

01;03  
©1995 г.

## МОДОВЫЙ АНАЛИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ЭМИССИИ КАПЕЛЬ ПРИ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ДИСПЕРГИРОВАНИИ ЖИДКОСТЕЙ

*С.О.Ширяева, А.И.Григорьев*

Ярославский государственный университет,  
150000, Ярославль, Россия  
(Поступило в Редакцию 2 марта 1994 г.)

Исследуется равновесная форма и устойчивость мениска жидкости на торце капилляра в коллинеарных гравитационном и электростатическом полях. Показано, что отрыв капли от мениска происходит в результате потери устойчивости третьей модой капиллярных колебаний мениска, генерирующей при своем росте неустойчивости более высоких мод. Собственно отрыв капли от мениска реализуется при конкурентном росте амплитуд неустойчивых высоких мод капиллярных колебаний.

### Введение

Явление электрогидродинамического (ЭГД) монодиспергирования жидкости широко используется в разнообразных физических, технических и технологических приложениях (см., например, [1-3] и указанную там литературу). Но, несмотря на очевидную важность теоретического осмысления физических механизмов этого явления, его теория находится пока в стадии разработки.

В экспериментальных работах, посвященных исследованию процесса ЭГД монодиспергирования, отмечается существование двух основных режимов диспергирования: капельного и гармонического [4-6]. В капельном режиме, наблюдаемом при малых значениях разности потенциалов  $\Delta\varphi$ , подаваемых на капилляр и противэлектрод, с торца капилляра отрываются крупные капли, объем которых практически совпадает с объемом всего жидкого мениска, формирующегося на конце капилляра. Отрыв капель происходит за счет образования перетяжки в непосредственной близости от среза капилляра. По мере увеличения  $\Delta\varphi$  мениск жидкости на торце капилляра становится более вытянутым, положение перетяжки смещается к его вершине, что приводит к уменьшению объема отрывающихся капель и увеличению частоты эмиссии, т.е. капельный режим диспергирования сменяется гармоническим.

Вопрос о теоретическом анализе закономерностей отрыва капель от капилляра при ЭГД диспергировании до сих пор остается открытым, хотя попытки такого анализа предпринимались неоднократно. Так, в наиболее полной теоретической работе, посвященной этому вопросу [7], авторы, основываясь на теории Рэля о капиллярных колебаниях заряженной капли [8], разложили поверхность первоначально полусферического мениска жидкости на срезе капилляра по бесконечному набору нечетных полиномов Лежандра (образующих на полусфере полный набор ортогональных функций), представив мениск как колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы. Полученное ими после введения серии упрощающих (но малокорректных) предположений дисперсионное соотношение для мод капиллярных колебаний мениска показывает, что независимо от величины  $\Delta\varphi$  первая теряет устойчивость третья мода и, следовательно, можно предполагать, что формирование и отрыв капли от капилляра происходит в результате преимущественного развития ее неустойчивости.

Этот результат весьма интересен, но не совсем очевиден и понятен. Так, для объяснения наблюдаемого факта уменьшения размеров отрывающихся при ЭГД диспергировании капель по мере увеличения  $\Delta\varphi$  с точки зрения представления поверхности мениска в виде суперпозиции бесконечного набора капиллярных колебаний естественно предположить, что с ростом  $\Delta\varphi$  формирование и отрыв капель происходят за счет преимущественного развития неустойчивости какой-либо из более высоких, нежели третья, мод (пятой, седьмой и т.д. с увеличением номера наиболее неустойчивой моды при повышении  $\Delta\varphi$ ), т.е. с увеличением  $\Delta\varphi$  наиболее благоприятными становятся условия реализации неустойчивости более высоких мод. Учитывая, что в [7] при выводе дисперсионного уравнения было сделано несколько весьма малообоснованных предположений (в частности, слишком грубым является пренебрежение взаимодействием мод капиллярных колебаний, которое в поставленной задаче отнюдь не является малым), в настоящей работе предпринята попытка теоретического модового анализа закономерностей отрыва капли от капилляра в капельном режиме (с учетом только гравитационного поля) и в гармоническом режиме (с учетом гравитационного и электрических полей) на основе условия баланса давлений на поверхности мениска [9].

