07
©1995 г.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

М.Ю.Волокобинский

Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. М.А.Бонч-Бруевича
191065, Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 27 мая 1994 г.)

Рассмотрены общие закономерности распределения электрического поля в структурах на основе градиентных материалов, физические свойства которых являются степенной функцией координат.

Градиентные материалы с показателем преломления n и диэлектрической проницаемостью ε, плавно изменяющимися с координатами, широко применяются в интегральной оптике при изготовлении световодов, фокусирующих, рассеивающих и преломляющих систем [1,2]. При разработке способов производства новых приборов и элементов электронной техники на базе градиентных материалов необходимо контролировать зависимости n и ε от координат. Контроль n обычно осуществляется традиционными оптическими методами, а ε — путем измерения емкости с помощью подвижного зонда малой площади, перемещаемого по поверхности плоского слоя из неоднородного диэлектрика, другая поверхность которого металлизирована, или емкости между двумя подвижными зондами. Расчет электрического поля и емкости в случае неоднородного по площади электродов образца приведен в [3].

Ниже исследуются электрические поля в плоском слое из градиентного материала с изменяющимися по толщине свойствами. Вначале рассмотрим поведение электрического поля в квадратичной среде, поскольку этот случай представляет наибольший практический интерес [4,5]. Для определенности предположим, что имеется плоский прямоугольный образец толщиной h с электродами площадью s, нанесенными на его верхнюю и нижнюю поверхности. Допустим, что показатель преломления n изменяется с высотой по квадратичному закону

$$n = n_0 + az^2, \tag{1}$$

где $n_0 = n(0)$ — значение показателя преломления на нижней поверхности при $z = 0$, a — положительная или отрицательная постоянная, такая что в пределах $0 \leqslant z \leqslant h$ показатель преломления $n > 1$.

В этом случае высокочастотная относительная диэлектрическая проницаемость ε_r может быть представлена в виде

$$\varepsilon_r = (1 + bz^2)^2 \varepsilon_r(0), \tag{2}$$

где $\varepsilon_r(0)$ — значение ε_r при $z = 0$, $b = a/n_0$, или записана в форме

$$\varepsilon_r = (1 + Bz^2 + Cz^4)\varepsilon_r(0), \tag{3}$$

где $B = 2b$ и $C = b^2 = B^2/4$.

В силу теоремы Гаусса индукция $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ в плоском слое постоянна и напряженность электрического поля E в градиентном диэлектрике изменяется по высоте

$$E = A/(1 + Bz^2 + Cz^4) = D/\varepsilon_0 \varepsilon_r, \tag{4}$$

где ε_0 — электрическая постоянная, A определяется из условия

$$U = -\int_0^h E dz = -A \int_0^h \frac{dz}{1 + Bz^2 + Cz^4} = -AJ, \tag{5}$$

где U — разность потенциалов между верхним и нижнем электродами.

Интеграл J в (5) берется в конечном виде; при положительном B

$$A = -A_0 U = -2U/\left\{\left[h/(1 + Bh^2)\right] + \left[\operatorname{arctg}(h \cdot \sqrt{B})/\sqrt{B}\right]\right\} \tag{6}$$

и при отрицательном B

$$A = -A_0 U = -2U/\left\{\left[h/(1 + Bh^2)\right] + \frac{1}{2\sqrt{|B|}} \ln \frac{1 + h\sqrt{|B|}}{1 - h\sqrt{|B|}}\right\}. \tag{7}$$

Физический смысл коэффициента A_0, входящего в (6) и (7), ясен из этих выражений. При $B \to 0$ они сводятся к предельному случаю формул для однородного диэлектрика $E = A = -U/h$ и $A_0 = 1/h$.

Емкость плоского конденсатора с градиентным диэлектриком

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r(0) A_0 S, \tag{8}$$

где A_0 в зависимости от знака B определяется выражением (6) или (7).

В общем случае, если зависимость ε_r от z представлена в виде

$$\varepsilon_r(z) = P(z)\varepsilon_r(0), \tag{9}$$

где $P(z)$ — произвольная функция z, удовлетворяющая условию $\varepsilon_r > 1$, емкость плоского образца определяется по формуле

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r(0) \cdot S / \int_0^h \frac{dz}{P(z)}, \tag{10}$$

где h — толщина диэлектрика, S — площадь электродов.

