

01;05;06

©1994 г.

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КВАДРУПОЛЬНОМ ДЕФЛЕКТОРЕ

*Б.В.Крылов, В.Е.Лепарский, Н.И.Гурин*

Институт физики им. Б.И. Степанова,  
220602, Минск  
(Поступило в Редакцию 14 октября 1993 г.)

Предложен метод расчета электрического поля в квадрупольном дефлекторе. Приближенное решение строится в виде степенного ряда, каждое слагаемое которого является решением уравнения Лапласа. Результаты вычислений, представленные в виде теоретически рассчитанных интерферограмм, сравниваются с экспериментальными данными. Приводятся погрешности вычислений.

Электрооптические дефлекторы градиентного типа, выполненные из кристалла, обладающего линейным электрооптическим эффектом, можно разделить на две группы. К первой группе относятся дефлекторы [1], параметры которых не зависят от анизотропии электрооптического материала, ко второй — устройства [2,3], значительно более высокая эффективность которых по сравнению с устройствами первой группы достигается за счет оптимального использования анизотропных свойств кристалла. Характерной чертой последних является жесткая связь между свойствами используемого кристалла и формой электродов. Рассматриваемые дефлекторы представляют собой ориентированные соответствующим образом кристаллические элементы, на их боковые поверхности, выполненные в виде участков цилиндрических поверхностей, нанесены металлические электроды. Направляющими цилиндров являются две пары сопряженных гипербол (рис. 1)

$$z^2 - \alpha x'^2 = \begin{cases} R_z^2, \\ -\alpha R_{x'}^2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $R_z$  и  $R_{x'}$  — расстояния от начала координат до вершин электродов, пересекающих соответствующие оси;  $\pm\sqrt{\alpha} = \operatorname{tg} v$ , где  $v$  — угол наклона асимптот гипербол к оси  $x'$ .

Потенциал электрического поля, создаваемого электродами (1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

которое с помощью масштабных преобразователей легко приводится к уравнению Лапласа. В (2)  $\varepsilon = \varepsilon_z/\varepsilon_x$  — анизотропия диэлектрической проницаемости кристалла, а оси  $x'$  и  $z$  совпадают с главными осями  $X', Z$  тензора диэлектрической проницаемости кристалла во внешнем электрическом поле. Однако для того, чтобы кристалл с нанесенными на него электродами представлял собой электрооптический дефлектор, отклоняющий световой пучок без искажений, необходимо, чтобы потенциал электрического поля, удовлетворяющий (2), в объеме кристалла квадратично зависел от координат  $[2,3]$ , что возможно только при  $\alpha = \varepsilon$ .

Довольно часто практическая реализация устройств сопровождается какими-то отклонениями параметров реального устройства от рассчитанного. В ряде случаев сознательно заменяются гиперболические направляющие электродных поверхностей на окружности или даже прямые линии для того, чтобы максимально упростить конструкцию устройств. Иногда приходится сталкиваться с несовпадением известных по справочной литературе данных об анизотропии диэлектрических свойств кристалла с реальными значениями, что практически всегда наблюдается для кристаллов DKDP и ниобата лития. В этом случае возникает несоответствие между анизотропией, заложенной при расчете в форму электродов, и реальной анизотропией кристалла. Вопрос о несоответствии возникает и в том случае  $[4]$ , когда устройство на неоднородном поле, изготовленное только с учетом диэлектрических свойств слабопроводящих кристаллов, например группы KDP, управляется постоянным электрическим полем. Все эти примеры показывают, что необходимо ответить на вопрос, с какой точностью нужно знать  $\varepsilon$  и соответственно задать  $\alpha$  для получения достаточно равномерного отклонения луча во всех точках апертуры устройства.

Для оценки искажений светового пучка, пропорциональных неравномерности градиента показателя преломления по площади поперечного сечения дефлектора в представленных случаях, когда свойства кристалла не связаны жестко с формой электродов, необходимо построить решение уравнения (2) при заданных потенциалах на границах области (1) для  $\alpha \neq \varepsilon$ . Некоторые оценки этого случая были даны в  $[5,6]$ . Поскольку точное аналитическое решение уравнения (2) в этом случае построить не удается, то в данной работе предлагается метод приближенного решения, даны оценки ошибок и проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Приближенное решение строится в виде степенного ряда, причем каждый член этого ряда является решением уравнения (2), а коэффициенты перед членами ряда используются для наилучшего приближения к граничным условиям. Вначале с помощью масштабных преобразований область (1) приводится к виду, более удобному для дальнейших вычислений путем введения новых безразмерных переменных  $x$  и  $y$ ,

$$x' = x \frac{kR}{\sqrt{1+\alpha}}, \quad z = y \frac{kR\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}, \quad (3)$$

где  $R = \sqrt{R_z^2 + R_{x'}^2}$ , после чего (1) принимает вид

$$y^2 - x^2 = \begin{cases} r_1^2 \\ -r_2^2 \end{cases}, \quad r_1 = \frac{R_z\sqrt{1+\alpha}}{kR\sqrt{\alpha}}, \quad r_2 = \frac{R_x\sqrt{1+\alpha}}{kR}. \quad (4)$$

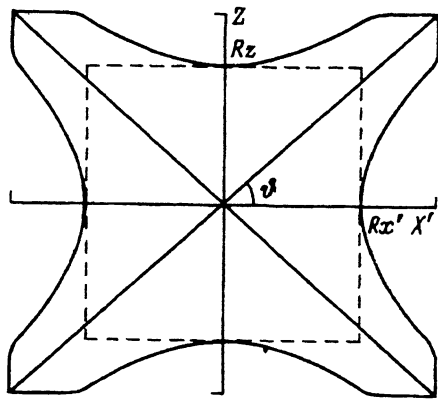


Рис. 1. Поперечное сечение градиентного электрооптического дефлектора.

