

01;09  
©1994 г.

## ОСОБЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦЕПОЧКАХ СВЯЗАННЫХ МАЛЫХ ОБЪЕМОВ, СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕКТРОНЫ-ОСЦИЛЛЯТОРЫ

*Е.С.Мчедлова, Д.И.Трубецков*

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского,  
Государственный учебно-научный центр "Колледж",  
410071, Саратов, Россия  
(Поступило в Редакцию 15 февраля 1994 г.)

Рассмотрены различные последовательности связанных движущихся малых излучающих объемов — электронных структур, состоящих из классических электронов-осцилляторов. В каждой электронной структуре присутствует кооперативное излучение. Исследовано влияние полей резонаторов на динамику излучения потока. В вычислительном эксперименте получены различные типы распределений полей, спектры и фазовые портреты для представленных моделей.

### Введение

Моделирование процессов в неравновесных диссипативных средах, несомненно, — одно из важных направлений в исследовании нелинейных распределенных систем. Особый интерес вызывают задачи, связанные с изучением образования когерентных структур в средах различной природы и их последующего взаимодействия, приводящего к возникновению в среде сложных динамических процессов.

Для современной ВЧ электроники представляет интерес явление кооперативного излучения (когерентного спонтанного излучения) классических электронов-осцилляторов (см., например, [1]). Малые излучающие объемы, содержащие ансамбли таких осцилляторов, вполне могут быть составляющими элементами распределенной системы (взаимодействующими когерентными структурами). Такая распределенная система представляется новой для задач нелинейной динамики благодаря необычному выбору взаимодействующих электронных структур.

В ВЧ электронике решение задачи о сложной динамике подобной системы может помочь в объяснении некоторых известных экспериментальных фактов. В частности, образование структур в электронных потоках наблюдалось экспериментально авторами известной работы

[2]. Более того, в работе [3] экспериментально обнаружено возникновение хаоса в цилиндрическом кольцевом электронном потоке, дрейфующем в продольном постоянном магнитном поле. По-видимому, сложная динамика потока была вызвана взаимодействием электронных структур.

Теоретические модели, объясняющие экспериментальные результаты работы [3], отсутствуют. Хотя лежащий на поверхности путь описания взаимодействия структур в неравновесных средах с диссипацией ясен, необходимы модели, несущие в себе потенциальную возможность возникновения и развития сложной динамики, которая заложена в физической природе самой среды.

Главное отличие данной работы от известных в нелинейной динамике в том, что система со взаимодействующими структурами имеет внутреннюю сложность: каждый элемент состоит из конечного числа более мелких подсистем — ансамбля нелинейных осцилляторов.

Известно, что для описания динамики распределенных систем преимущественно используются два различных подхода. Математическим выражением первого служат непосредственно уравнения в частных производных или их дискретные аналоги. Второму подходу соответствует моделирование распределенной системы как последовательности связанных сосредоточенных систем. Модели, представленные в данной работе, отличаются тем, что в цепочке связанных элементарных структур каждая из них в свою очередь описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнения движения совокупности колеблющихся электронов). Все предлагаемые ниже системы существенно отличаются видом связей между элементами и, следовательно, способом описания. Результаты для каждой системы получены в процессе численного моделирования.

### **Поток взаимодействующих электронных структур. Влияние одиночных резонаторов на поток**

Рассмотрим последовательность движущихся электронных структур, оказывающих друг на друга взаимное влияние. Под электронной структурой будем понимать малый объем активной среды, состоящей из электронов-осцилляторов. Предполагается, что для каждого электронного ансамбля имеет место кооперативное излучение [1,4-6], возникающее, как известно, в результате взаимодействия осцилляторов через поле собственного излучения, являющегося для них фазирующим. Естественно, что такой процесс может протекать только в системе нелинейных, неизохронных осцилляторов: именно неизохронность служит причиной фазировки.

