

01:05:09

©1994 г.

СРЕДНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИМПЕДАНС ЦИЛИНДРОВ С АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

А.И. Спицын

Харьковский институт радиоэлектроники им. акад. М.К. Янгеля,
310726, Харьков, Украина
(Поступило в Редакцию 28 февраля 1994 г.)

В предположении тензорной локальной связи между электрическим полем и плотностью тока по известной ориентации главных осей тензора удельного сопротивления, известным главным значениям этого тензора и известной поляризации уединенной моды получены соотношения для средних значений поверхностного импеданса и его компонент на цилиндрических поверхностях осесимметричных объемных СВЧ структур. Детально исследован случай одноосного кристалла. На основе выведенных строгих соотношений получены приближенные формулы для средних компонент тензора вплоть до второй гармоники. Приведены графические данные расчета для случая E -типов колебаний. Найдено, что по серии измерений среднего поверхностного импеданса на E - или H -модах можно определить ориентацию одноосного цилиндрического кристалла, у которого ось симметрии высшего порядка определена до двух направлений в пространстве.

В ряде работ [1-4] по измеренным значениям добротности и сдвигам частот осесимметричных резонаторов с внутренним проводником в виде монокристаллического цилиндра с известной кристаллографической ориентацией определялись усредненные значения поверхностного импеданса по различным кристаллографическим плоскостям, выходящим на цилиндрическую поверхность. В работе [5] выведены соотношения для добротностей и возмущений частот из-за отличного от нуля поверхностного реактивного сопротивления в случае уединенных мод цилиндрических и коаксиальных объемных резонаторов в предположении постоянства компонент тензора поверхностного импеданса в поперечном и продольном направлениях на цилиндрической поверхности. В настоящей работе в предположении тензорной локальной связи между плотностью тока и полем по известной ориентации главных осей тензора удельного сопротивления и известным главным значениям этого тензора для общего случая рассчитываются средние значения поверхностного импеданса и его компонент на цилиндрической поверхности.

Определим среднее значение поверхностного импеданса $\bar{Z} = \bar{R} + i\bar{X}$ (R и X — поверхностное сопротивление и реактанс соответственно) цилиндрической поверхности по равенству комплексных мощностей P_k , проходящих через всю боковую площадь цилиндра s , в изотропном и анизотропном случаях

$$P_k = \frac{1}{2} \bar{Z} \int_s |\mathbf{H}_{tg}|^2 ds = \frac{1}{2} \int_s Z_{ik} J_i J_k^* ds, \quad (1)$$

где H_{tg} — тангенциальная к поверхности компонента магнитного поля, $\mathbf{J} = [\mathbf{Hn}]$ — вектор поверхностной плотности тока, \mathbf{n} — единичный вектор внутренней нормали к поверхности, Z_{ik} — компоненты тензора поверхностного импеданса в месте расположения элемента ds на цилиндрической поверхности.

Для объемных резонаторов вследствие малости компонент тензора Z_{ik} по сравнению с величиной импеданса свободного пространства Z_0 в том приближении, в котором справедливо само приближение поверхностного импеданса, в соотношении (1) за компоненты J_i и H_i можно брать величины, соответствующие резонатору с идеально проводящими стенками. Для этого случая все компоненты магнитного поля изменяются во времени в одной фазе и знак сопряжения в (1) можно опустить. Дальнейшее рассмотрение будем относить к уединенным модам осесимметричных объемных СВЧ структур, в которых присутствует цилиндрическая поверхность.

Для нахождения конкретного выражения для \bar{Z} в заданной точке цилиндрической поверхности введем локальную систему координат $Oxyz$ с осью z , параллельной оси цилиндра, осью y , направленной по радиусу к его центру, и осью x , лежащей в плоскости сечения, ортогональной оси цилиндра, касательно к цилиндрической поверхности (рис. 1). Расписывая правую часть равенства (1) явно через компоненты двумерного тензора поверхностного импеданса Z_{ik} и составляющие магнитного поля по осям x и z , комплексную мощность представим в

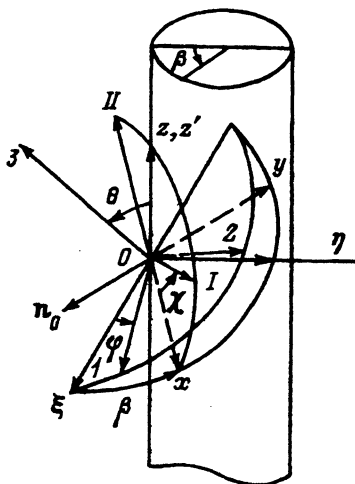


Рис. 1.

