

01

©1995 г.

О ДИНАМИКЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ДИССИПАТИВНОЙ БИСТАБИЛЬНОЙ СРЕДЕ

М.В.Огнев, С.В.Петровский, В.М.Простокишин

Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН,
117851, Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 17 ноября 1993 г.)

В окончательной редакции 6 февраля 1995 г.)

Рассматривается процесс образования волны переключения в активной бистабильной среде. Показано, что для широкого подкласса переходных начальных условий волна переключения возникает в результате нелинейного взаимодействия двух "парциальных" волн. Динамика среды при этом представляет собой последовательность двух промежуточно-асимптотических режимов, причем длительность двухволнового этапа в некоторых случаях оказывается того же порядка, что и длительность одноволнового этапа. Для случая среды с кубической нелинейностью получено точное аналитическое выражение, описывающее смену волновых режимов, вычислены скорости волн.

Введение

Возникновение и распространение волн в нелинейных активных диссипативных средах рассматривались впервые в работах [1-3]. Волновые режимы в бистабильных средах подробно рассмотрены в [4-6]. Для таких сред известно [5], что асимптотическим режимом для начальных условий переходного типа является волна переключения, переводящая систему из метастабильного состояния в стабильное. В данной работе впервые показано, что для определенного подкласса переходных начальных условий динамика активной среды представляет собой смену двух различных промежуточно-асимптотических режимов: двухволнового и одноволнового, когда волна переключения возникает как результат взаимодействия двух "парциальных" волн. При этом, принимая во внимание конечность размеров реальных систем, длительность двухволнового этапа в некоторых случаях оказывается того же порядка, что и длительность одноволнового этапа.

Теоретическое рассмотрение проведено для активной среды с кубической нелинейностью. Показано, что соответствующее диффузионно-реакционное уравнение с помощью подстановки Коула-Хопфа [7] сводится к системе линейных дифференциальных уравнений. Указанным методом получено точное аналитическое выражение, описывающее смену волновых режимов; вычислены скорости волн.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим активную среду, описываемую нелинейным диффузионно-реакционным уравнением

$$u_t = K u_{xx} + \left(\frac{1}{\tau}\right) Q(u), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — функция, характеризующая состояние среды (индексы обозначают дифференцирование по соответствующему аргументу); K — коэффициент диффузии; τ — параметр размерности времени; $Q(u)$ — нелинейный источник, описывающий кинетику системы.

В данной работе ограничимся рассмотрением источника в виде кубического трехчлена

$$Q(u) = a_1 u + a_2 u^2 - u^3, \quad (2)$$

где a_1 и a_2 — параметры.

В физической системе, описываемой уравнениями (1), (2), нулям функции $Q(u)$ соответствуют стационарные пространственно однородные состояния. Кинетика системы в значительной мере определяется наличием стационарных состояний и их устойчивостью. На рис. 1 приведена карта на плоскости параметров (a_1, a_2) . Кривая aOb , заданная уравнением $a_2^2 + 4a_1 = 0$, и координатные оси разбивают плоскость на несколько областей. Для значений параметров из областей 1, 2, 5, 6 уравнения (1), (2) описывают поведение бистабильной среды, т. е. среды, в которой существует три стационарных пространственно однородных состояния $u \equiv u_1$, $u \equiv u_2$ и $u \equiv u_0 = 0$, одно из которых является неустойчивым (рис. 2, а и б). Для областей 3 и 4 в системе

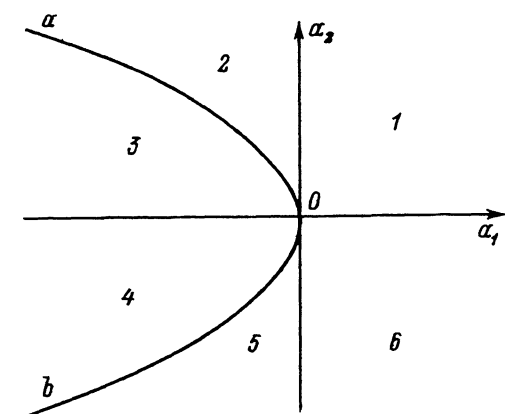


Рис. 1. Плоскость параметров модели (различным областям отвечают активные среды с разными свойствами).