В безразмерных комплексных переменных процессы в потоке взаимодействующих электронных ансамблей описываются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{c}_{ki} + j\theta (|c_{ki}|^2 - 1) c_{ki} = -\bar{c}_i + K_F \bar{c}_{i-1} + K_B \bar{c}_{i+1}, \quad (1)$$

где  $k = 1, \dots, M$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$ ;  $M$  — число электронов в каждом ансамбле;  $c_{ki}$  — безразмерная комплексная переменная, соответствующая полю  $k$ -го электрона в  $i$ -й структуре;

$$\bar{c}_i = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M c_{ki}$$

определяет дипольный момент  $i$ -й системы электронов; параметр  $\theta$  пропорционален отношению коэффициента неизохронности к коэффициенту затухания электронов по энергии;  $K_F$  и  $K_B$  — коэффициенты взаимного влияния элементов потока;  $j = \sqrt{-1}$ ; точка означает дифференцирование по безразмерному времени.

Очевидно, что при  $K_F = K_B = 0$  уравнение (1) описывает процессы в  $i$ -й изолированной структуре.

Система уравнений (1) решалась численно с начальными условиями вида

$$c_{ki} = \exp \left[ -j \left( \frac{2\pi k}{M} + \delta \cos \frac{2\pi k}{M} \right) \right]; \quad (2)$$

последняя формула соответствует тому, что в начальный момент времени в равномерное распределение электронов по фазам внесено малое возмущение  $\delta$ .

Для моделирования динамики взаимосвязанных электронных структур следует учесть их конечное время жизни в области взаимодействия. Очевидно, это время должно быть приблизительно равно времени  $\Delta T$ , за которое происходит излучение из каждого элементарного объема (для кооперативного излучения существует характерный временной интервал, в течение которого электроны отдают большую часть запасенной энергии и суммарный дипольный момент системы становится равным нулю [1]).

Движение электронных структур предполагает “перенос информации” от  $(i-1)$ -го к  $i$ -му сечению потока через время  $\Delta t = \Delta T/N$ , где  $N$  — число структур, одновременно присутствующих в потоке. Математически это выражается в том, что в каждый момент времени, кратный интервалу  $\Delta t$ , для всех номеров  $i = N, \dots, 2$  происходит переприсвоение вида

$$c_{k_{i-1}}(m\Delta t) = c_{k_i}(m\Delta t),$$

где  $m = 1, 2, \dots$ .

Для  $i = 1$  всегда задаются начальные условия (2), которые соответствуют ансамблю вновь поступивших в поток электронов. Обратим внимание, что индекс  $i$  не является номером структуры, а соответствует лишь фиксированному месту в пространстве взаимодействия и служит дискретным аналогом пространственной координаты.

На рис. 1 и 2 представлены пространственно-временное распределение величины  $|\bar{c}|^2$ , пропорциональной безразмерной мощности излучения, и спектры в разных сечениях потока. Следует отметить, что данная система содержит достаточно большое число параметров, оказывающих существенное влияние на характер развивающихся в ней процессов и картины распределений полей (информация об этом содержится в работе [7]).

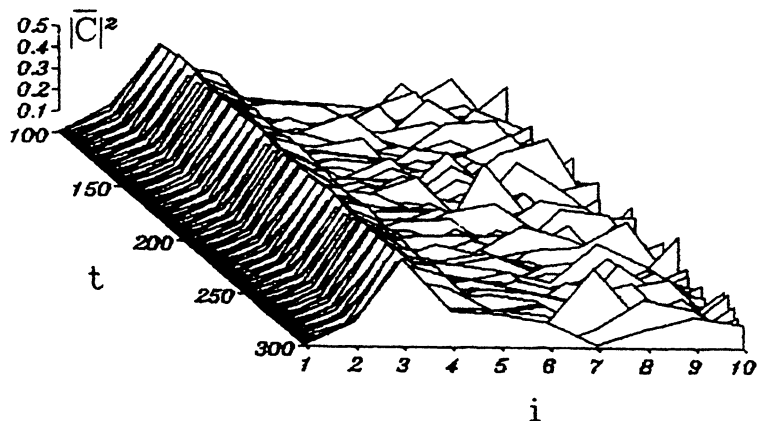


Рис. 1. Пространственно-временное распределение безразмерной мощности излучения для потока электронных структур ( $\theta = 2$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $K_F = 0.8$ ,  $K_B = 0.7$ ,  $M = 12$ ).