виде

$$P_k = \frac{1}{2} \left[\bar{Z}_{zz} \int_s H_x^2 ds + \bar{Z}_{xx} \int_s H_z^2 ds - \int_s (Z_{xz} + Z_{zx}) H_x H_z ds \right], \quad (2)$$

где

$$\bar{Z}_{zz} = \left[\int_s H_x^2 ds \right]^{-1} \int_s Z_{zz} H_x^2 ds,$$

$$\bar{Z}_{xx} = \left[\int_s H_z^2 ds \right]^{-1} \int_s Z_{xx} H_z^2 ds.$$

Величины \bar{Z}_{zz} и \bar{Z}_{xx} представляют средние значения компонент тензора Z_{zz} и Z_{xx} по поверхности цилиндра или, точнее, средние с весовыми функциями H_x^2 и H_z^2 соответственно. Во всех случаях однородного монокристаллического цилиндра осесимметричного резонатора или волновода величина $(Z_{xz} + Z_{zx})H_x H_z$ в диаметрально противоположных точках цилиндра, где на поверхность выходит одна и та же кристаллографическая плоскость, изменяет знак, поэтому вклад этого члена в интеграл по всей цилиндрической поверхности обращается в нуль (компоненты тензора удельного сопротивления, а следовательно, и компоненты Z_{xz} и Z_{zx} в одной из локальных фиксированных систем координат одни и те же, а произведение $H_x H_z$ для осесимметричных систем изменяет знак при $H_x, H_z \neq 0$). Для направляющих систем в случае E -типов колебаний из (1) и $H_z = 0$ следует

$$\bar{Z}_E = \bar{Z}_{zz}. \quad (3)$$

Для H -типов колебаний соответственно получим

$$\bar{Z}_H = \alpha \bar{Z}_{zz} + \gamma \bar{Z}_{xx},$$

где

$$\alpha = \left[\int_s H_{tg}^2 ds \right]^{-1} \int_s H_x^2 ds, \quad \gamma = \left[\int_s H_{tg}^2 ds \right]^{-1} \int_s H_z^2 ds. \quad (4)$$

Соотношения, полученные в [5,6] для добротности и сдвигов частот уединенных мод цилиндрических и коаксиальных резонаторов в предположении постоянства продольных и поперечных компонент тензора Z на цилиндрической поверхности, уже учитывают коэффициенты α и γ в покомпонентном интегрировании для H -типов колебаний. Поэтому они остаются справедливыми в общем случае произвольного однородного монокристаллического цилиндра при замене соответствующих компонент на цилиндрической поверхности на их средние. В дальнейшем связь между плотностью тока \mathbf{j} и электрическим полем \mathbf{E} будем предполагать локальной и представим ее в виде $E_i = \rho_{ik} j_k$, где E_i, j_i — компоненты электрического поля и тока; ρ_{ik} — компоненты тензора удельного сопротивления.

Для определения средних значений компонент по (2) необходимо найти явную зависимость компонент тензора Z_{ik} от положения точки

по периметру сечения цилиндра. На цилиндрической поверхности выберем начальную систему декартовых координат $0\xi\eta z'$, как показано на рис. 1. Ось z' направим по образующей цилиндра, а ось η — по его радиусу. Главные значения тензора удельного объемного сопротивления обозначим ρ_1, ρ_2, ρ_3 , а главные оси обозначим $1, 2, 3$. Начальную систему координат $0\xi\eta z'$ выберем в том месте цилиндрической поверхности, где главная ось 3 ортогональна к оси ξ и лежит во втором и четвертом квадрантах плоскости $0\eta z'$. Ориентацию осей $1-3$ относительно системы $0\xi\eta z'$ зададим углом θ между осями 3 и z' и углом $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ между осями 1 и ξ . Выбором положительного направления оси 3 всегда угол θ можно выбрать лежащим в пределах $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Рассмотрим участок цилиндрической поверхности, соответствующий полярному углу β , отсчитываемому от оси η , в плоскости $0\xi\eta$. Свяжем с этим участком локальную систему координат $0xyz$, как указано ранее, с осью $z \parallel z'$. При совмещении осей z и z' система координат $0\xi\eta z'$ переходит в систему $0xyz$ поворотом относительно оси z' на угол β . Для нахождения компонент поверхностного импеданса в плоскости $0xz$, соответствующей кристаллографической плоскости рассматриваемого участка, требуется знание компонент тензора удельного объемного сопротивления ρ_{xx}, ρ_{zz} и ρ_{xz} . Для этого воспользуемся таблицей направляющих косинусов для перехода от одной декартовой системы координат к другой с углами Эйлера θ, ψ и φ [7] (за одним из углов Эйлера мы оставили стандартное обозначение φ , тогда как полярный угол отсчета мы обозначили β)