Например, емкость плоского конденсатора с линейно-неоднородным диэлектриком, относительная диэлектрическая проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon_r(z) = (1 + Bz)\varepsilon_r(0)$, где B — постоянная, найдем, подставляя $P(z) = 1 + Bz$ в интеграл (10), при положительном B

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r(0)SB/\ln\left[\frac{\varepsilon_r(h)}{\varepsilon_r(0)}\right] = \varepsilon_0\varepsilon_r(0)SB/\ln(1 + Bh), \tag{11}$$

где $\varepsilon_r(h)$ и $\varepsilon_r(0)$ — значения относительной диэлектрической проницаемости на верхней и нижней поверхностях соответственно.

Если неоднородность диэлектрика слабо выражена, так что можно принять $B \to 0$, то выражение (11) преобразуется в традиционную формулу для емкости плоского конденсатора. В отличие от однородных материалов, распределение потенциала φ в которых удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, в градиентных диэлектриках оно определяется решением уравнения, содержащего градиент диэлектрической проницаемости ε, т.е.

$$\varepsilon\Delta\varphi + \operatorname{grad}\varepsilon \operatorname{grad}\varphi = 0. \tag{12}$$

Для линейно-неоднородного диэлектрика, ε которого зависит только от z, например $\varepsilon = (1 + bz)\cdot\varepsilon(0)$, из (12) следует

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{b}{1 + bz}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

В случае плоской задачи, когда φ зависит только от x и z, второе слагаемое в (13) пропадает и его решение, получаемое по методу Фурье, для прямоугольной области можно записать в виде

$$\varphi = \varphi(x,z) = \sum_n \varphi_n(x,z) = \sum_n F_n(x)\cdot C_n(z), \tag{14}$$

где

$$F_n(x) = A_n \operatorname{sh}\lambda_n x + B_n \operatorname{ch}\lambda_n x, \tag{15}$$

$$G_n(z) = G_n(r) = C_n J_0(\lambda_n r) + D_n Y_0(\lambda_n r), \tag{16}$$

$$r = (1 + bz)/b, \tag{17}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n и λ_n — постоянные, значения которых можно определить из граничных условий; J_0 и Y_0 — функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно.

Важное практическое применение имеют задачи, когда на левой и правой границах, например, при $x = 0$ и $x = L$, заданы значения потенциала в функции z, т.е. $\varphi(0,z) = g_1(z)$ и $\varphi(L,z) = g_2(z)$, а на верхней и нижней границах либо потенциал, либо производные по z имеют постоянную величину или обращаются в нуль. Постоянные C_n и D_n можно выбрать так, чтобы на одной из границ, например верхней, условия выполнялись автоматически. Обозначив величину r на верхней границе через r_2, а на нижней границе через r_1, условию $\varphi(x, r_2) = 0$ можно удовлетворить, положив

$$G_n(r) = a_n\Big[Y_0(\lambda_n r_2)J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r_2)Y_0(\lambda_n r)\Big]. \tag{18}$$

На нижней границе условие $\varphi(x, r_1) = 0$ будет соблюдаться, если λ_n в (18) являются корнями уравнения

$$V_{0s}(\lambda_n r_1) = Y_0(\lambda_n r_2)J_0(\lambda_n r_1) - J_0(\lambda_n r_2)Y_0(\lambda_n r_1) = 0. \qquad (19)$$

Функции $V_{0s}(\lambda_n r)$, образуемые комбинацией функций Бесселя, по сути дела представляют разновидность функций Бесселя. Постоянную a_n в (18) можно найти, разлагая потенциал на левой границе $\varphi(0, r) = \Phi(r)$ в ряд по функциям $V_{0s}(\lambda_n r)$, коэффициенты которого a_n определяются выражениями

$$a_n = \frac{\pi^2 \lambda_n^2}{2} \frac{J_0^2(\lambda_n r_1)}{J_0^2(\lambda_n r_1) - J_0^2(\lambda_n r_2)} \int\limits_{r_1}^{r_2} r\Phi(r)V_{0s}(\lambda_n r)dr. \qquad (20)$$

Если на верхней и нижней границах обращаются в нуль производные от потенциала по z (или по r), то граничным условиям можно удовлетворить, приняв

$$G_n(r) = \alpha_n \left[Y_0'(\lambda_n r_2)J_0(\lambda_n r) - J_0'(\lambda_n r_2)Y_0(\lambda_n r)\right], \qquad (21)$$

где λ_n — корни уравнения

$$W_{0s}'(\lambda_n r_1) = Y_0'(\lambda_n r_2)J_0'(\lambda_n r_1) - J_0'(\lambda_n r_2)Y_0'(\lambda_n r_1), \qquad (22)$$

где штрих указывает на операцию дифференцирования по параметру $\chi = \lambda_n r$.