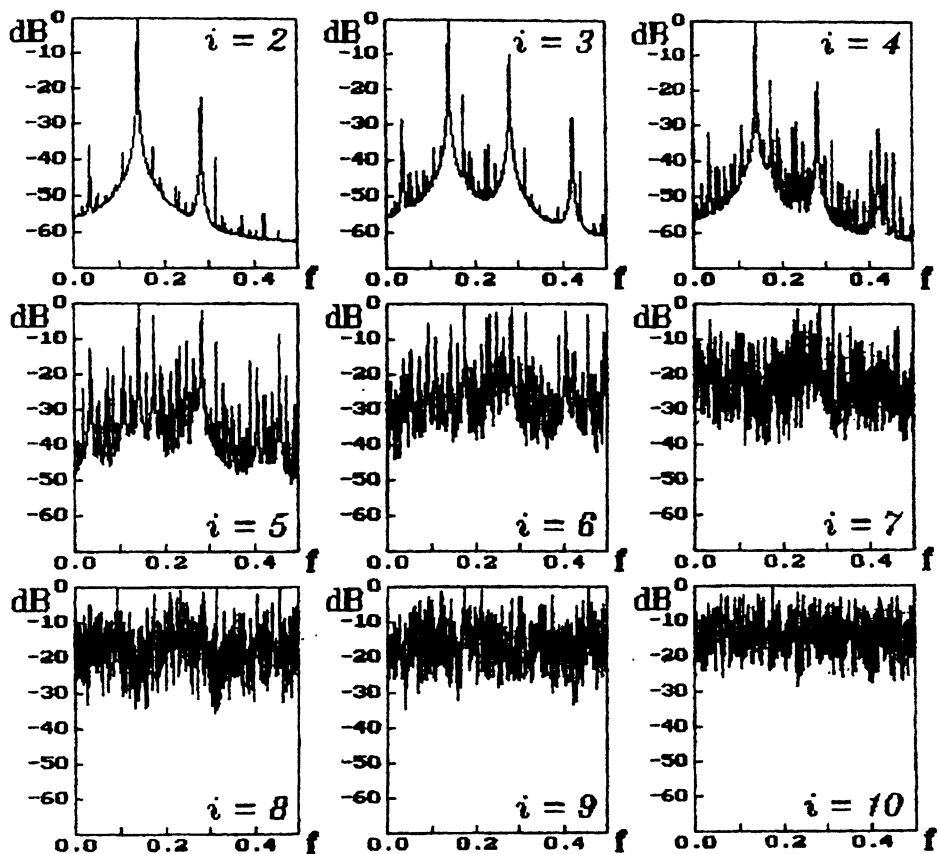


Рис. 2. Спектры в разных сечениях потока для процесса, показанного на рис. 1.

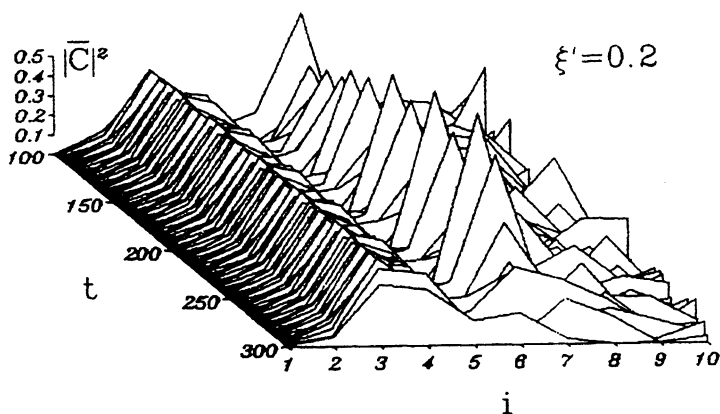
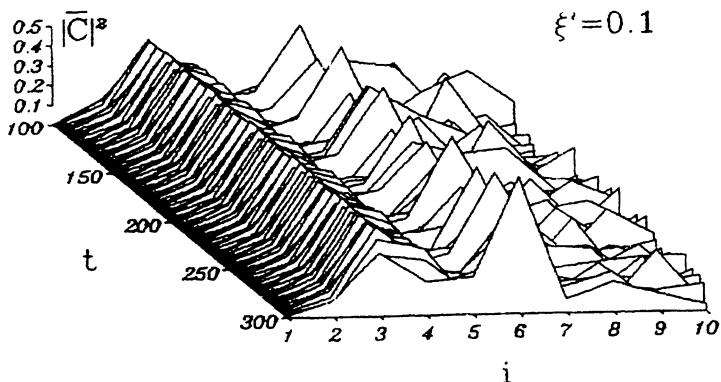


Рис. 3. Зависимость  $|\bar{c}|^2(i, t)$  для потока с резонатором в сечении  $i = 5$  при разных значениях  $\xi'$  — собственной частоты резонатора. Значения параметров, характеризующих поток, остались прежними.