1. Рассмотрим явление отрыва капли от капилляра в устройстве, схема которого приведена на рисунке. В капельном режиме (при определяющем влиянии на отрыв капли от капилляра силы тяжести) на поверхность мениска жидкости на торце капилляра действуют лапласовское давление сил поверхностного натяжения, выражение для которого в сферических координатах с началом, совпадающим с центром среза капилляра, имеет вид

$$P\sigma \approx \frac{2\sigma}{r(\theta)} \left[ 1 - \frac{1}{2r(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right],$$

где  $\partial r(\theta)/\partial \theta \ll 1$ , давление сил тяжести

$$P_g = (\rho_1 - \rho_2)gr(\theta) \cos \theta$$

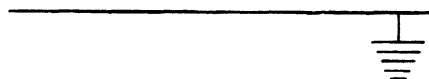
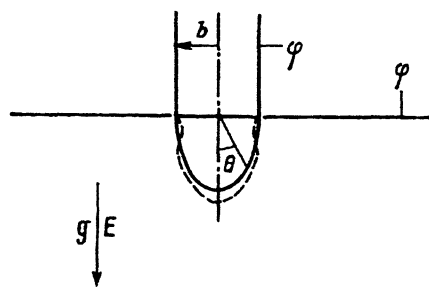


Схема устройства для электродиспергирования жидкости гравитационным и электрическим полями.

Штриховой линией показана форма образующей мениска жидкости на торце капилляра, соответствующая наложению на равновесную полусфероидальную поверхность виртуального возмущения формы вида  $\zeta(\theta) = \zeta_0 \cdot P_3(\cos \theta)$ .

и перепад постоянных давлений внутри и вне жидкости  $\Delta P$ . Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\rho_1, \rho_2$  — плотности жидкости и окружающей среды;  $r(\theta)$  — уравнение образующей поверхности мениска;  $\theta$  — угол, отсчитываемый от направления  $g$  (см. рисунок). Форма поверхности мениска предполагается осесимметричной.

Очевидно, что с точки зрения удобства проведения нижеследующих расчетов устойчивости мениска желательно описывать его равновесную поверхность фигурой вращения, поверхность которой выражается аналитически. Поскольку равновесная форма капли в электрическом и гравитационном полях близка к сфероидальной [9], то естественно предположить, что в нулевом приближении форма мениска будет хорошо аппроксимироваться половинкой вытянутого эллипсоида вращения с малым эксцентриситетом  $e$ . Тогда равновесную форму мениска можно искать из условия баланса давлений на его поверхности

$$P_\sigma = P_g + \Delta P, \quad (1)$$

выписывая лапласовское давление  $P_\sigma$  для сфероидальной поверхности с точностью до членов  $\sim e^2$  и подставляя в выражение для гравитационного давления искомую форму мениска  $r(\theta)$  в виде разложения по полиномам Лежандра нечетного порядка

$$r(\theta) = b \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{b} P_{2n+1}(\cos \theta) \right], \quad (2)$$

где  $b$  — радиус капилляра,  $a_{2n+1}$  — амплитуды капиллярных волн.

Нечетные полиномы Лежандра выбраны в силу необходимости удовлетворить условию закрепленности мениска на торце капилляра  $r(\pi/2) = b$ .

