

03;12  
©1995 г.

## О ЗАРЯДКЕ, ЛЕВИТАЦИИ И ВЗЛЕТЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ НЕОДНОРОДНО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ

*В.А.Саранин*

Глазовский государственный педагогический институт им.В.Г.Короленко,  
427600, Глазов, Россия  
(Поступило в Редакцию 6 сентября 1994 г.)

Экспериментально и теоретически показано, что капля жидкости, испаряющаяся преимущественно снизу и находящаяся в вертикальном электрическом поле, может левитировать и взлетать вверх. При этом ответственным за взлет являются силы Кулона. Одним из возможных механизмов зарядки капли может быть избыточное испарение с нижней границы капли ионов одинакового с верхним электродом знака. Установлено, что такое поведение капель возможно, если отношение радиуса эквивалентной капле сферы к капиллярной постоянной соответствующей жидкости не превышает 0.68. Экспериментально и теоретически найдено, что капля воды с эквивалентным радиусом 2 мм, находясь в электрическом поле напряженностью около 4.5 кВ/см, при взлете имеет заряд около 0.73 нКл. К исследованию равновесных форм левитирующих капель и их устойчивости применена модель идеального диэлектрика. Показано, что результаты, полученные в рамках этой модели, близки к результатам, полученным ранее другими авторами в рамках модели идеального проводника.

### Введение

Проблема поведения заряженных капель во внешнем электрическом поле известна давно и встречается в широком диапазоне явлений от технологических (электродиспергирование) до природных. Поэтому весьма важно исследовать эту проблему всесторонне. Известно, например, что зарядка капель электричеством и их движение в облаке в электрическом поле — это один из решающих факторов формирования грозовых ячеек. Однако воспроизвести в лаборатории все условия, в которых находятся капли в грозовом облаке, или построить полностью адекватную математическую модель практически невозможно. Отдельные аспекты этой проблемы освещены, например, в работах [1-4]. В настоящей работе использован новый подход, в частности экспериментально и теоретически показана возможность левитации или даже взлета вверх неоднородно испаряющейся капли во внешних гравитационном и электрическом полях. Определены условия, в которых этот эффект возможен. Рассчитаны равновесные формы капель и найдены пределы устойчивости равновесия.

## 1. Эксперимент

Для моделирования капли, падающей и испаряющейся в атмосфере во внешнем электрическом поле, была собрана лабораторная установка, схематически показанная на рис. 1, где 1 — капля; 2 — теплоотдающий элемент, ввинченный в жало паяльника 3; 4 — теплоизоляция для увеличения теплосъема с теплоотдающего элемента; 5 — ЛАТР; 6 — термопара, подключенная к милливольтметру 7 для регулировки температуры теплоотдающего элемента; 8 — электрод; 9 — высоковольтный разрядник "Разряд-1". В качестве блока питания разрядника использовался выпрямитель ВС-24М. Опыты с дистиллированной водой проводились при температуре теплоотдающего элемента около 230 °С. Пипеткой капля подавалась на теплоотдающий элемент, зависала над ним на паровой подушке (явление Лейденфроста) и медленно испарялась, уменьшаясь в размерах. Во время такого режима испарения на электрод 8 плавно или скачком подавалось высокое напряжение (до 25 кВ). Величина потенциала электрода оценивалась по показаниям вольтметра выпрямителя. При этом зависимость высоковольтного напряжения от напряжения питания считалась прямо пропорциональной и также было известно, что напряжению питания 12 В соответствует максимальное напряжение 25 кВ. Напряженность поля вблизи капли менялась перемещением по вертикали электрода 8. Независимо от полярности электрода 8 наблюдались следующие эффекты. При плавном увеличении напряжения до 20 кВ капли вели себя двояко: 1) капля подлетала слегка вверх, с ее поверхности вылетали мелкие брызги и она падала обратно на теплоотдающий элемент; 2) капля продолжала испаряться и при поданном напряжении, слегка вытягиваясь вдоль поля, затем по достижении некоторых размеров взлетала на электрод 8. То или иное поведение капли зависело от величины напряженности поля и размеров капли. Аналогично вели себя капли этилового спирта. Часть экспериментов была заснята на видеопленку и фотопленку и будет обсуждена ниже.