Динамика потока изменится, если на пути движения электронных сгустков поместить один или несколько резонаторов (рис. 3, 4). Зависимость  $|\bar{c}|^2(i, t)$  для случая, когда резонатор помещен в середину потока ( $i = 5$ ), представлена на рис. 3. Однако больший интерес вызывает случай, когда электронные структуры проходят через два резонатора, один из которых находится в начале потока ( $i = 2$ ), а другой — на выходе из него ( $i = 10$ ). Математическая реализация таких моделей аналогична (1) с той лишь разницей, что взаимодействие электронов с резонаторами описывается системой уравнений типа (3), о которой будет говориться ниже.

На рис. 4 показаны пространственно-временные распределения полей в потоке с двумя резонаторами для разных значений их собственной частоты.

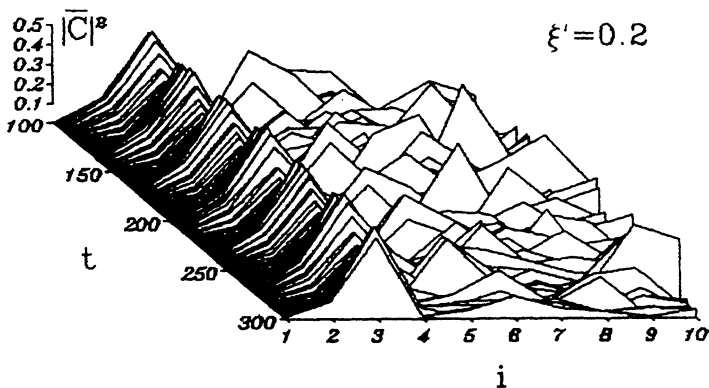
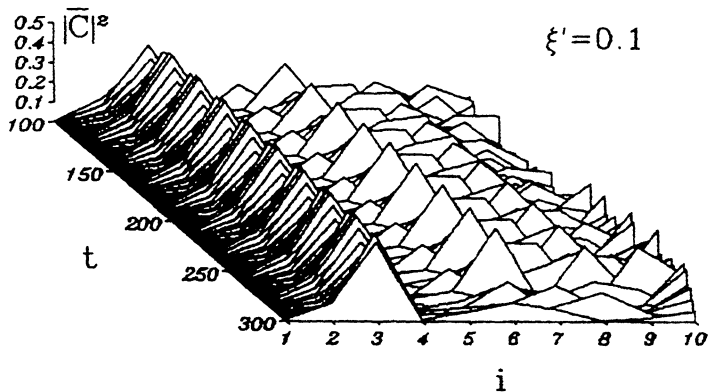


Рис. 4. То же, что на рис. 3, для потока с двумя резонаторами.

### Последовательность связанных резонаторов

Следующая модель качественно отличается от предыдущих и представляет собой цепочку резонаторов, через которую проходят электронные структуры (в общем случае изолированная система типа нелинейные электроны-осцилляторы-резонатор рассматривалась в [1], где содержится вывод соответствующей системы уравнений).

Пусть связь между резонаторами осуществляется за счет движения через них электронных сгустков. Будем считать, что электронные структуры за некоторое конечное время проходят через цепочку резонаторов, задерживаясь в каждом из них на время  $T$ , в течение которого и происходит взаимодействие электронов с полем резонатора.

В этом случае модель можно описать следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{c}_{kn} + j\tilde{\theta}(|c_{kn}|^2 - 1)c_{kn} = jc_{ri}, \quad \dot{c}_{ri} + j\xi c_{ri} = j\bar{c}_n. \quad (3)$$

Здесь  $c_{ri}$  — безразмерная комплексная переменная, соответствующая полю  $i$ -го резонатора цепочки;  $c_{kn}$  характеризует поле  $k$ -го электрона в  $n$ -й структуре;

$$\bar{c}_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M c_{kn}$$

— усредненное по начальным фазам поле  $M$  частиц  $n$ -го электронного ансамбля;  $\tilde{\theta}$  — отношение коэффициента неизохронности к параметру усиления; величина  $\xi = \xi' - j\xi''$  комплексная и пропорциональна собственной частоте колебаний поля в резонаторе.