Проводя разложения всех функций, зависящих от  $\cos \theta$  на интервале  $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ , в ряды по нечетным полиномам Лежандра, получим следующие выражения: для лапласовского давления

$$P_{\sigma} \approx \frac{2\sigma}{b} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}e^2 \right) + e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!(4n+3)}{2^{2n+1}n!(n+2)!(4n^2-1)} P_{2n+1}(\cos \theta) \right] \quad (3)$$

и для гравитационного давления

$$P_g = (\rho_1 - \rho_2)gb \left[ P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \frac{a_{2m+1}}{b} \right) P_{2n+1}(\cos \theta) \right], \quad (4)$$

где

$$d_{nm} = \frac{(-1)^{n+m+1}(2n+1)!(2m+1)!(4n+3)}{2^{2(n+m)+1}(n!m!)^2[4(n-m)^2-1](n+m+1)(n+m+2)}.$$

В (3) радиус капилляра  $b$  совпадает с малой полуосью сфероида. Подставляя (3) и (4) в условие баланса давлений на поверхности мениска (1) и приравнявая коэффициенты при полиномах Лежандра одинакового порядка, получим бесконечную систему уравнений для определения амплитуд  $a_{2n+1}$  в разложении равновесной формы мениска (2)

$$\frac{3}{2}e^2 = \eta \left[ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} d_{0m} \frac{a_{2m+1}}{b} \right] \quad (n+0),$$

$$\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!(4n+3)}{2^{2n}n!(4n^2-1)(n+2)!} e^2 = \eta \left[ \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \frac{a_{2m+1}}{b} \right] \quad (n \geq 1), \quad (5)$$

где

$$\eta = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gb^2}{\sigma}.$$

Уравнение, получающееся при приравнивании друг другу коэффициентов при полиноме нулевого порядка  $P_0(\cos \theta)$ , определяет перепад давлений внутри и вне жидкости  $\Delta P$ .

Таким образом, даже при решении с точностью до членов первого порядка малости по квадрату эксцентриситета ( $\sim e^2$ ) возникает необходимость решения бесконечной системы уравнений, а выражение для равновесной поверхности мениска будет содержать бесконечное число слагаемых. Положение усугубляется и тем, что выписанные ряды по нечетным полиномам Лежандра сходятся медленно. И тем не менее, для того чтобы довести решение задачи до конкретного результата, следует ограничиться конечным числом уравнений и оборвать ряды в правых частях уравнений, чтобы полученная система была разрешима. Подобная программа действий в какой-то степени обоснована,

поскольку коэффициенты разложения  $d_{nm}$  все-таки убывают с ростом порядковых чисел  $n$  и  $m$ , но в то же время она является искусственной, в следствие чего точность проводимого рассмотрения становится плохо контролируемой. Итак, ограничиваясь для проводимого качественного анализа тремя слагаемыми в рядах и тремя уравнениями, найдем неизвестные амплитуды первых трех мод в выражении для равновесной формы мениска (2)

$$\frac{a_1}{b} = 2 \left( \frac{e^2}{\eta} - \frac{36}{49} \right), \quad \frac{a_3}{b} = \frac{16}{21}, \quad \frac{a_5}{b} = -\frac{64}{147}.$$

В итоге уравнение равновесной поверхности мениска в гравитационном поле с учетом соотношения

$$e^2 = \frac{36\eta}{49 \left( 1 - \frac{3}{16}\eta \right)} \quad (6)$$

примет вид

$$r(\theta) = b \left[ 1 + \frac{3}{8}e^2 P_1(\cos \theta) + \frac{16}{21}P_3(\cos \theta) + \frac{64}{147}P_5(\cos \theta) \right]. \quad (7)$$

Приведем для сравнения выражение для сфероидальной поверхности, разложенное на интервале  $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$  с точностью до членов  $\sim e^2$ , в ряд по нечетным полиномам Лежандра, сохранив только первые четыре слагаемых

$$r(\theta) = \frac{b}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^2} \approx b \left[ 1 + \frac{3}{8}e^2 P_1(\cos \theta) + \frac{7}{48}e^2 P_3(\cos \theta) - \frac{11}{384}e^2 P_5(\cos \theta) \right]. \quad (8)$$

Из сопоставления формул (7) и (8) видно, что равновесная поверхность мениска в гравитационном поле условно может быть описана поверхностью половинки сфероида, квадрат эксцентриситета которого  $e^2$  определится выражением (6). В этом случае уравнения поверхности мениска и поверхности полусфероида будут совпадать с точностью до членов  $\sim e^2$  и до коэффициентов при полиномах Лежандра  $P_1(\cos \theta)$ . Основное различие выражений (7) и (8) в коэффициенте при  $P_3(\cos \theta)$ . Амплитуда третьей моды в (7) больше, чем в (8).