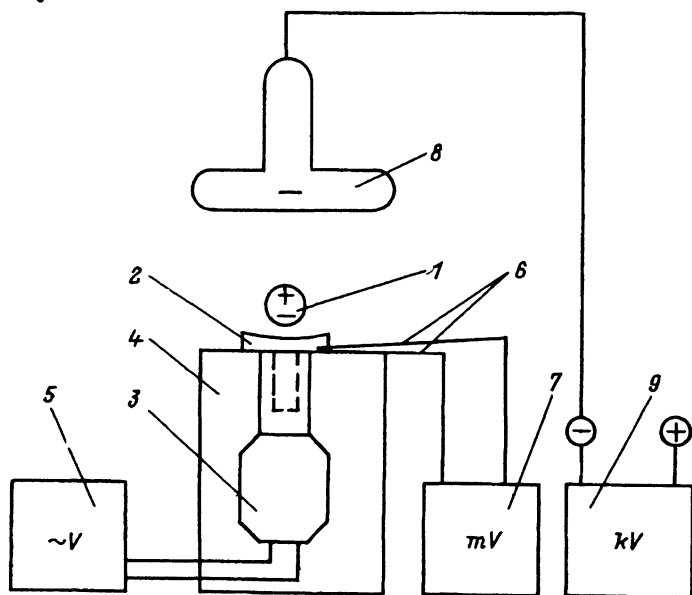


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

## 2. Теория левитации

Взлет капли к электроду может быть обусловлен двумя причинами.

1. Капля во внешнем электрическом поле поляризуется и втягивается в область более сильного поля, т.е. к электроду  $\delta$ . В этом случае условие взлета имеет вид

$$P \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| > mg. \quad (1)$$

Ось  $y$  направлена вертикально вниз,  $P$  — дипольный момент капли.

2. Капля каким-либо образом приобретает заряд  $q$  и под действием силы Кулона взлетает. В первом мультипольном приближении, считая электрическое поле однородным, условие взлета в этом случае можно записать так:

$$qE > mg. \quad (2)$$

Оценим сначала возможность выполнения неравенства (1). Для этого найдем напряженность электрического поля в точке локализации капли, считая, что эта точка находится на оси диска радиуса  $r$ , который равномерно заряжен с плотностью  $\sigma$ . Тогда на расстоянии  $y$  от диска напряженность равна

$$E = 2\pi\sigma k \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{y}\right)^2}} \right), \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3)$$

а градиент напряженности

$$\left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| = \frac{2\pi\sigma k r^2}{y^3 \left( 1 + \left(\frac{r}{y}\right)^2 \right)^{3/2}}. \quad (4)$$

Плотность поверхностного заряда оценим по формуле

$$\sigma = \frac{Q}{\left( 1 + \frac{C_2}{C_1} \right) S_1}, \quad (5)$$

$Q$  — полный заряд электрода, равный

$$Q = \varphi(C_1 + C_2) = \varphi C. \quad (6)$$

Здесь  $S$  и  $C$  — площадь поверхности и емкость дисковой и цилиндрической частей электрода соответственно (рис. 1). Емкости  $C_{1,2}$  рассчитаем, заменив диск сплюснутым, а цилиндр вытянутым эллипсоидами. Тогда [5]