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - & -\sin \varphi \cos \psi - & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \psi \cos \theta & \\ \cos \varphi \sin \psi + & -\sin \varphi \sin \psi + & -\cos \psi \sin \theta \\ +\sin \varphi \cos \psi \cos \theta & +\cos \varphi \cos \psi \cos \theta & \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

С учетом того что направляющие косинусы трехгранника 0123 относительно трехгранника $0xyz$ получаются из матрицы (5) заменой ψ на $2\pi - \beta$ (отсчеты углов ψ и β противоположны), воспользовавшись законом преобразования компонент тензора $\rho_{ik} = \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} \rho_{i'k'}$, где индексы i, k соответствуют индексам x, y, z , индексы i', k' обозначают $1, 2, 3$, α_{mn} — элементы матрицы (5), а из элементов $\rho_{i'k'}$ отличны от нуля только диагональные элементы $\rho_{i'i'} = \rho_{i'}$, соотношения для необходимых компонент тензора ρ_{ik} представим в виде

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \hat{\rho} \cos^2 \beta + (\check{\rho} \cos^2 \theta + \rho_3 \sin^2 \theta) \sin^2 \beta + \rho_- \cos \theta \sin 2\varphi \sin 2\beta, \\ \rho_{zz} &= \check{\rho} \sin^2 \theta + \rho_3 \cos^2 \theta, \\ \rho_{xz} &= \rho_- \sin \theta \sin 2\varphi \cos \beta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (\check{\rho} - \rho_3) \sin \beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\hat{\rho} = \rho_+ + \rho_- \cos 2\varphi, \quad \check{\rho} = \rho_+ - \rho_- \cos 2\varphi,$$

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2}(\rho_1 \pm \rho_2). \quad (7)$$

Для объемных СВЧ структур глубина проникновения электромагнитного поля в металлы, из которых изготовлены цилиндры, намного меньше радиусов металлических цилиндров и характерного расстояния изменения электромагнитного поля вдоль цилиндрической поверхности. Это позволяет считать, что все компоненты электромагнитного поля под любым участком цилиндрической поверхности независимо от направления приложенного поля зависят только от нормальной к поверхности координаты y , а составляющая плотности тока j_y по всей толщине скин-слоя отсутствует. Следовательно, тангенциальные компоненты электрического поля и плотности тока под данным участком цилиндрической поверхности связаны посредством двумерного тензора ρ с компонентами ρ_{xx} , ρ_{zz} , ρ_{xz} . По известным значениям этих компонент можно найти направления главных осей и соотношения для главных значений этого двумерного тензора [8], которые представим в виде

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} &= a \pm \sqrt{a^2 - b}; & \operatorname{tg} 2\chi &= \frac{2\rho_{xz}}{\rho_{xx} - \rho_{zz}}, \\ \cos 2\chi &= \frac{\rho_{xx} - \rho_{zz}}{2\sqrt{a^2 - b}}, & \sin 2\chi &= \pm \frac{\rho_{xz}}{\sqrt{a^2 - b}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где величины a и b являются инвариантами вращения относительно оси y в рассматриваемом участке цилиндрической поверхности

$$\begin{aligned} a &= \frac{\rho_{xx} + \rho_{zz}}{2} = A_0 \cos^2 \beta + B_0 \sin^2 \beta + C_0 \sin 2\beta + \nu_0, \\ b &= \rho_{xx}\rho_{zz} - \rho_{xz}^2 = A_1 \cos^2 \beta + B_1 \sin^2 \beta + C_1 \sin 2\beta. \end{aligned} \quad (9)$$

На основе (6), (7) и (9) явные соотношения для A , B и C можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}\hat{\rho}, & B_0 &= \frac{1}{2}(\hat{\rho} \cos^2 \theta + \rho_3 \sin^2 \theta), & B_1 &= \rho_3 \hat{\rho}, \\ C_0 &= \frac{1}{2}\rho_- \cos \theta \sin 2\varphi, & D_0 &= \frac{1}{2}(\hat{\rho} \sin^2 \theta + \rho_3 \cos^2 \theta), \\ A_1 &= \rho_1 \rho_2 \sin^2 \theta + \rho_3 \hat{\rho} \cos^2 \theta, & C_1 &= \rho_- \rho_3 \cos \theta \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношение для тангенса угла 2χ в (8) определяет угол поворота χ до главных осей двумерного тензора неоднозначно, и для определенности его можно, например, выбрать в виде

$$\chi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2\rho_{xz} / (\rho_{xx} - \rho_{zz}) \right).$$

При этом если $\rho_{xx} - \rho_{zz} > 0$, то в соотношениях (8) синус и косинус необходимо брать со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус, причем соотношение для главного значения ρ_1 , соответствующее повернутой оси x , в первом случае берется со знаком $+$, а ρ_2 — со знаком $-$, а во втором — наоборот.