2. Принимая во внимание основной вывод теоретической части работы [7], а именно, что неустойчивость мениска жидкости на срезе капилляра начинается с неустойчивости именно третьей моды, и считая в дальнейшем равновесную поверхность мениска полусфероидальной, рассмотрим устойчивость его поверхности по отношению к возбуждению третьей моды капиллярных колебаний. Ясно, что возмущение поверхности вида  $\zeta(\theta) = \zeta_0 P_3(\cos \theta)$  (см. рисунок) вызывает возмущение лапласовского и гравитационного давлений  $\delta P_\sigma$  и  $\delta P_g$  (предполагаем, что давление жидкости в капилляре постоянно, поэтому величина  $\Delta P$

остается неизменной). В результате взаимодействия возмущения формы поверхности с гравитационным полем установится новый равновесный рельеф поверхности, который будем искать в виде

$$f(\theta) = b \left[ \frac{r(\theta)}{b} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{b} P_{2n+1}(\cos \theta) \right], \quad (9)$$

где  $r(\theta)$  — уравнение образующей сфероида.

Из условия баланса давлений на искомой поверхности, отбрасывая слагаемые, сумма которых обращается в нуль на исходной сфероидальной поверхности (соотношение (1)), получим уравнение баланса добавок к соответствующим давлениям

$$\delta P_{\sigma} = \delta P_g. \quad (10)$$

Выражение для добавки к давлению сил поверхностного натяжения под искривленной сфероидальной поверхностью с точностью до членов  $\sim e^2$ , разложенное на интервале  $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$  по нечетным полиномам Лежандра, запишем в виде

$$\begin{aligned} \delta P_{\sigma} \approx & -\frac{2\sigma}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ 1 - (n+1)(2n+1) + e^2(2 + (n+1)(2n+1)) \times \right. \right. \\ & \times \left. \frac{4(n+1)(2n+1) - 1}{(4n+1)(4n+5)} - 1 \right] P_{2n+1}(\cos \theta) + 2e^2 \left[ \frac{2 + (n+1)(2n+1)}{4n+3} \right] \times \\ & \times \left. \left[ \frac{(n+1)(2n+3)}{4n+5} P_{2n+3}(\cos \theta) + \frac{n(2n+1)}{4n+1} P_{2n-1}(\cos \theta) \right] \right\} \frac{a_{2n+1}}{b}. \quad (11) \end{aligned}$$

Добавку к давлению гравитационного поля, возникшую в результате возмущения равновесной поверхности вида  $\zeta(\theta) = \zeta_0 P_3(\cos \theta)$ , также представим в виде разложения по нечетным полиномам Лежандра

$$\delta P_g = (\rho_1 - \rho_2)g \zeta_0 \sum_{n=0}^{\infty} d_{n1} P_{2n+1}(\cos \theta). \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра, найдем равновесные амплитуды  $a_{2n+1}$ , определяющие отклонение формы мениска от полусфероидальной. Выпишем амплитуды трех первых возбужденных мод капиллярных колебаний (хотя, как следует из (11) и (12), при взаимодействии начального возмущения  $\zeta(\theta)$  с внешним полем возбуждается полный бесконечный набор капиллярных колебаний поверхности)

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b} & \approx -0.078(1 + 1.029 e^2) \frac{\eta \zeta_0}{e^2 b}, \\ \frac{a_3}{b} & \approx 0.047(1 + 0.341 e^2) \eta \frac{\zeta_0}{b}, \\ \frac{a_5}{b} & \approx 0.009(1 + 1.46 e^2) \eta \frac{\zeta_0}{b}, \end{aligned} \quad (13)$$