$$C_1 = a_1 \frac{\sqrt{1 - (b_1/a_1)^2}}{\arccos(b_1/a_1)},$$

$$C_2 = b_2 \frac{\sqrt{(a_2/b_2)^2 - 1}}{\text{Arch}(a_2/b_2)}.$$

При параметрах электрода  $a_1 = 2.5$  см,  $b_1 = 0.5$  см,  $a_2 = 1.6$  см,  $b_2 = 0.5$  см получаем  $C = C_1 + C_2 = 4.4$  см =  $4.9 \cdot 10^{-12}$  Ф. В серии опытов, которая обрабатывается в настоящей работе, расстояние  $y$  от электрода до нагревателя было равно  $\sim 1.7$  см, а потенциал электрода  $\varphi$  около 21 кВ. Принимая  $y = 1.7$  см,  $r = 2.5$  см,  $\varphi = 21$  кВ и выполняя дальнейшие расчеты по (3)-(6), найдем

$$\left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| = 2.0 \cdot 10^7 \text{ В/м}^2, \quad E = 3.8 \cdot 10^5 \text{ В/м.} \quad (7)$$

Каплю здесь будем считать почти сферической, тогда дипольный момент шара равен [5]

$$P = \frac{1}{k} R_0^3 E,$$

$R_0$  — радиус капли.

Примем из опытов  $R_0 = 2$  мм, в этом случае величина поляризационной силы

$$P \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| = 6.8 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

Оценка силы тяжести, действующей на каплю, дает  $mg = 3.3 \cdot 10^{-4}$  Н. Таким образом, поляризационные силы не могут быть ответственными за взлет капли.

Перейдем к обсуждению условия (2). Как известно [1-4], равновесие заряженной капли во внешнем электрическом поле может быть неустойчивым. При наступлении неустойчивости капля теряет часть массы и часть заряда, выбрасывая дочерние капельки. По-видимому, именно это обстоятельство обеспечивало поведение капель в экспериментах по схеме 1. Таким образом, для взлета капли до верхнего электрода необходимо еще выполнение условия устойчивости равновесия ее поверхности. Отличие форм левитирующих капель от сферической было невелико, поэтому воспользуемся результатами [1] по исследованию устойчивости равновесия поверхности капли в пределе нулевого эксцентриситета. Тогда равновесие поверхности устойчиво, если

$$W_1^2 + \frac{162}{35} W_2^2 < 1, \quad (8)$$

$$W_1^2 = \frac{kq^2}{16\pi\alpha R_0^3}, \quad W_2^2 = \frac{\varepsilon_0 E_\infty^2 R_0}{4\alpha}.$$

Внешними параметрами задачи являются напряженность поля, заряд и объем (радиус  $R_0$ ) капли. Поэтому запишем условия (2) и (8) в безразмерной форме, выбрав в качестве единицы длины капиллярную постоянную жидкости  $a = \sqrt{2\alpha/\rho g}$  ( $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости). Тогда условия (2) и (8) примут вид

$$W_1 W_2 > 0.5 \cdot B^3, \quad W_1 = \left( \frac{kq^2}{16\pi\alpha a^3} \right)^{1/2}, \quad W_2 = \left( \frac{\varepsilon_0 E_\infty a}{4\alpha} \right)^{1/2},$$

$$W_1^2 B + \frac{W_2^2}{bB^3} < 1, \quad b = \frac{35}{162}, \quad (9)$$

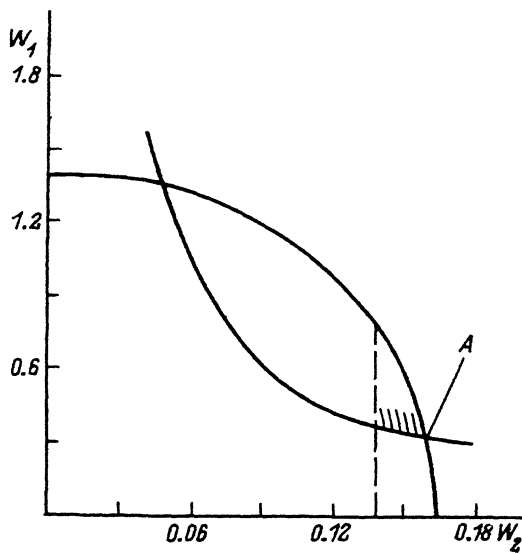


Рис. 2. Нейтральные кривые устойчивости и левитации.