В соответствии со свойствами функций Бесселя $J_0'(\chi) = -J_1(\chi)$, $Y_0'(\chi) = Y_1(\chi)$, где J_1 и Y_1 — функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно. Коэффициенты α_n определяются формулами разложения потенциала $\Phi(r)$ по функциям $W_{0s}'(\lambda_n r)$

$$\alpha_n = \frac{\pi^2 \lambda_n^2}{2} \frac{J_1^2(\lambda_n r_1)}{J_1^2(\lambda_n r_1) - J_1^2(\lambda_n r_2)} \int\limits_{r_1}^{r_2} r\Phi(r)W_{0s}(\lambda_n r)dr. \qquad (23)$$

Нижний индекс "нуль" у функций V_{0s} и W_{0s} указывает на то, что они образованы из функций Бесселя нулевого порядка, а индекс s на то, что условия на верхней и нижней границах "симметричны", т.е. на обеих границах либо потенциал $\Phi(r)$, либо его производные по r обращаются в нуль. Имеют место и другие "несимметричные" случаи, когда на одной из границ равен нулю потенциал, а на другой его производная по r. "Симметричные" граничные условия используются при анализе распределения электрического поля в области слоя либо между электродами, либо за их пределами, а "несимметричные" в пластине, металлизированной лишь с одной стороны.

В случае градиентных материалов сохраняется известная для однородных сред общность решения полевых задач. Получив решение для распределения потенциала электрического поля φ в неоднородном диэлектрике, можно записать его и для потенциала в полупроводнике, заменив $\varepsilon_0\varepsilon_r$ на удельную электрическую проводимость γ, или для распределения температуры, подставив вместо $\varepsilon_0\varepsilon_r$ коэффициент теплопроводности K и вместо φ температуру T.

Детальный анализ распределения электрического поля в пластине из градиентного материала, частично покрытой электродами, весьма сложен. Расчеты связаны с решением систем линейных и трансцендентных уравнений и выполняются на ЭВМ.

В частных случаях формулы упрощаются, что позволяет делать качественные заключения о распределении электрического поля, не производя трудоемких вычислений. Например, если имеется тонкая полупроводниковая пластина, нижняя поверхность которой металлизирована и заземлена, а верхняя покрыта электродом, находящимся под потенциалом U, только при $x \leqslant 0$, то, полагая $L \to \infty$, выражение для потенциала при $x \geqslant 0$ можно записать в виде

$$\varphi(x, r) = \sum_n G_n(r) \exp(-\lambda_n x), \tag{24}$$

где $G_n(r)$ — функции, удовлетворяющие граничным условиям и позволяющие представить потенциал $\Phi(r) = \varphi(0, x)$ под краем электрода при $x = 0$ разложением в ряд по комбинациям функций Бесселя

$$\Phi(r) = \sum_n G_n(r). \tag{25}$$

Чтобы судить о характере изменения электрического поля на поверхности пластины из линейно-неоднородного полупроводника с удалением от края электрода, можно воспользоваться приближенной оценкой $\lambda_n = n\pi/2h$, где $n = 1, 2, \ldots$: Следовательно, на поверхности полупроводниковой пластины на расстоянии $2h$ от края электрода величина потенциала составляет не более 5% от U. Это дает возможность примерно определить вклад краевой емкости и учесть ее, увеличив при расчете размеры электрода на $x = 2h/\pi$. С помощью ЭВМ вычисление емкости можно выполнить с высокой, требуемой для практических целей точностью.

Список литературы

[1] *Lipovskii A.A.* // Proc. First Intern. Soviet Fibre Optics Conf. (ISFOC'91). 1991. Vol. 2. С. 26–28.

[2] *Vaisleib Yu.W., Matiyasevich N.A.* // Ibid. С. 37–44.

[3] *Volokobinsky M.Yu.* // Ibid. С. 1–4.

[4] *Хансперджер Р.* Интегральная оптика. Теория и технология. М.: Мир, 1985. 384 с.

[5] *Снайдер А., Лав Жд.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.