Амплитуды всех возбужденных мод  $a_{2n+1}$  пропорциональны амплитуде возмущения третьей моды  $\zeta_0$ , поэтому если  $a_3/b < \zeta_0/b$ , то амплитуды всех мод будут затухать со временем, и наоборот, при  $a_3/b > \zeta_0/b$  возмущение будет расти. Таким образом, условие неустойчивости мениска в гравитационном поле может быть записано в виде

$$0.05(1 + 0.34 e^2)\eta > 1. \quad (14)$$

Из соотношений (13) видно, что отношение амплитуды пятой моды к амплитуде третьей моды меньше единицы  $a_5/a_3 < 1$  для любых реальных значений параметра  $\eta$  (так, для воды для капилляров с радиусами  $b < 2.5$  мм параметр  $\eta < 1$ ). Этот результат приводит к выводу, что в капельном режиме диспергирования жидкости неустойчивость мениска на срезе капилляра и отрыв капель начинается с развития неустойчивости третьей моды капиллярных колебаний, но при реализации ее неустойчивости генерируются и неустойчивости более высоких мод.

3. Закономерности отрыва капель в гармоническом режиме (при определяющем влиянии электрического поля, создаваемого между капилляром и противозлектродом [<sup>3,10</sup>]) (см. рисунок) исследуем аналогичным способом с учетом того, что в данном случае на поверхность мениска действует еще и давление электрического поля  $P_E = E^2/8\pi$  (здесь  $E$  — напряженность электрического поля вблизи поверхности мениска). Для записи аналитического выражения напряженности поля  $E$  мениск на торце капилляра будем моделировать половинкой проводящего вытянутого сфероида с эксцентриситетом  $e$ , обладающего зарядом  $Q$ , величина которого определяется потенциалом  $\phi$ , подаваемым на капилляр [<sup>11</sup>],

$$Q = \frac{\phi b e}{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{Arth} e}.$$

Здесь  $b$  — малая полуось сфероида, а качестве которой выбран радиус капилляра. Тогда напряженность электрического поля у поверхности мениска определится известным выражением [<sup>11</sup>]

$$E = \frac{\phi}{b} \frac{e\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\operatorname{Arth} e\sqrt{1 - (2 - e^2)e^2 \cos^2 \theta}}.$$

Давление электрического поля на поверхность мениска представим в виде разложения по нечетным полиномам Лежандра с точностью до членов  $\sim e^2$

$$P_E = \frac{\phi^2}{8\pi b^2} \left(1 - \frac{2}{3}e^2\right) + e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!(4n+3)}{2^{2n+1}n!(n+2)!(4n^2-1)} P_{2n+1}(\cos \theta). \quad (15)$$

Уравнение равновесной поверхности мениска так же, как и ранее, будем искать в виде (2) из условия баланса давлений на поверхности мениска

$$P_\sigma = P_g + \Delta P + P_E. \quad (16)$$

Подставляя в (16) выражения (3), (4) и (15) и повторяя знакомую процедуру, получим систему уравнений для определения амплитуд в разложении (2)

$$\frac{3}{2}e^2(1-W) = \eta \left[ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{b} d_{0m} \right],$$

$$\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!(4n+3)}{2^{2n}n!(4n^2-1)(n+2)!} e^2(1-W) = \eta \left[ \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \frac{a_{2m+1}}{b} \right] \quad (n \geq 1), \quad (17)$$