В системе главных осей I, II двумерного тензора ρ (рис. 1) уравнения электродинамики при зависимости величин \mathbf{H} , \mathbf{E} и \mathbf{j} от одной координаты y приводят к раздельным уравнениям для компонент электрического или магнитного поля, что означает совпадение направлений главных осей двумерных тензоров ρ и Z и приводит к следующим соотношениям для главных значений тензора поверхностного импеданса (временная зависимость электрического и магнитного поля взята в виде $e^{i\omega t}$):

$$Z_{1,2} = \sqrt{i\omega\mu_0\rho_{1,2}}, \quad (11)$$

где ω — круговая частота, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, i — мнимая единица.

Для определения компонент тензора поверхностного импеданса по осям системы Oxz воспользуемся преобразованием для них при повороте на угол $-\chi$ от системы главных осей I, II к системе Oxz

$$Z_{xx,zz} = \frac{1}{2} \left[Z_1 + Z_2 \pm (Z_1 - Z_2) \cos 2\chi \right],$$

$$Z_{xz} = \frac{1}{2} (Z_1 - Z_2) \sin 2\chi. \quad (12)$$

Воспользовавшись соотношениями (8), (11), (12) и тождествами $\sqrt{2(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b}}$ для компонент поверхностного импеданса в системе координат Oxz , окончательно получим

$$Z_{xx} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{2}} \frac{\rho_{xx} + \sqrt{b}}{\sqrt{a + \sqrt{b}}},$$

$$Z_{zz} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{2}} \frac{\rho_{zz} + \sqrt{b}}{\sqrt{a + \sqrt{b}}},$$

$$Z_{xz} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{2}} \frac{\rho_{xz}}{\sqrt{a + \sqrt{b}}}. \quad (13)$$

Соотношения (13) совместно с (6) и (9) остаются справедливыми и в более общем случае комплексного тензора ρ . Так, для сверхпроводника без потерь при локальной связи между полем и плотностью тока главные значения тензора удельного сопротивления представляются в виде $\rho_k = i\omega\mu_0\lambda_{Lk}^2$, где λ_{Lk} — главные значения тензора лондоновской глубины проникновения. Соотношения (13) согласуются с соотношениями, приведенными в [9] (см. задачу на с. 397) при замене компонент тензора ε_{ik}^{-1} , обратного к тензору диэлектрической проницаемости, на величину $i\omega\rho_{ik}$ и при соответствующем выборе знаков в приводимых соотношениях. Отметим следующее обстоятельство: даже если главные оси мнимой и действительной частей трехмерного тензора ρ совпадают, главные оси двумерного тензора ρ на плоскости, а следовательно, и тензоров R и X ($Z_{ik} = R_{ik} + iX_{ik}$) на цилиндрической поверхности в общем случае отличны. В дальнейшем будем предполагать тензор ρ действительным.

Для осесимметричных СВЧ резонаторов и волноводов соотношения для составляющих магнитного поля по переменным Z и β на цилиндрической поверхности разделяются, поэтому в соотношениях (2) вследствие зависимости компонент тензора Z_{ik} только от β интегрирование по ds можно заменить интегрированием по углу β . Положим зависимость компоненты H_z от угла β в виде $\sim \sin k(\beta - \beta_0)$, где $-k\beta_0$ — фаза моды резонатора или волновода с индексом k в месте расположения начальной системы координат. Угол β_0 , например, для объемного резонатора определяется как неоднородностями (отверстия связи, штыри и др.) [10], так и присутствующей анизотропией [6, 11]. Но при установившихся собственных колебаниях он однозначно определен этими условиями. Для компоненты $H_x \sim dH_z/d\beta$ зависимость от β будет пропорциональна $\cos k(\beta - \beta_0)$ и на основании соотношений (2) получим