Первое уравнение системы (3) описывает влияние поля резонатора на ансамбль находящихся в нем электронов; второе представляет собой уравнение возбуждения резонатора полем электронной структуры.

Необходимо отметить, что форма записи (3) не отражает в явном виде факта движения электронов через резонаторы. Учет этого содержится непосредственно в численном алгоритме и заключается в следующем. Для каждой электронной структуры, поступающей в поток с номером  $n$ , справедливы начальные условия

$$c_{kn}(0) = \exp\left(-j\frac{2\pi k}{M}\right). \quad (4)$$

Заметим, что условия вида (4) соответствуют равномерному распределению электронов по фазам в интервале  $(0, 2\pi)$  в начальный момент времени. В течение времени  $T$ , определяющего пребывание  $n$ -й структуры в  $i$ -м резонаторе, решается система (3). По прошествии времени  $T$ , электроны  $n$ -й структуры перемещаются в  $(i+1)$ -й резонатор, что означает, что в уравнениях (3) будут уже фигурировать переменные  $c_{r,i+1}$ . В то же время на место  $n$ -й структуры в  $i$ -й резонатор поступает  $(n-1)$ -я, и т.д. Таким образом, при решении системы для каждого номера  $n$  индекс  $i$  пробегает значения от 1 до порядкового номера последней ячейки, который в данном случае равен 10.

Нетрудно видеть, что за счет переноса электронов и взаимодействия их с полями резонаторов в потоке достигается взаимное влияние.

Решая систему (3) с учетом вышеизложенных представлений, можно получить картины изменения поля системы во времени и в пространстве. На рис. 5 представлены фазовые портреты процессов  $|c_r|^2(t)$  в нескольких сечениях потока.

При решении существенной является величина  $T$ . Для данной модели существует такое значение  $T = T_{cr}$ , начиная с которого в системе становится возможным развитие незатухающих колебательных процессов. Для  $T < T_{cr}$  колебания поля во всех резонаторах цепочки затухают с течением времени. Это можно объяснить тем, что за время, меньше  $T_{cr}$ , электроны не "успевают" сгруппироваться настолько, чтобы оказать заметное влияние на поле резонатора и за счет этого связь между соседними элементами цепочки становится неэффективной. Поэтому время пребывания электронов в каждом резонаторе имеет смысл задавать из соображений их оптимальной фазировки хотя бы на начальных этапах взаимодействия.