где

$$W \equiv \frac{\phi^2}{16\pi\sigma b} = \frac{Q^2}{16\pi\sigma b^3}.$$

Как и при рассмотрении равновесной поверхности мениска только в гравитационном поле, получаем бесконечную систему уравнений, которую, как и в предыдущем случае, искусственно оборвем, ограничиваясь тремя уравнениями. В результате решения полученной таким образом усеченной системы уравнений определим амплитуды первых трех мод в выражении (2)

$$\frac{a_1}{b} = 2 \left( (1-W) \frac{e^2}{\eta} - \frac{36}{49} \right), \quad \frac{a_3}{b} = \frac{16}{21}, \quad \frac{a_5}{b} = -\frac{64}{147}.$$

Тогда, если принять, что

$$e^2 = \frac{36\eta}{49 \left[ (1-W) - \frac{3}{16} \right]}, \quad (18)$$

уравнение равновесной поверхности мениска в гравитационном и электростатическом полях можно записать в виде (7).

Выражение (18) для квадрата эксцентриситета равновесной поверхности мениска подтверждает факт вытягивания мениска по мере увеличения подаваемого на капилляр потенциала.

Выше отмечалось, что полученное уравнение равновесной формы мениска (7) отличается от разложения в ряд по нечетным полиномам Лежандра уравнения сфероидальной поверхности (8) амплитудой третьей моды. Поэтому, как и в предыдущем случае, рассмотрим устойчивость равновесной сфероидальной поверхности мениска по отношению к возбуждению третьей моды капиллярных колебаний  $\zeta(\theta) = \zeta_0 P_3(\cos\theta)$  (см. рисунок) на основе условия баланса добавок к соответствующим давлениям, вызванных возмущением равновесной поверхности,

$$\delta P_{\sigma} = \delta P_g + \delta P_E. \quad (19)$$

Уравнение новой равновесной поверхности, сформировавшейся в результате взаимодействия возмущения  $\zeta(\theta)$  с внешними полями, будем искать в виде разложения (9).

Добавки к давлению сил поверхностного натяжения и к давлению гравитационного поля определяются выражениями (11) и (12). Изменение давления электрического поля  $\delta P_E$  на поверхности мениска вызвано изменением напряженности электрического поля  $\delta E$  вблизи поверхности, которое можно определить, решая электростатическую задачу

$$\Delta(\delta\Phi) = 0$$



$$\delta\Phi \Big|_{r=r(\theta)} = -\zeta(\theta) \cdot \nabla\Phi \Big|_{r=r(\theta)},$$

$$\delta\Phi \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

где  $\delta\mathbf{E} = -\nabla(\delta\Phi)$ ,  $\Phi$  — потенциал электрического поля вблизи невозмущенной поверхности заряженного проводящего сфероида;  $\zeta(\theta) = \zeta(\theta) \cdot \mathbf{n}$  — вектор возмущения поверхности, направленный по нормали к поверхности сфероида;  $\delta\Phi$  — возмущение электростатического потенциала вблизи поверхности мениска, вызванное ее деформацией,  $r(\theta)$  — уравнение образующей вытянутого сфероида.

В результате добавку к давлению электрического поля с точностью до членов первого порядка малости по возмущению поверхности  $\zeta(\theta)$  и по квадрату эксцентриситета  $e^2$  выпишем в виде

$$\delta P_E = \frac{1}{8\pi} [2(\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{E}) + \zeta \cdot \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})]_{r=r(\theta)} =$$

$$= \frac{Q^2}{2\pi b^4} \frac{\zeta_0}{b} \left[ -\frac{9}{35} e^2 P_1(\cos\theta) + \left(1 - \frac{371}{90} e^2\right) P_3(\cos\theta) \right]. \quad (20)$$