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{zz} &= \bar{Z}_{ТЕМ} + \frac{1}{2}(a_{2k} \cos 2k\beta_0 + b_{2k} \sin 2k\beta_0), \\ \bar{Z}_{xx} &= \bar{Z}_0 - \frac{1}{2}(\tilde{a}_{2k} \cos 2k\beta_0 + \tilde{b}_{2k} \sin 2k\beta_0),\end{aligned}\quad (14)$$

где a_{2k} , b_{2k} , \tilde{a}_{2k} , \tilde{b}_{2k} — коэффициенты разложения функций $Z_{zz}(\beta)$, $Z_{xx}(\beta)$ в ряды Фурье, $\bar{Z}_{ТЕМ}$ — среднее значение поверхностного импеданса в случае $ТЕМ$ -моды или E_k -типа колебаний с индексом $k = 0$ (при отсутствии зависимости поперечной составляющей H_x от угла β), \bar{Z}_0 — среднее значение поверхностного импеданса в случае H_k -типа с $k = 0$ (при отсутствии зависимости продольной составляющей H_z от β),

$$\begin{aligned}a_{2k} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Z_{zz} \cos 2k\beta \, d\beta, & b_{2k} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Z_{zz} \sin 2k\beta \, d\beta, \\ \tilde{a}_{2k} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Z_{xx} \cos 2k\beta \, d\beta, & \tilde{b}_{2k} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Z_{xx} \sin 2k\beta \, d\beta, \\ \bar{Z}_{ТЕМ} &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Z_{zz} \, d\beta, & \bar{Z}_0 &= \frac{\tilde{a}_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Z_{xx} \, d\beta.\end{aligned}\quad (15)$$

На рис. 2 приведены зависимости величины $\bar{Z}_{ТЕМ}/Z_{01}$ ($Z_{01} = \sqrt{i\omega\mu_0\rho_1}$) для величин отношений $\rho_2/\rho_1 = 1.5$, $\rho_3/\rho_1 = 2$ от наклона θ оси Z относительно оси цилиндра для $\varphi = 30^\circ$ (кривая 2) и зависимость от угла φ (кривая 3) при $\theta = 30^\circ$, рассчитанные по первому из общих соотношений (2) с использованием формул (6), (9) и (13). Зависимость $\bar{Z}_{ТЕМ}$ от угла φ в пределах от $\pi/2$ до π симметричным образом продолжается в эту область, что видно из соотношений (9) для величин a и b , которые зависят только от аргумента 2β .

В дальнейшем займемся детальным исследованием случая одноосного кристалла ($\rho_1 = \rho_2$). Подставляя в соотношения (9), (10)

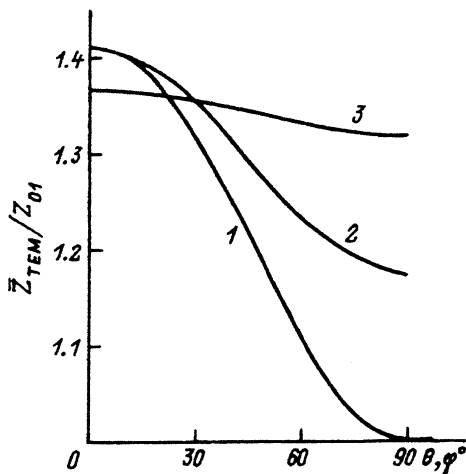


Рис. 2.

$\rho_1 = \rho_2 = \check{\rho} = \hat{\rho}$, после нахождения величин $a = (\frac{1}{2})[\rho_1 + \rho_3 + (\rho_1 - \rho_3) \times \sin^2 \theta \cos^2 \beta]$, $b = \rho_1[\rho_3 + (\rho_1 - \rho_3) \sin^2 \theta \cos^2 \beta]$, $\sqrt{a^2 - b} = \frac{1}{2}|\rho_1 - \rho_3|(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \beta)$ для компонент поверхностного импеданса Z_{xx} и Z_{zz} непосредственно из (13) или с использованием (12) на основе соотношений для главных значений тензора поверхностного импеданса, одно из которых Z_{01} , а другое $Z_{03}\sqrt{1 - m \cos^2 \beta}$, получим

$$Z_{zz} = (1 - n \cos^2 \beta)^{-1} \left[n \sin^2 \beta Z_{01}' + \sqrt{1 - m \cos^2 \beta} \cos^2 \theta Z_{03} \right],$$

$$Z_{xx} = (1 - n \cos^2 \beta)^{-1} \left[\cos^2 \theta Z_{01} + \sqrt{1 - m \cos^2 \beta} n \sin^2 \beta Z_{03} \right],$$

$$n = \sin^2 \theta, \quad m = (1 - \gamma^2)n, \quad \gamma = \frac{Z_{01}}{Z_{03}}; \quad Z_{0k} = \sqrt{i\omega\mu_0\rho_k}, \quad k = 1, 3. \quad (16)$$

