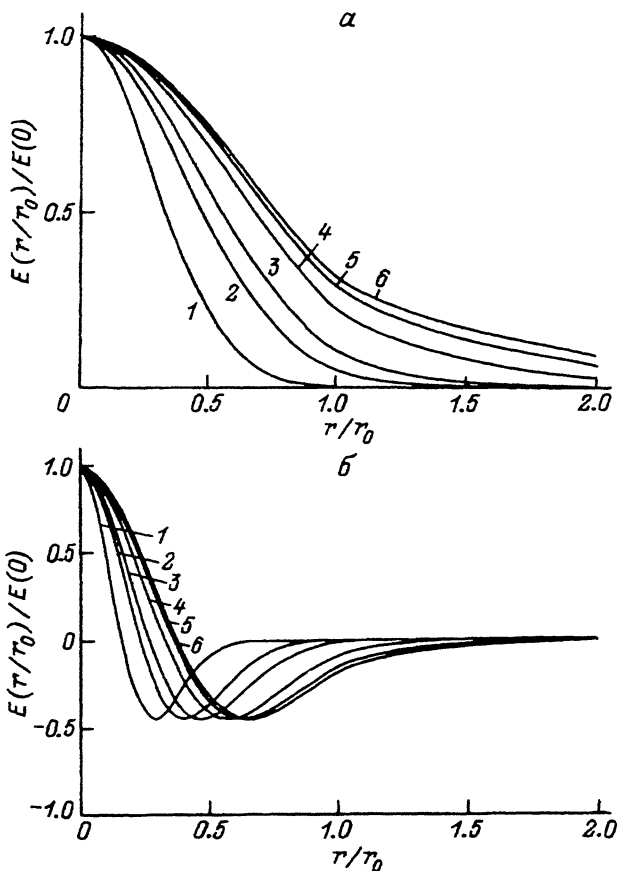


Рис. 2. Радиальное распределение продольной составляющей электрического поля КЛВ в неоднородном замагниченном плазменном волноводе. а — основная мода, б — первая мода; 1 —  $\epsilon_0 = -0.2$ , 2 —  $-0.5$ , 3 —  $-0.8$ , 4 —  $-2$ , 5 —  $-4$ , 6 —  $-6$ .

В области  $\omega^2 \ll \omega_p^2$  для основной моды  $\kappa_{00}r_0 < 1$ , поток энергии в вакууме сравним и может превышать поток энергии в плазме

$$\left. \frac{S_v}{S_p} \right|_{n,m=0} \approx \frac{2\sigma_{00} - 1}{\sigma_{00}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\sigma_{00}}}\right) \gtrsim 1,$$

где  $\sigma_{00} = \ln(2/\gamma\kappa_{00}r_0)$ .

Для высших мод, несмотря на выполнение условия  $\kappa_{nm}r_0 < 1$ , потоки энергий в вакууме пренебрежимо малы по сравнению с потоками энергии в плазме, например

$$\left. \frac{S_v}{S_p} \right|_{n=1,m=0} \approx \left(\frac{2\sigma_{10} - 1}{\sigma_{10}^2}\right) \exp\left[-\frac{1 - \epsilon_0}{|\epsilon_0|} c_{10}\right] \ll 1,$$

$$\left. \frac{S_v}{S_p} \right|_{n=0,m=1} \approx \frac{c_{01}^2(1 - \epsilon_0)^{3/2}}{|\epsilon_0|^2} \exp\left[-\frac{c_{01}(1 - \epsilon_0)}{|\epsilon_0|}\right] \ll 1,$$

где  $\sigma_{10} = \ln(2/\gamma\kappa_{10}r_0)$ .

Это объясняется более сильным, чем экспоненциальный, темпом спадения полей к периферии плазменного волновода (см. (6)). В результате даже при малых поперечных волновых числах  $\kappa_{nm} r_0 < 1$  поля на расстояниях  $\sim r_0$  от оси являются незначительными.

Кратко остановимся на вопросах о затухании КЛВ. Если пренебречь зависимостью  $\text{Im} \epsilon$  от радиуса, то можно по-прежнему пользоваться формулой (5), в которой  $\epsilon_0$  нужно считать комплексной. Что касается механизма резонансного затухания в переходном слое, то хотя в рассматриваемом случае он отсутствует, исходя из характера радиального распределения полей (которые качественно вряд ли изменятся при учете конечности магнитного поля) можно ожидать, что он будет существенным лишь для основной моды.