Внутри общей области параметров равновесие устойчиво и возможен взлет капли вверх.

$B$  — число Бонда, определенное соотношением  $B = R_0/a$ ;  $W_1$  и  $W_2$  содержат теперь вместо  $R_0$  капиллярную постоянную  $a$ .

Условие совместной разрешимости (9) имеет вид

$$W_2^4 - bB^3W_2^2 + \frac{bB^{10}}{4} < 0.$$

Отсюда получаем критическое число Бонда  $B_*$  (безразмерный радиус капли), больше которого совместное выполнение (9) невозможно

$$B_* = b^{1/4} = 0.682.$$

Для дистиллированной воды имеем соответствующий критический радиус  $R_{0*} = 2.73$  мм. На рис. 2 представлены нейтральные кривые, построенные по равенствам (9) при  $B = 0.5$ .

### 3. Теория равновесных форм капель и эксперимент

Видео- и фотосъемка позволяла пронаблюдать формы капель во время левитации и взлета. Чтобы сравнить теорию и эксперимент и выяснить условия, в которых находились капли в эксперименте, теоретически построим сечение равновесной поверхности капли, считая ее поверхностью вращения, а внешнее поле однородным. Каплю будем считать наэлектризованной идеальным диэлектриком, находящимся в невесомости. В равновесии выполняется баланс давлений, при этом гидростатическое давление в жидкости формируется из атмосферного, капиллярного и электрического

$$p_{fl} = \alpha K + p(E^2) + p_a, \quad (10)$$

$K$  — полная кривизна поверхности капли;  $p_{fl}$  — постоянная, зависящая от внешних параметров;  $p$  — электрическое давление, которое запишем

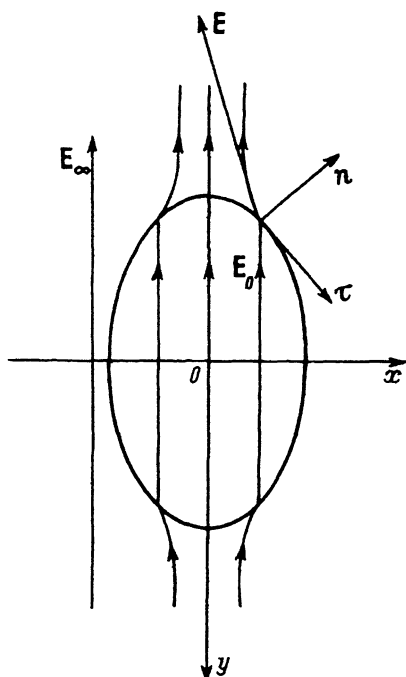


Рис. 3. К постановке задачи об определении равновесных форм левитирующих капель.

в виде [5],

$$p(E^2) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \rho E^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) - (\varepsilon - 1) (\varepsilon E_n^2 + E_\tau^2) \right), \quad (11)$$

$E_{\tau, n}$  — касательная и нормальная составляющие поля на поверхности капли (рис. 3).

Будем считать, что внутри капли поле однородно, как в эллипсоиде [5], и напряженность его равна  $E_0$ . Если плоскость сечения капли обозначить  $x, y$  (рис. 3), то нетрудно получить

$$E^2 = E_0^2, \quad E_\tau^2 = \frac{E_0^2 z^2}{1 + z^2}, \quad E_n^2 = \frac{E_0^2}{1 + z^2},$$

$$z = \frac{dy}{dx}. \quad (12)$$

Стрикционное слагаемое вычислялось двумя способами: используя форму линейной связи  $\varepsilon$  и  $\rho$  и формулу Моссо́ти-Клаузи́са. В каждом из этих случаев соответственно получаем

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = \varepsilon - 1, \quad \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{3} (\varepsilon + 2) (\varepsilon - 1),$$