Подставляя (11), (12) и (20) в условие баланса добавок к давлениям (19), найдем амплитуды капиллярных волн в выражении (9) для определения нового равновесного рельефа поверхности

$$\frac{a_1}{b} = \left[ -0.078(1 + 1.029 e^2) \frac{\eta}{e^2} + 0.086(1 - 56.483 e^2) W \right] \frac{\zeta_0}{b},$$

$$\frac{a_3}{b} = [0.047(1 + 0.341 e^2) \eta + 0.8(1 - 3.530 e^2) W] \frac{\zeta_0}{b},$$

$$\frac{a_5}{b} = [0.009(1 + 1.464 e^2) \eta + 0.145 e^2 W] \frac{\zeta_0}{b}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что амплитуда начального возмущения  $\zeta(\theta)$  уменьшается и, следовательно, форма мениска стремится к исходной, если  $a_3/b < \zeta_0/b$ . Если же выполняется противоположное неравенство, то амплитуды всех мод, определяемых (21), будут расти, т.е. возмущение  $\zeta(\theta)$  станет неограниченно увеличиваться. Таким образом, условие неустойчивости мениска жидкости на торце капилляра под действием гравитационного и электрических полей имеет вид

$$0.047(1 + 0.341 e^2) \eta + 0.8(1 - 3.530 e^2) W > 1. \quad (22)$$

Из выражения (22) следует, что для сравнительно малых значений квадрата эксцентриситета (для которых только и справедливо проведенное рассмотрение) увеличение потенциала, подаваемого на капилляр, делает поверхность мениска менее устойчивой. Однако опережения амплитудой пятой моды величины амплитуды третьей моды (по мере увеличения  $W$ ) получить не удалось, так как отношение  $a_5/a_3 < 1$

для любых значений  $W$ . Таким образом, полученный результат не позволяет подтвердить предположение, что отрыв капель в гармоническом режиме происходит за счет преимущественного развития неустойчивости высоких мод. Следует однако отметить, что проведенный анализ все-таки достаточно груб в связи с медленной сходимостью разложений по нечетным полиномам Лежандра. В итоге проблема объяснения в рамках модового анализа факта уменьшения размеров отрывающихся капель с увеличением прикладываемой разности потенциалов остается открытой.

Вместе с тем выяснилось, что отрыв капли от мениска на торце капилляра происходит в результате возбуждения целого спектра высоких мод капиллярных колебаний (начиная с третьей моды), взаимодействующих между собой. Дисперсионное уравнение капиллярных колебаний поддерживаемого при высоком электрическом потенциале мениска жидкости на торце капилляра, полученное в [7] в пренебрежении взаимодействием между модами, неадекватно описывает спектр реальных колебаний мениска и не дает представления о закономерностях эволюции феномена ЭГД диспергирования жидкости при изменении прикладываемой разности потенциалов.

По-видимому, эволюция потерявшего устойчивость мениска и отрыв капли от его вершины происходит по той же схеме, что и эволюция изолированной капли, неустойчивой по отношению к собственному или индуцированному зарядам [12,13]: неустойчивость основной моды, сопровождающаяся вытягиванием капли и перераспределением ее заряда с увеличением концентрации поверхностного заряда у вершин капли, вызывает неустойчивость более высоких мод капиллярных колебаний, инкременты нарастания амплитуд которых изначально превышают инкремент неустойчивости основной моды [14] и собственно определяют финальную стадию развития неустойчивости, сопровождающуюся эмиссией дочерних капель.

#### Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О. // ЖПХ. 1989. Т. 62. Вып. 9. С. 2020-2026.
- [2] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1991. Vol. 146. N 1. P. 137-151.
- [3] Zemskov A.A., Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Coll. Int. Sci. 1993. Vol. 158. N 1. P. 54-63.
- [4] Sample S.B., Raghupathy B. // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 41. N 2. P. 185-193.
- [5] Woosley J.P., Turnbull R.J. // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 21. P. 4278-4284.
- [6] Cloupeau M., Prunet-Foch B. // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165-184.
- [7] Hendricks C.D., Garson R.S., Hogan J.J., Schneider J.M. // AIAA J. 1964. vol. 2. N 4. P. 733-737.
- [8] Rayleigh // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184-186.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27-34.
- [10] Земсков А.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 11. С. 32-38.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620. с.
- [12] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272-1278.
- [13] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10-15.
- [14] Григорьев А.И., Лазаряц А.Э. // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929-938.