### Заклучение

Проведенные аналитические исследования спектров КЛВ в замагниченном плазменном волноводе с параболическим профилем радиальной неоднородности позволили получить простые аналитические выражения, позволяющие детально исследовать механизм влияния неоднородности на дисперсионные свойства, топографию полей и распределение потоков энергии мод КЛВ.

Показано, что радиальная неоднородность приводит к понижению фазовой скорости КЛВ по сравнению с случаем однородного плазменного волновода с той же погонной плотностью, определяемой параметром

$$a_0^2 = \frac{2}{c^2} \int_0^{r_0} \omega_p^2(r) r dr.$$

В области низких частот  $\omega^2 \ll \omega_p^2(0)$  этот эффект мал, а дисперсионные свойства слабо зависят от формы поперечного профиля, а также параметра  $\omega/\omega_p(0)$  и определяются только погонной плотностью. Для высших мод ( $n + |m| \geq 1$ ) с экспоненциальной точностью выполняется соотношение

$$\gamma_{\phi nm} = \frac{\sqrt{2} a_0}{c_{nm}},$$

где  $\gamma_{\phi nm} = (1 - V_{\phi nm}^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор моды с номерами  $n, m$ .

Для основной волны  $\gamma_{\phi 00} \sim \ln^{1/2}[\omega_p(0)/\omega]$ . Дисперсионные кривые всех мод КЛВ в этой области близки к соответствующим кривым однородного плазменного волновода с той же погонной плотностью.

Радиальная неоднородность приводит к более сильной локализации полей и потоков энергии внутри плазменного волновода. Лишь для основной моды поток энергии за пределами волновода может быть сравним с потоком энергии внутри плазмы. Энергия всех остальных мод КЛВ практически полностью сосредоточена в плазме.

Начиная с  $|\epsilon_0| \sim 6$  (рис. 2) радиальное распределение полей слабо зависит от  $\epsilon_0$  и практически не изменяется при дальнейшем увеличении  $|\epsilon_0|$ .

Полученные результаты могут существенно облегчить исследование более сложных эффектов с участием КЛВ в неоднородных плазменных волноводах, например формирование солитонов КЛВ, пучковое возбуждение КЛВ, резонансное затухание КЛВ и т.д. Выявленные особенности спектра КЛВ в неоднородных плазменных волноводах могут существенно помочь как в дальнейших теоретических исследованиях спектральных свойств неоднородных плазменных волнопроводов, так и при интерпретации экспериментов по взаимодействию мощных пучков с плазмой [5], а также в идентификации режимов работы плазменных генераторов и усилителей СВЧ.

Е заключение автор выражает благодарность А.Н. Кондратенко и В.И. Ткаченко за интерес к работе и полезные дискуссии, а также А.В. Синюгину за помощь при проведении численных расчетов.

#### Список литературы

- [1] Файнберг Я.Б., Горбатенко М.Ф. // ЖТФ. 1959. Т. 29. Вып. 3. С. 549–562.
- [2] Кондратенко А.Н. Плазменные волноводы. М.: Атомиздат, 1976. 232 с.
- [3] Zavjalov M.A., Martynov V.F., Mitin L.A. // Abstracts. Strong Microwave in Plasma. II Intern. Workshop. Nizhny Novgorod, 1993. P. S-40.
- [4] Карбушев Н.Н., Колосов Ю.А., Половков А.Н. и др. // Физика плазмы. 1992. Т. 18. № 8. С. 1027–1038.
- [5] Файнберг Я.Б., Буц В.А., Егоров А.М. и др. // Плазменная электроника. Киев: Наукова думка, 1989. С. 252–278.
- [6] Карбушев Н.Н., Колосов Ю.А., Половков А.Н. и др. // Физика плазмы. 1991. Т. 18. № 1. С. 54–63.
- [7] Markov P.I., Onishchenko I.N., Ostrousky A.O. et al. // Abstracts Strong Microwave in Plasma. II Intern. Workshop. Nizhny Novgorod, 1993. P. S-36.
- [8] Mitin L.A., Volokitenkova I.L. // Ibid. P. S-39.
- [9] Загинайлов Г.И., Синюгин А.В. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 19. Вып. 1. С. 67–70.
- [10] Vandenplas P., Gould R.W. // Nucl. Fusion Suppl. 1962. Pt. 3. P. 1115.
- [11] Pič D. // Intern. J. Electronics. 1968. Vol. 24. N 5. P. 439–452.
- [12] Голант В.Е., Пилия А.Д. // УФН. 1971. Т. 104. № 3. С. 413–457.
- [13] Гусаков Е.З., Савельев А.Н. // Физика плазмы. 1987. Т. 13. № 12. С. 1411–1421.
- [14] Абрамовиц М., Стиган Н. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.