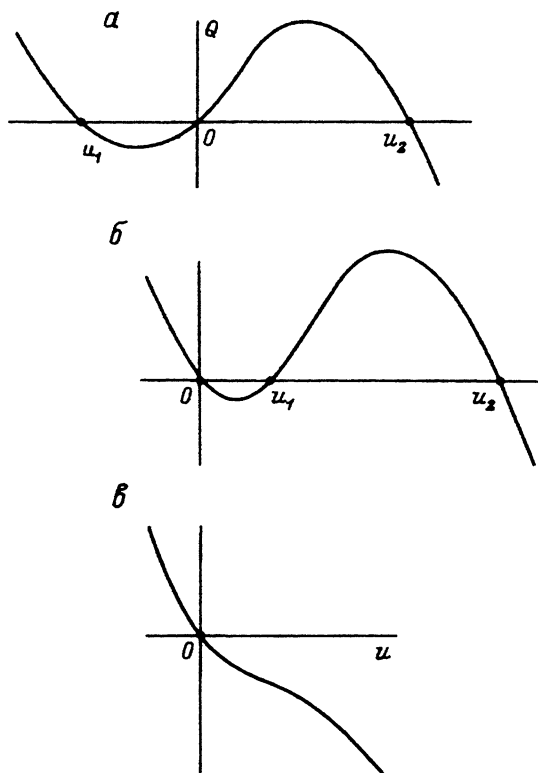


Рис. 2. Качественный вид функции $Q(u)$ при различных значениях параметров модели (для верхней полуплоскости $a_2 > 0$). $a, б$ — бистабильная среда (соответственно области 1 и 2 на рис. 1); $в$ — моностабильная среда (область 3).

имеется только тривиальное стационарное однородное устойчивое состояние $u \equiv u_0 = 0$ (рис. 2, в). Заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением динамики системы в областях 1-3, поскольку уравнения (1), (2) инвариантны относительно преобразования

$$u \rightarrow -u, \quad a_2 \rightarrow -a_2. \quad (3)$$

Вводя безразмерные переменные $t' = t/\tau$, $x' = x/(K\tau)^{1/2}$, из (1), (2) получаем (далее штрихи опущены)

$$u_t = u_{xx} + a_1 u + a_2 u^2 - u^3. \quad (4)$$

Следуя [7], будем искать решение уравнения (4) в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{z_x - \mu}{z + z_0}, \quad (5)$$

где z_0 и μ — постоянные, $z(x, t)$ — новая функция.

Подставляя (5) в (4) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $(z + z_0)$, получаем для z систему линейных уравнений

$$z_{xxx} - \left(\frac{a_2}{\sqrt{2}}\right) z_{xx} - \left(\frac{a_1}{2}\right) z_x = 0, \quad (6)$$

$$z_t = 3z_{xx} - (a_2\sqrt{2})z_x, \quad (7)$$

а $\mu = \pm\sqrt{2}$. В силу отмеченной выше инвариантности относительно преобразования (3) достаточно рассмотреть случай $\mu = \sqrt{2}$.

Характеристическое уравнение, соответствующее (6), запишем в виде

$$\lambda \cdot \left[\lambda^2\sqrt{2} - a_2\lambda - \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}} \right) \right] = 0. \quad (8)$$

Свойства решения $z(x, t)$ уравнения (6) зависят от знака дискриминанта $D = a_2^2 + 4a_1$.

2. Формирование волны переключения: двухволновой механизм

Рассмотрим случай $D > 0$ (что соответствует областям 1, 2, 5, 6 на рис. 1). Этот случай соответствует бистабильной среде и представляется наиболее интересным с физической точки зрения. Выражение для z имеет вид

$$z(x, t) = f_0(t) + f_1(t) \exp(\lambda_1 x) + f_2(t) \exp(\lambda_2 x). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), для функций f получаем следующие выражения:

$$f_0(t) = C_0,$$

$$f_i(t) = C_i \exp(\gamma_i t), \quad \gamma_i = 3\lambda_i^2 - (a_2\sqrt{2})\lambda_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где C_i — постоянные, определяемые видом начального условия.

Таким образом, полученное точное решение уравнения (4) имеет вид

$$u(x, t) = \sqrt{2} \frac{B_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 x + \gamma_1 t) + B_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 x + \gamma_2 t)}{1 + B_1 \exp(\lambda_1 x + \gamma_1 t) + B_2 \exp(\lambda_2 x + \gamma_2 t)}, \quad (11)$$

где $B_i = C_i / (C_0 + z_0)$, $i = 1, 2$.