Величины Z_{0k} представляют значения поверхностных импедансов, которые бы получались в изотропном случае с удельными сопротивлениями, равными главным значениям тензора ρ . В соотношения (16) входят только квадраты синуса и косинуса угла β , поэтому в их разложении Фурье отсутствуют коэффициенты при $\sin 2k\beta$, т.е. $b_{2k} = \bar{b}_{2k} = 0$. Вычислим среднее значение компоненты тензора \bar{Z}_{zz} в случае моды с первым индексом, равным k (компоненты полей $\sim \cos k\beta, \sin k\beta$). Положим $a_{2k} = a_{2k}^{(0)} + a_{2k}^{(1)}$, где величины $a_{2k}^{(0)}$ и $a_{2k}^{(1)}$ представляют интегралы от первого и второго членов верхнего равенства (16). Интегрировав по β из соотношений (15) получаем

$$a_0^{(0)} = 2Z_{01}(1 - \cos \theta), \quad a_{2k}^{(0)} = -2Z_{01} \cos \theta \operatorname{tg}^{2k} \frac{\theta}{2} \quad (k > 0),$$

$$a_{2k}^{(1)} = \frac{4}{\pi} Z_{03} \cos^2 \theta J_k, \quad J_k = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - m \cos^2 \beta}}{1 - n \cos^2 \beta} \cos 2k\beta \, d\beta. \quad (17)$$

Интегралы J_k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$J_k = 2 \left(\frac{2}{n} - 1 \right) J_{k-1} - J_{k-2} - \frac{4}{n} E_{k-1}, \quad (18)$$

где интегралы $E_k(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \cos^2 \beta} \cos 2k\beta d\beta$ при необходимости вычисления можно взять в виде, приведенном в [12] (см. там № 11, № 18, с. 426). Найдем явные формулы для коэффициентов a_0 и a_2 . Из (18) для индекса $k = 1$ с учетом $J_k = J_{-k}$ имеем

$$J_1 = \left(\frac{2}{n} - 1 \right) J_0 - \frac{2}{n} E,$$

где $E(m)$ — полный эллиптический интеграл II рода [13]. Величина J_0 после соответствующих преобразований представляется в виде

$$J_0 = \left(1 - \frac{m}{n} \right) \Pi(n/\alpha) + \frac{m}{n} K(m),$$

где $m = \sin^2 \alpha$, а $K(m)$ и $\Pi(n/\alpha)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего родов [13]. Окончательно с учетом соотношений для n и m (16) для величин a_0 и a_2 имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= 2Z_{01}(1 - \cos \theta) + \frac{4}{\pi} Z_{03} \cos^2 \theta \left[\gamma^2 \Pi + (1 - \gamma^2) K \right], \\ a_2 &= -2 \cos \theta \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} Z_{01} + \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta Z_{03} \left\{ \left(\frac{2}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times [\gamma^2 \Pi + (1 - \gamma^2) K] - \frac{2}{\sin^2 \theta} E \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

При вычислении коэффициентов a_0 , a_2 по точным соотношениям (19) более удобно их представление через лямбда-функцию Хеймана $\Lambda_0(\varepsilon/\alpha)$, численные значения которой приведены в [13]. С использованием связи $\Pi(n\alpha) = K(m) + \pi(2\gamma \cos \theta)^{-1} [1 - \Lambda_0(\varepsilon/\alpha)]$ формулы (19) переписутся

$$\begin{aligned} a_0 &= 2Z_{01} + \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta Z_{03} \left[K(m) - \frac{\pi\gamma}{2 \cos \theta} \Lambda_0(\varepsilon/\alpha) \right], \\ a_2 &= 4 \operatorname{ctg}^2 \theta Z_{01} + \frac{4}{\pi} \operatorname{ctg}^2 \theta Z_{03} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) \left[K(m) - \frac{\pi\gamma}{2 \cos \theta} \Lambda_0(\varepsilon/\alpha) \right] - 2E \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

В соотношениях (20) для значений $\gamma < 1$ ($0 < m < 1$), $\varepsilon = \arcsin(\cos \theta / \cos \alpha)$, $m = \sin^2 \alpha$. При $\gamma > 1$ величина m становится отрицательной. В этом случае в соотношениях (19), (20) эллиптические