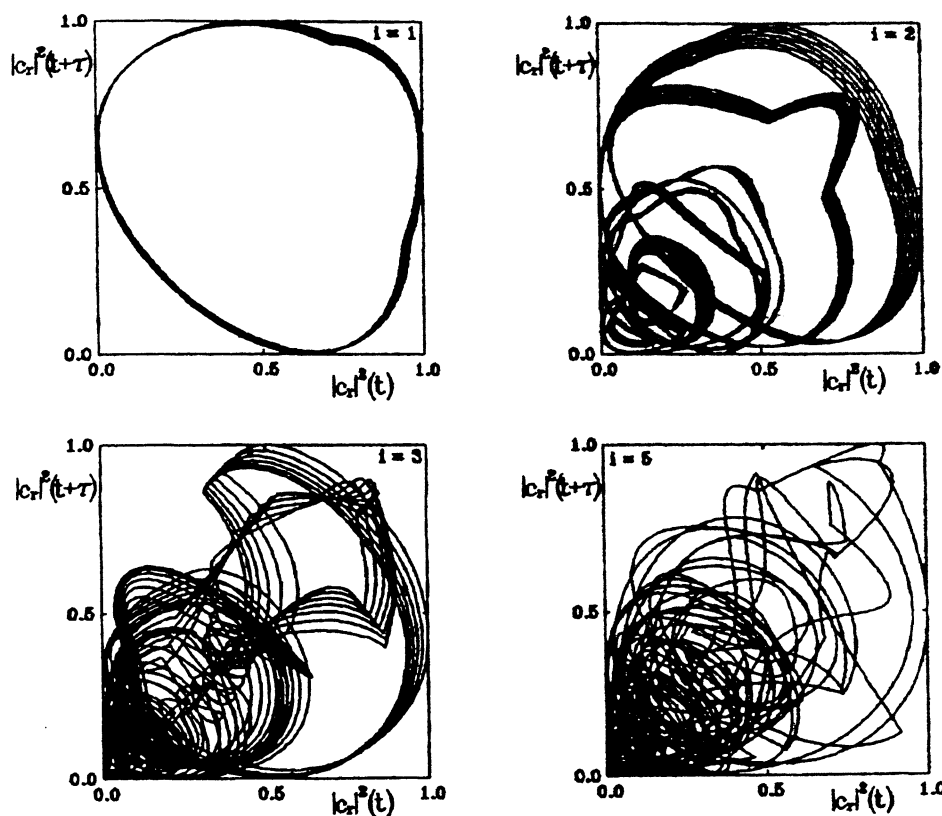


Рис. 5. Фазовые портреты, соответствующие последовательности связанных резонаторов ( $i$  — порядковый номер резонатора) ( $\theta = 1$ ,  $T = 3$ ,  $\xi' = 0.1$ ,  $\xi'' = 0$ ,  $M = 12$ ).

Для наглядного представления процессов фазировки на рис. 6 показаны мгновенные положения электронов некоторых структур, проходящих последовательно из пяти резонаторов, на фазовой плоскости  $\text{Im } c_{kn}(\text{Re } c_{kn})$  в последние моменты пребывания в резонаторах.

### Заключение

Перечислим основные результаты работы.

Из рис. 1, 2 нетрудно видеть, что в потоке взаимно связанных электронных структур имеет место заметное усложнение пространственно-временной динамики процесса: с ростом дискретной пространственной координаты  $i$  регулярность во времени нарушается.

Картину можно качественно изменять, если поток пропускать через один или несколько резонаторов, причем характер изменений будет зависеть главным образом от частоты резонатора и от того, в какое именно сечение потока он помещен.

Рассмотрим случай, соответствующий рис. 4: один резонатор находится в начале потока ( $i = 2$ ), другой — на выходе из него ( $i = 10$ ). Заметно, что в зависимости от величины  $\xi'$ , определяющей собственные