Остановимся подробнее на свойствах решения (11). Выражение (11) будет непрерывным для любых значений x и t , если $B_1 > 0$, $B_2 > 0$. В этом случае ему можно придать следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{u_1 \exp(\lambda_1 \xi_1) + u_2 \exp(\lambda_2 \xi_2)}{1 + \exp(\lambda_1 \xi_1) + \exp(\lambda_2 \xi_2)}, \quad (12)$$

где $\xi_1 = x - v_1 t + \phi_1$, $\xi_2 = x - v_2 t + \phi_2$; $v_1 = -\gamma_1 / \lambda_1 = (a_2 + 3D^{1/2}) / 2\sqrt{2}$, $v_2 = -\gamma_2 / \lambda_2 = (a_2 - 3D^{1/2}) / 2\sqrt{2}$, $i = 1, 2$; $\phi_{1,2}$ — начальные фазы.

Решение вида (12) было получено другим способом в работе [8].

Начальное условие, при котором в системе реализуется режим (12), имеет вид

$$u(x, 0) = \frac{u_1 \exp(\lambda_1 x + \phi_1) + u_2 \exp(\lambda_2 x + \phi_2)}{1 + \exp(\lambda_1 x + \phi_1) + \exp(\lambda_2 x + \phi_2)}. \quad (13)$$

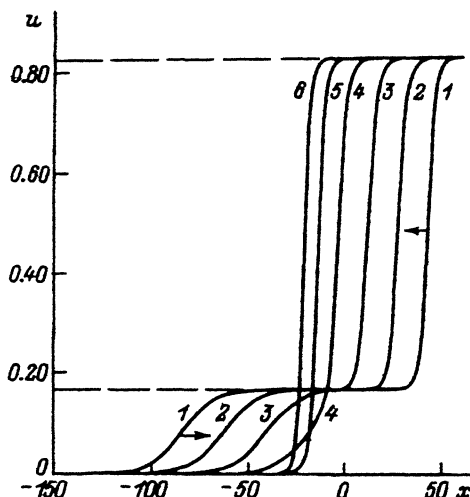


Рис. 3. “Двухволновой” механизм образования волны переключения в бистабильной среде; показаны профили решения (12) (в безразмерных координатах) для различных последовательных моментов времени (1-6).

Профили решения (12) для различных последовательных моментов времени показаны на рис. 3 (при значениях параметров $a_1 = -0.14$, $a_2 = 1.0$, $\phi_1 = 10$, $\phi_2 = -10$; стрелками показано направление распространения волн, штриховыми линиями — положения стационарных однородных состояний). Выражение (12), таким образом, описывает взаимодействие двух “парциальных” волн переключения из промежуточного неустойчивого состояния соответственно в “верхнее” и “нижнее” устойчивые. В общем случае, однако, одно из этих состояний не является устойчивым относительно возмущений достаточно большой амплитуды [4,9], в результате взаимодействия образуется одна волна переключения, переводящая систему в то состояние, которое является абсолютно устойчивым. Направление распространения этой волны определяется знаком величины

$$M = \int_{u_{\text{down}}}^{u_{\text{up}}} Q(u) du \quad [6].$$

Используя (12), можно получить выражения для скоростей волн. В области фронта “нижней” волны имеем $\xi_1 \sim 1$, $\xi_2 \ll 1$, поэтому

$$u(x, t) \cong \frac{u_1 \exp(\lambda_1 \xi_1)}{1 + \exp(\lambda_1 \xi_1)} \quad (14)$$

и, следовательно, нижняя волна распространяется со скоростью v_1 .

В области фронта “верхней” волны имеем $\xi_2 \sim \xi_1$, $\xi_1 \gg 1$. В этом случае получаем

$$u(x, t) \cong \frac{u_1 + u_2 \exp(\lambda_2 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1)}{1 + \exp(\lambda_2 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1)}, \quad (15)$$

где

$$\lambda_2 \xi_2 - \lambda_1 \xi_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \left(x + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\lambda_2 - \lambda_1} t + \phi_0 \right). \quad (16)$$

Отсюда скорость верхней волны $v = -(\gamma_2 - \gamma_1)/(\lambda_2 - \lambda_1) = -a_2/\sqrt{2}$. Таким образом, парциальные волны всегда бегут навстречу друг другу с суммарной скоростью $v_{\text{res}} = |v_1| + |v| = (3/2\sqrt{2})(a_2 + 3D^{1/2})$.