а для электрического давления имеем выражение

$$p_{1,2} = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)^2 E_0^2}{6(1 + z^2)} f_{1,2}, \quad f_1 = 3, \quad f_2 = (2 - z^2). \quad (13)$$

В качестве единицы измерения длины вновь выберем капиллярную постоянную  $a$ . Тогда обезразмеренное уравнение сечения равновесной поверхности капли преобразуется с учетом (10), (12), (13) к виду

$$\frac{z'}{(1+z^2)^{3/2}} + \frac{z}{x(1+z^2)^{1/2}} + \frac{W^2 f_{1,2}}{(1+z^2)} = -p_0,$$

$$W^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)^2 E_0^2 a}{6\alpha}, \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (14)$$

Известные вычислительные методы и современная вычислительная техника позволяют без труда проинтегрировать это уравнение, однако это делать бессмысленно, так как постоянные  $W$ ,  $p_0$  и объем капли функционально связаны, а эта связь нам неизвестна. Поэтому поступим так. Предположим, что сечение капли в электрическом поле эллипс и запишем его уравнение в виде

$$\frac{x^2}{R^2(1-\delta)^2} + \frac{y^2}{R^2(1+\delta)^2} = 1, \quad (15)$$

$\delta$  — некий параметр, учитывающий деформацию капли.

Условие постоянства объема капли имеет вид

$$R = R_0 ((1-\delta)^2(1+\delta))^{-1/3}, \quad (16)$$

$R_0$  — радиус исходной сферической капли.

Выразим из (15)  $y$  и подставим в уравнение (14). Аналитически не удастся показать, что эллипс удовлетворяет уравнению (14), поэтому потребуем выполнения (15) и (14) в крайних точках  $x = 0$  и  $x = R(1-\delta)$ . Тогда получим уравнения, связывающие между собой  $W$ ,  $p_0$ ,  $R_0$ ,  $\delta$ . При этом оказывается, что независимо от выбора стрикционного слагаемого связь между величиной деформации  $\delta$  и напряженностью поля  $E_0$  получается следующей:

$$W = \frac{4\delta(2+\delta+\delta^2)}{3R(1-\delta^2)^2}. \quad (17)$$

Постоянная  $R$  определяется по (16). Давление же в жидкости, зависящее от постоянной  $p_0$ , как и следовало ожидать, получается различным

$$p_{01} = \frac{2}{R} \left( \frac{1+\delta^2}{(1-\delta)(1+\delta)^2} \right)$$

при линейной связи  $\varepsilon$  и  $\rho$ ;

$$p_{02} = \frac{2}{3R(1-\delta)} \left( \frac{2(1+\delta^2)}{(1+\delta)^2} + \frac{1+\delta}{1-\delta} \right)$$

при связи  $\varepsilon$  и  $\rho$  по формуле Моссо-Клаузиуса.

Для сравнения теории и эксперимента, во-первых, удобнее вместо величины  $\delta$  использовать отношение большей полуоси эллипса к меньшей; которое обозначим  $\beta$ . Тогда

$$\delta = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}. \quad (18)$$

Во-вторых, вместо безразмерного параметра  $W$ , определенного через напряженность поля внутри капли, следует использовать аналогичный параметр  $W_2$ , определенный через напряженность внешнего однородного поля. Это несложно сделать, учитывая известные формулы связи между внешним полем и полем внутри диэлектрического эллипсоида [5]. Получаем

$$W_2 = W \frac{\sqrt{3/2}}{\varepsilon - 1} (1 + (\varepsilon - 1)n^{(x)}),$$

$$n^{(x)} = \frac{1 - e^2}{e^3} (\operatorname{Arth} e - e), \quad (19)$$

$e$  — эксцентриситет, связанный с  $\beta$  соотношением

$$e = \left( \sqrt{\beta^2 - 1} \right) / \beta.$$

Видеозапись и фотографии позволяли пронаблюдать равновесные формы взлетающих капель. На рис. 4 представлены копии профилей капель с видеомонитора, фотографии и соответствующий масштаб ( $a$  — этиловый спирт,  $b$  — дистиллированная вода). Оба кадра 1, 2