интегралы $K(m)$, $E(m)$ приводятся к общепринятой форме с модулем $|m|/(1+|m|)$, меньшим единицы, посредством соотношений

$$K(m) + (1+|m|)^{-1/2} K\left(\frac{|m|}{1+|m|}\right),$$

$$E(m) = (1+|m|)^{1/2} E\left(\frac{|m|}{1+|m|}\right) \quad [13].$$

Для лямбда-функции Хеймана в соотношении (20) в этом случае необходимо полагать

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{и} \quad \sin^2 \alpha = \frac{|m|}{1+|m|}.$$

Соотношения (19), (20), хотя и являются строгими, для счета требуют подробных таблиц табулированных специальных функций; поэтому для практических целей желательны более простые приближенные формулы. Раскладывая подынтегральные функции соотношений для $Z_{ТЕМ} = (1/2)a_0$ и a_2 (15) по степеням n до n^2 включительно, после интегрирования по β найдем соотношения, верные для малых значений n ,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{Z}_{ТЕМ}}{Z_{01}} &= \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 - \frac{1}{4}n(1-\gamma)(3+\gamma) - \frac{n^2}{16}(1-\gamma)^2 \left[1 + \frac{3}{4}(1+\gamma)^2 \right] \right\}, \\ \frac{a_2}{Z_{01}} &= \frac{1}{4\gamma}n(1-\gamma)^2 \left[1 - \frac{1}{4}n(1+\gamma)^2 \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения для малых значений величины $\xi = 1 - n = \cos^2 \theta$ до ξ^2 получаются разложением соответствующих соотношений (20) по этой величине. С учетом разложений функций при $\xi = 0$ $\Lambda_0 = 2\sqrt{\xi}(\pi\gamma)^{-1}[E + \frac{1}{6}\xi(K + (1-2\gamma^{-2})E)]$, $E(m) = E + \frac{1}{2}(K-E)\xi$, $K(m) = K + \frac{1}{2}(K-\gamma^{-2}, E)$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{Z}_{ТЕМ}}{Z_{01}} &= 1 + \frac{2\xi}{\pi\gamma} \left\{ K - E + \frac{1}{6}\xi \left[2K - (1+\gamma^{-2})E \right] \right\}, \\ \frac{a_2}{Z_{01}} &= 4\xi \left\{ 1 + \frac{1}{\pi\gamma}(K - 3E) + \xi \left[1 + \frac{1}{6\pi\gamma} \left[8K - (19 + \gamma^{-2})E \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Эти соотношения записаны для $\gamma < 1$, при этом аргументом эллиптических интегралов является значение $m_0 = 1 - \gamma^2$, взятое при $n = 1$. Для $\gamma > 1$ соотношения (22) остаются в силе при замене $E(1 - \gamma^2)$ на $\gamma E(1 - \gamma^{-2})$ и $K(1 - \gamma^2)$ на $\gamma^{-1}K(1 - \gamma^{-2})$. На рис. 2 приведена зависимость величины $\bar{Z}_{ТЕМ}/Z_{01}$ (кривая 1), а на рис. 3 — зависимости коэффициентов $a_2/(2Z_{01})$ (кривая 1) и $a_4/(2Z_{01})$ (кривая 2) от угла θ для значения $\gamma = 1/\sqrt{2}$. Из рисунков следует, что a_2 и a_4 имеют максимумы, зависящие от параметра γ , положение которого для величины

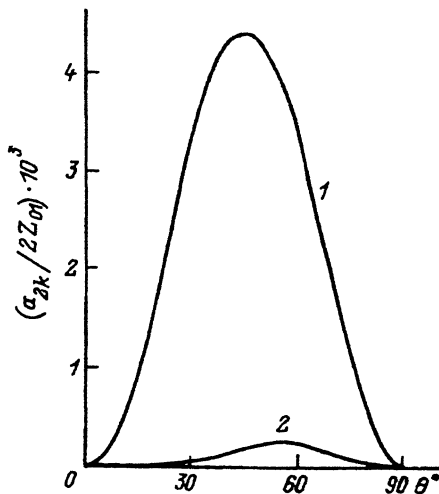


Рис. 3.

a_2 грубо можно определить дифференцированием вторых соотношений (21) или (22).