Далее, поскольку $\gamma_2 > \gamma_1$ (при $a_2 > 0$), то на достаточно больших временах имеем $\lambda_2 \xi_2 \gg \lambda_1 \xi_1$ и

$$u(x, t) \cong \frac{u_2 \exp(\lambda_2 \xi_2)}{1 + \exp(\lambda_2 \xi_2)}. \quad (17)$$

Следовательно, v_2 — скорость волны переключения, образовавшейся после взаимодействия “парциальных” волн. Несложно показать, что $v_2 > 0$ при $M < 0$ (“волна гашения”) и $v_2 < 0$ при $M > 0$ (“волна поджигания”).

Важно отметить, что двухволновое решение (12) описывает динамику системы не только для специального начального условия вида (13). Уравнение (4) с начальными условиями различного вида решалось нами численно конечно-разностным способом. Опираясь на результаты расчетов, можно утверждать, что решение уравнений (1) и (2) выходит на режим (12) также для начальных распределений из некоторого класса, например для функций вида

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ p(x), & x_1 < x < x_1 + \Delta x_1, \\ u_1, & x_1 + \Delta x_1 < x < x_2, \\ q(x), & x_2 < x < x_2 + \Delta x_2, \\ u_2, & x > x_2 + \Delta x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $x_1, x_2, \Delta x_1, \Delta x_2$ — параметры; $p(x), q(x)$ — некоторые функции, такие что $0 < p(x) < u_1, u_1 < q(x) < u_2$. В том случае, когда в начальный момент времени области спадания $[x_1, x_1 + \Delta x_1]$ и $[x_2, x_2 + \Delta x_2]$ разнесены достаточно далеко, сначала образуются две парциальные волны, только после их взаимодействия возникает волна переключения, переводящая систему в абсолютно устойчивое состояние. Заметим, что в асимптотическом пределе бесконечно далеко разнесенных “ступеней” начального профиля (18) сходимость к волновому решению (для каждой в отдельности парциальной волны) следует также из результатов работы [10].

Определение вида соотношения, определяющего значения параметров задачи, при которых отчетливо прослеживается двухволновой режим, представляет собой сложную задачу и выходит за рамки данной работы. В качестве необходимого (но не всегда достаточного) условия можно указать следующее:

$$\max(\Delta_{\text{fr}}^{(d)}, \Delta_{\text{fr}}^{(u)}) \ll |x_2 - x_1|, \quad (19)$$

где для ширин фронтов нижней $\Delta_{\text{fr}}^{(d)}$ и верхней $\Delta_{\text{fr}}^{(u)}$ парциальных волн из явных выражений (14)–(16) получаем

$$\Delta_{\text{fr}}^{(d)} \sim \frac{1}{u_1}, \quad \Delta_{\text{fr}}^{(u)} \sim \frac{1}{u_2 - u_1}. \quad (20)$$

Принимая во внимание конечность размеров реальных динамических систем, можно оценить длительность двухволнового T_{2w} и одноволнового T_{1w} этапов. Пусть активная среда находится в "трубе" длины L . Соотношение величин T_{2w} и T_{1w} зависит от значений параметров задачи. Нетрудно видеть, что при $M \cong 0$ (т.е. при $a_1 \cong (-2/9)a_2^2$), когда $v_2 \cong 0$, всегда $T_{2w}/T_{1w} \ll 1$. Однако для случая $u_1 \cong 0$ (при $a_1 \cong 0$) имеем $v_{\text{res}} \cong 3a_2/\sqrt{2}$, $v_2 \cong -a_2/\sqrt{2}$. Полагая, что в начальный момент времени парциальные волны находятся на противоположных концах "трубы", получаем $T_{2w} \sim L/|v_{\text{res}}| \cong L\sqrt{2}/3a_2$, $T_{1w} \sim 2L/3|v_2| \cong L2\sqrt{2}/3a_2$, $T_{2w}/T_{1w} \cong 1/2$, т.е. длительность этапов оказывается одного порядка.