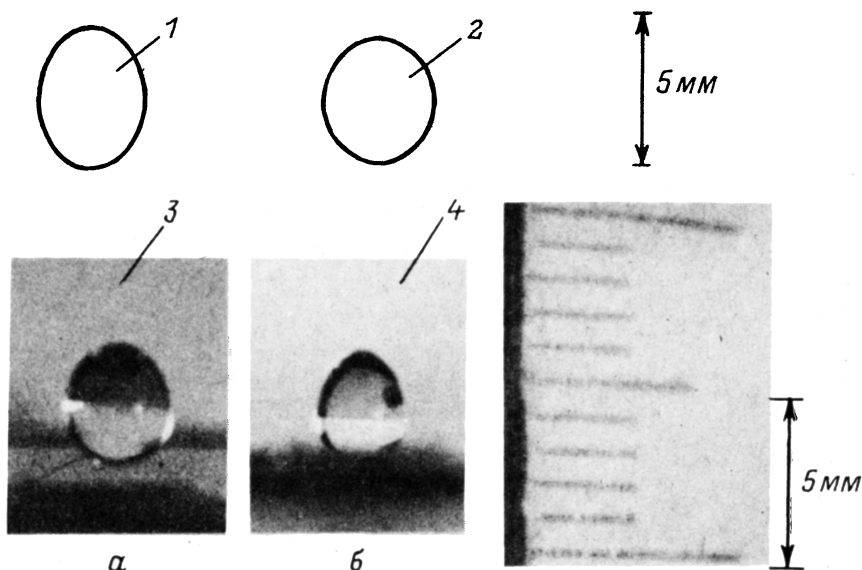


Рис. 4. Формы капель спирта ( $a$ ) и воды ( $b$ ) в момент, предшествующий взлету по результатам видео- и фотосъемки.



соответствуют моменту взлета капля, однако капля спирта, соответствующая радиусу  $R_0 = 2$  мм после подлета на небольшую высоту выбрасывала мелкие капельки и снова падала вниз на нагревательный элемент, тогда как капля воды такого же радиуса взлетала до верхнего электрода. Этот факт подтверждает теорию, так как соответствующие числа Бонда для них равны 0.83 и 0.52. А, как было показано выше, при превышении критического числа  $B_* \approx 0.68$  условия взлета и устойчивого равновесия одновременно невыполнимы.

Измерения размеров всех копий (рис. 4) дают для отношения полуосей соответственно  $\beta_1 = 1.25$ ,  $\beta_2 = 1.06$ ,  $\beta_3 = 1.06$ ,  $\beta_4 = 1.09$ .

Тогда приведенные выше формулы позволяют рассчитать напряженность внешнего поля, в котором капли, согласно развитой здесь теории, имели бы такую форму. Расчеты дают  $E_{1\infty} = 4.82$  кВ/см,  $E_{2\infty} = 4.50$  кВ/см,  $E_{3\infty} = 3.01$  кВ/см,  $E_{4\infty} = 6.13$  кВ/см. Таким образом, независимые измерения и расчеты позволяют заключить, что в представленной серии опытов напряженность поля вблизи нагревательного элемента имела значение в диапазоне  $E_\infty = 3-6$  кВ/см. На рис. 2 значению  $E_\infty = 3.8$  кВ/см соответствует вертикальная прерывистая линия, точке А соответствует значение напряженности  $E_A = 4.5$  кВ/см. Соответствующий точке А заряд капли, найденный из условия  $q_A E_A = mg$  (вода,  $R_0 = 2$  мм), равен  $q_A = 0.73$  нКл.

Таким образом, все вышесказанное позволяет сделать вывод, что опытам с водой соответствовала область параметров, показанная на рис. 2 штриховкой. При этом одним из возможных механизмов зарядки капель может быть преимущественное испарение ионов одинакового с верхним электродом знака с нижней границы капли.