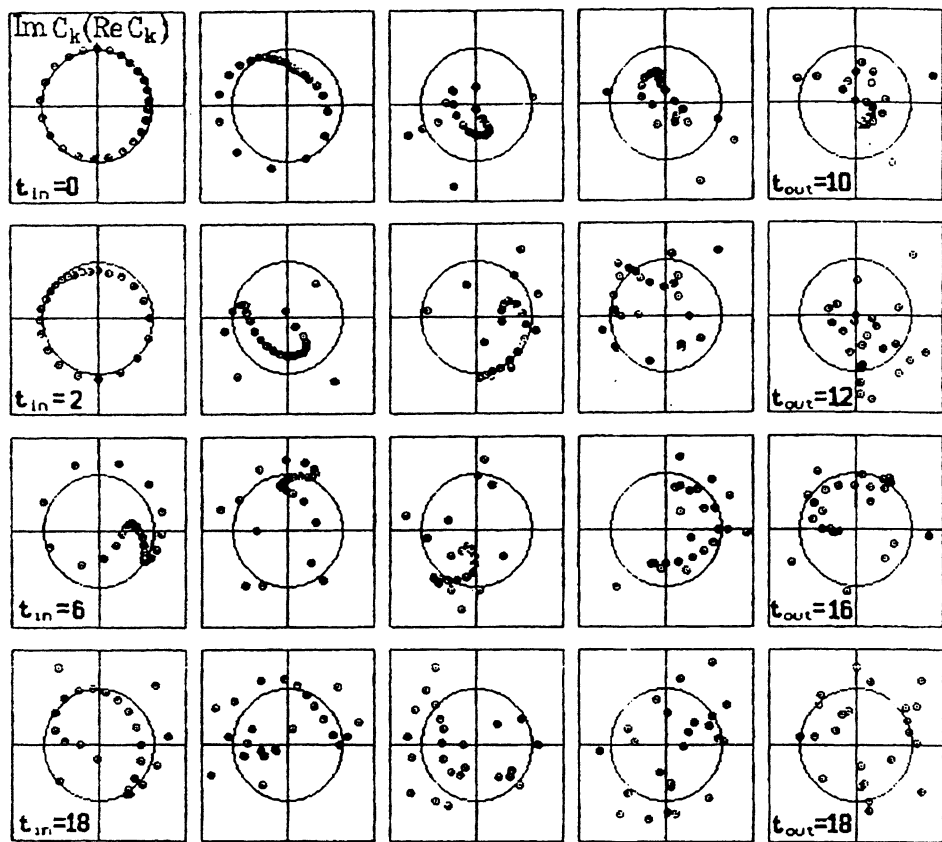


Рис. 6. Мгновенные положения электронов 1, 2, 4 и 10 структур на фазовой плоскости  $\text{Im } C_k (\text{Re } C_k)$  в последние моменты пребывания в резонаторах для цепочки из пяти элементов.

частоты резонаторов, процесс будет выглядеть или более упорядоченным в смысле относительного сохранения временной периодичности вдоль потока ( $\xi' = 0.1$ ), или еще более хаотизируется ( $\xi' = 0.2$ ). Объяснение состоит в том, что значение  $\xi' = 0.1$  ближе к собственной частоте процесса в потоке без резонаторов, которая составляет примерно 0.14 (рис. 2) и в основном определяется параметрами  $\theta$  и  $K_b$  (естественно, что понятие собственной частоты для потока электронных структур имеет смысл только для первых значений пространственной координаты, где еще сохраняется регулярность во времени). При  $\xi' = 0.2$  резонансного взаимодействия не наблюдается и наличие резонаторов приводит лишь к более эффективной разгруппировке электронов отдельных структур и, как следствие этого, к более сложному распределению величины  $|\bar{c}|^2$  во времени и в пространстве.

Все сказанное относится и к случаю, представленному на рис. 3, когда резонатор один и помещен в середину потока ( $i = 5$ ). Различие заключается только в том, что описанный выше механизм взаимодействия, зависящий от соотношения частот, менее ярко выражен, поскольку взаимодействие электронов с полем резонатора происходит

в таком сечении потока ( $i = 5$ ), где зависимость  $|c|^2(t)$  менее регулярна по сравнению с  $|\bar{c}|^2(t)$ , соответствующей первым значениям дискретной пространственной координаты.

Информация, полученная по последней из предложенных в настоящей работе моделей (последовательность связанных резонаторов), также позволяет сделать выводы об усложнении пространственной и временной динамики систем данного типа. Фазовые портреты (рис. 5), восстановленные по реализациям для полей 1, 2, 3 и 5 резонаторов цепочки, показывают разрушение периодического режима с ростом дискретной пространственной координаты  $i$ , соответствующей в данном случае порядковому номеру резонатора. Из рис. 6. в частности, видно, что как бы оптимально ни были сфазированы осцилляторы в начальные моменты времени и в первых резонаторах цепочки с течением времени и увеличением  $i$  происходит дефазировка, которая нарушает периодичность энергообмена между электронами и последующими резонаторами, что в свою очередь обуславливает достаточно сложное, нерегулярное поведение функции  $|c_r|^2(i, t)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-02-16171).

#### Список литературы

- [1] Вайнштейн Л.А., Клеев А.И. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 1989. Кн. 1. С. 25-53.
- [2] Kuhl R.L., Webster H.F. // IRE Trans., 1956. Vol. ED-3. N 4. P. 172.
- [3] Ампилогова В.Р., Зборовский А.В., Трубецков Д.И., Худзик К.В. // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, 1986. Кн. 1. С. 106-110.
- [4] Канавец В.И., Стабинис А.Ю. // Вестн. МГУ. 1973. № 2. С. 186-195.
- [5] Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский В.В. // УФН. 1989. Т. 159. № 2. С. 193-260.
- [6] Гинзбург Н.С., Ковалев Н.Ф., Петелин М.И. // Матер. VI семинара "Релятивистская ВЧ электроника". Горький, 1990. Вып. 6. С. 7-81.
- [7] Мчедлова Е.С., Трубецков Д.И. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 24. С. 26-30.