Заключение

Метод, рассмотренный в разделе 1, позволяет получить несколько различных типов аналитических решений уравнений (1), (2) в зависимости от значений параметров a_1 и a_2 (см. Приложение). Эти решения, однако, не являются непрерывными при всех значениях x и t , и, по-видимому, не представляют большого физического интереса.

Заметим также, что, как показывают результаты проведенных нами численных экспериментов, двухволновой механизм не является прерогативой системы с кинетикой, описываемой кубическим полиномом. Подобная двухволновая динамика имеет место и для бистабильных сред с другой кинетикой, хотя, естественно, профили волн уже не будут иметь вид (12). Рассмотренный механизм, таким образом, является достаточно общим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 93-05-14113.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Другие точные решения уравнения (4)

1) $D < 0$ (области 3 и 4 на рис. 1). В этом случае решение $u(x, t)$ уравнения (4) имеет вид

$$u(x, t) = \sqrt{2} \frac{\alpha A_1(x, t) - \beta A_2(x, t)}{\exp(-\alpha x) + A_1(x, t)}, \quad (\text{П1})$$

где

$$A_1(x, t) = f_1(t) \cos(\beta x) + f_2(t) \sin(\beta x),$$

$$A_2(x, t) = f_1(t) \sin(\beta x) - f_2(t) \cos(\beta x),$$

$$f_1(t) = B_1 \exp \left[(\alpha^2 - \beta^2) (1 + t\sqrt{2}) \right] + B_2 \exp \left[(\alpha^2 - \beta^2) (1 - t\sqrt{2}) \right], \quad (\text{П2})$$

$$f_2(t) = B_1 \nu \exp \left[(\alpha^2 - \beta^2) (1 + t\sqrt{2}) \right] + B_2 \nu \exp \left[(\alpha^2 - \beta^2) (1 - t\sqrt{2}) \right], \quad (\text{П3})$$

где $\nu = (\alpha^2 - \beta^2) / \alpha\beta\sqrt{2}$; $\alpha = 2^{-3/2}a_2$; $\beta = 0.5|D|^{1/2}$; B_1 и B_2 — константы, определяемые видом начального условия.

2) Если $D = 0$ (линия aOb на рис. 1) и характеристическое уравнение имеет кратные корни, то решение уравнения (4) записывается в виде

$$u(x, t) = \sqrt{2} \frac{\lambda B_1 + (1 + \lambda x + 2\lambda^2 t) B_2}{\exp(\lambda^2 t - \lambda x) + (x + 2\lambda t) B_2 + B_1}, \quad (\text{П4})$$

где $\lambda = 2^{-3/2} a_2$.

3) В случае $a_1 = 0$ имеем $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \equiv \lambda = a_2/\sqrt{2}$. В этом случае решение уравнения (4) имеет вид

$$u(x, t) = \sqrt{2} \frac{B_1 + \lambda B_2 \exp(\lambda x - \lambda^2 t)}{1 + (x - 2\lambda t) B_1 + B_2 \exp(\lambda x - \lambda^2 t)}. \quad (\text{П5})$$

4) Вырожденный случай $a_1 = a_2 = 0$. При этом $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и решение имеет вид

$$u(x, t) = \sqrt{2} \frac{B_1 + 2B_2 x}{1 + 6B_2 t + B_1 x + B_2 x^2}. \quad (\text{П6})$$

Приведенные здесь решения, вообще говоря, не являются непрерывными для всех значений x и t . Они обращаются в бесконечность за конечное время, зависящее от параметров начального распределения, и описывают так называемые "режимы с обострением" (см., например, [11]).

Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. Вып. 6. С. 1-26.
- [2] Fischer R. // Ann. of Eugenics. 1937. Vol. 7. P. 355-369.
- [3] Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. // Журнал физ. химии. 1938. Т. 12. № 7. С. 100-105.
- [4] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Мазвिलाдзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
- [5] Вольперт А.И. // Избранные труды. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1987. С. 333-358.
- [6] Лоскутов А.Ю., Мизайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [7] Hopf E. Comm. Pure and Appl. Math. 1950. Vol. 3. P. 201.
- [8] Данилов В.Г., Субочев П.Ю. // ТМФ. 1991. Т. 89. № 1. С. 25-47.
- [9] Виноградов М.Е., Баренблатт Г.И., Горбунов А.Е., Петровский С.В. // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 4. С. 509-512.
- [10] Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. // ПММ. 1957. Т. 21. № 6. С. 856-859.
- [11] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Мизайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.