#### 4. Устойчивость

Развитая выше теория позволяет сделать вывод и о пределе устойчивости равновесных эллипсоидных форм капель. На рис. 5 показана зависимость безразмерной напряженности поля  $W_2$  от отношения полуосей (жидкость-вода,  $B = 0.5$ , по (19)). Видно, что при  $\beta = 2.02$   $W_2$  имеет экстремум. Эта экстремальная точка и есть предел устойчивости

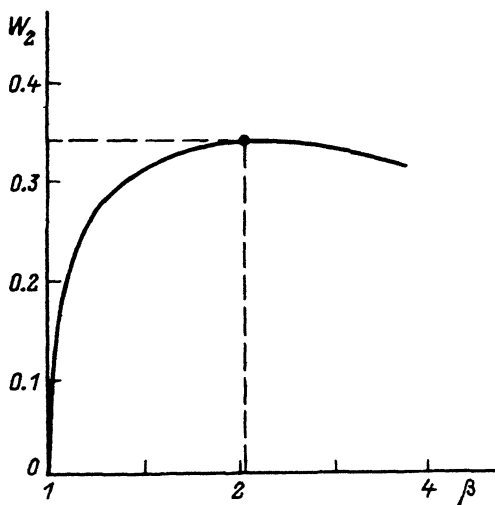


Рис. 5. Зависимость безразмерной напряженности поля от отношения большей полуоси эллипсоида к меньшей.

равновесия капли во внешнем электрическом поле по отношению к осесимметричным возмущениям. Теория, развитая в [1,3] для проводящих капель, дает при  $\epsilon = 0$  и  $W_1 = 0$  предел устойчивости  $W_{2*}(R_0) \approx 0.19$ ,  $R_0 = 2$  мм. Развитая здесь теория для идеальных диэлектриков дает значение критического поля при тех же условиях  $W_{2*}(R_0) = 0.25$  (по рис. 5  $W_{2*}(a) = 0.35$ ). В размерных единицах этому значению  $W_2$  соответствует напряженность поля (вода,  $R_0 = 2$  мм)  $E_{\infty*} = 9.8$  кВ/см. В экспериментах [6] по определению предела устойчивости равновесия капель воды в электрическом поле была найдена экспериментальная зависимость критической напряженности поля и радиуса капли воды  $R_0$

$$E_* = \frac{3875}{\sqrt{R_0}}, \quad [E] = \text{В/см}, \quad [R_0] = \text{см}.$$

При  $R_0 = 0.2$  см получаем  $E_* = 8.7$  кВ/см. Полученные результаты позволяют заключить, что модель капли воды во внешнем электрическом поле как идеального диэлектрика и как проводника весьма близки. Это, очевидно, следствие двух факторов: большого значения  $\epsilon = 81$  и, как установлено выше, независимости форм капель от стрикционно-го слагаемого в выражении для электрического давления.

В заключение отметим, что проведенные экспериментальные и теоретические исследования позволяют сделать вывод о возможности взлета вверх небольших  $B < 0.68$  заряженных капель  $q \approx 0.7$  нКл в сильном вертикальном электрическом поле  $E \approx 4$  кВ/см. При этом одним из возможных механизмов зарядки капель может быть их интенсивное испарение преимущественно снизу во внешнем вертикальном электрическом поле.

Автор выражает признательность А.И.Григорьеву за плодотворное обсуждение работы, Е.С.Агафоновой и С.Л.Барминой за помощь в проведении видео- и фотосъемок.

### Список литературы

- [1] Ширяева С.О. Дробление капель проводящих жидкостей в электрических полях. Автореф. канд. дис. Одесса, 1989.
- [2] Реология суспензий // Сб. статей. М.: Мир, 1975. 333 с.
- [3] Basaran O.A., Scriven L.E. // Phys. Fluids. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795-809.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3-22.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [6] Masky W.A. // Proc. Roy. Soc. A. 1931. Vol. 133. P. 565-566.