Соотношения для \bar{Z}_{xx} , необходимые в случае H -типов колебаний, можно найти из условия $Z_{xx} + Z_{zz} = Z_1 + Z_2$, что дает $Z_{xx}/Z_{01} = 1 + \gamma^{-1} \sqrt{1 - m \cos^2 \beta} - Z_{zz}/Z_{01}$ и на основе соотношений (15) приводит к

$$\frac{\bar{Z}_0}{Z_{01}} = 1 + \frac{2}{\pi\gamma} E(m) - \frac{\bar{Z}_{TEM}}{Z_{01}},$$

$$\frac{\bar{a}_{2k}}{Z_{01}} = \frac{4}{\pi\gamma} E_k(m) - \frac{a_{2k}}{Z_{01}}. \quad (23)$$

При вычислении коэффициента \bar{a}_2 на основе интеграла, приводимого в [12] (см. № 6, с. 200), можно использовать его значение $E_1(m) = (3m)^{-1} [2(1-m)K(m) + (m-2)E(m)]$. Из соотношений (23) с учетом (21) и разложений

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{m}{4} - \frac{3}{64} m^2 \right) \text{ и } E_1(m) = -\frac{\pi m}{16} \left(1 + \frac{1}{4m} \right).$$

найдем соответствующие формулы для величин \bar{Z}_0/Z_{01} и \bar{a}_{2k}/Z_{01} с точностью до n^2

$$\frac{\bar{Z}_0}{Z_{01}} = 1 + \frac{n(1-\gamma)}{2\gamma} \left[1 + \frac{1}{8} n(1-\gamma) \right],$$

$$\frac{\bar{a}_2}{Z_{01}} = \frac{1}{2} n(1-\gamma^{-1}). \quad (24)$$

Первые формулы соотношений (21) и (22), а также соотношения (24) мало отличаются от точных и для практических целей достаточны для определения соответствующих величин. Вторые из формул (21) и (22)

для коэффициента a_2 менее точны, однако верно воспроизводят вид зависимости a_2 от n .

Таким образом, по известной ориентации кристалла цилиндра, известным главным значениям тензора удельного объемного сопротивления и известной поляризации уединенной моды представленные соотношения дают полное решение поставленной задачи определения среднего поверхностного импеданса цилиндрических поверхностей осесимметричных объемных СВЧ структур, а следовательно, например, результатов измерения добротностей уединенных мод цилиндрических, коаксиальных и подобных резонаторов.

Данные соотношения, если известны главные значения тензора удельного объемного сопротивления ρ_i , могут быть использованы для определения информации об ориентации кристалла, если она неизвестна. Например, в случае одноосного кристалла измерение среднего поверхностного сопротивления \bar{R} цилиндров при комнатных температурах по измерению добротности резонатора на $ТЕМ$ -моды позволяет по кривой I на рис. 2 определить угол θ наклона оси симметрии кристалла по отношению к оси цилиндра. Измерение величины \bar{R} как функции угла β , если есть возможность изменения поляризации уединенной моды, дает возможность определить дополнительно плоскость, где лежит ось симметрии высшего порядка, и, таким образом, ось симметрии кристалла определяется с неопределенностью до двух направлений в пространстве. Например, для моды E_1 из (14) $\bar{Z}_E = \bar{Z}_{ТЕМ} + (1/2)a_2 \cos 2\beta_0$, и так как $a_2 > 0$ (21), то добротность при $\beta_0 = 0$ будет минимальна. Для этих целей, может быть, более предпочтительней H -мода, так как величина \bar{a}_2/Z_{01} в данном случае значительно больше. Аналогичную методику можно использовать и в общем случае трехосного кристалла с неизвестной ориентацией.

Список литературы

- [1] Mohanty S., Dheer P.N. // Sol. St. Commun. 1984. Vol. 50. N 8. P. 745-747.
- [2] Waldram J.R. // Adv. Phys. 1964. Vol. 13. N 49. P. 1-88.
- [3] Spiwak M. // Phys. Rev. 1959. Vol. 113. N 6. P. 1479-1494.
- [4] Pippard A.B. // Proc. Roy. Soc. 1950. Vol. 203. N 1072. P. 98-115.
- [5] Менде Ф.Ф., Спицын А.И., Дубров Н.Н. // ЖТФ. 1980. Т. 51. Вып. 8. С. 1609-1615.
- [6] Спицын А.И. Канд. дис. Харьков, 1985.
- [7] Козарез В.В. Динамические системы магнитно-взаимодействующих свободных тел. Киев: Наукова думка, 1983. 240 с.
- [8] Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1968. 252 с.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз. 1959. 530 с.
- [10] Штейншлегер В.Б. Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. М.: Оборонгиз, 1955. 112 с.
- [11] Mende F.F., Spitzyn A.J., Skugarevski A.V., Maslova L.A. // Cryogenics. 1985. Vol. 25. N 2. P. 92-93.
- [12] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 799 с.
- [13] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.