Множитель  $k$  введен для того: чтобы координатам  $x$  и  $y$ , которые лежат внутри областей  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , ставить в соответствие электроды такой протяженности, при которой уже не возникают заметные искажения поля внутри центральной части, заключенной между вершинами электродов (отмечена пунктиром на рис. 1), рассматриваемой области.

Подобно тому, как решением уравнения Лапласа является действительная (и мнимая) часть любой аналитической функции, в частности, решением является и действительная часть степенной функции комплексной переменной  $Z^k$ , решение уравнения (2) можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{Re}(\sqrt{\varepsilon}x + iy)^{2k}. \quad (5)$$

В силу симметрии граничных условий решение задачи может содержать только четные степени ряда  $x^{2k}$  и  $y^{2k}$ . Каждое из слагаемых (5) является решением уравнения (2). Выбором  $A_k$  удовлетворяются граничные условия, которые для (5) имеют вид ( $\varphi_0$  — амплитуда напряжения, поданного на электроды дефлектора)

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\varphi_0}{2} & \text{при } y^2 = r_1^2 + x^2, \\ -\frac{\varphi_0}{2} & \text{при } x^2 = r_2^2 + y^2. \end{cases} \quad (6)$$

После подстановки (6) в (5) получим значения потенциала на границах. Ограничимся конечным числом слагаемых  $N$  в (5) и полученные в результате подстановки (6) два полинома ( $P_1(x^2)$  и  $P_2(y^2)$ ) перегруппируем по полиномам Чебышева  $T_k$ . Выразим степени  $x^k$  и  $y^k$  через полиномы  $T_k(x)$  и  $T_k(y)$  (см., например, [7]). Последние преобразования делаются по двум причинам. Во-первых, желательно обеспечить равномерное на всем промежутке  $[-1, 1]$  стремление каждого члена ряда (5) к нулю и избежать тем самым ситуации, которая может возникнуть, если за критерий точности приближения принять, например, интеграл по промежутку от квадрата ошибки, при котором не исключена возможность получить значительное отличие приближенной функции от

истинной в отдельных, пусть и малых, областях. Во-вторых, как правило, ряд по полиномам Чебышева сходится быстрее степенного ряда и можно ограничиться меньшим числом членов для получения нужной точности. Взяв разность между истинными и полученными после подстановки полиномов Чебышева приближенными значениями потенциалов на границах, получим ошибку приближения

$$I: \frac{\varphi_0}{2} - \sum_{k=0}^{N-1} b_k T_{2k}(x) = \delta_1(x),$$

$$II: -\frac{\varphi_0}{2} - \sum_{k=0}^{N-1} b_k T_{2k}(y) = \delta_2(y), \quad (7)$$

где  $b_k, b'_k$  являются полиномами от всех входящих в задачу параметров, в частности линейными функциями  $A_k$  (5).

Чтобы минимизировать  $\delta_1(x)$  и  $\delta_2(y)$ , возьмем, поскольку в нашем распоряжении всего  $N$  коэффициентов  $A_k$ , по  $N/2$ , считая  $N$  четным,  $b_k, b'_k$  из (7), приравняем их нулю и, разрешив полученную систему уравнений относительно  $A_k$ , подставим найденные значения в (5). Таким образом, мы построили приближенные решения поставленной задачи.

Подставив найденные значения  $A_k$  в (7), получим значения ошибки на границах области. Поскольку все слагаемые в левых частях равенств (7) являются решениями потенциальной задачи, то и  $\delta_1(x)$  и  $\delta_2(y)$  также являются таковыми, а значит, достигают максимумов на границе области, т.е. внутри области ошибки будут меньше.

Предложенный метод получения приближенного решения задачи вначале был воплощен до выражения (7) с помощью аналитической программы Reduce. В дальнейшем был разработан пакет программ для ПЭВМ, обеспечивающих полное решение задачи и ориентированных на максимально возможное моделирование экспериментальных условий: построение интерферограмм, соответствующих как скрещенным, так и параллельно ориентированным поляризатором экспериментальной установки, изменение ширины темных линий интерферограмм и их смещения относительно горизонтальной оси, изменение ограничения электродов и т.д. На основе приближенной формулы для потенциала в электрооптическом дефлекторе можно вычислить в каждой точке апертуры экспериментально наблюдаемые величины: составляющую  $E_z = \partial\varphi/\partial z$  электрического поля, пропорциональную изменению коэффициента преломления электрооптического кристалла, распределение которого регистрируется на интерферограмме в ходе эксперимента [7], и распределение градиента показателя преломления, который пропорционален величине  $\partial^2\varphi/\partial z^2$ , т.е. углу отклонения светового пучка в заданной точке апертуры.

Поскольку наиболее информативным можно считать интерференционный метод исследования распределения поля в электрооптических устройствах, то результаты вычислений удобно представить в виде теоретически рассчитанных интерферограмм. На рис. 2 приведено сравнение экспериментальных и теоретических интерферограмм для электрооптического дефлектора, выполненного из кристалла KDP с

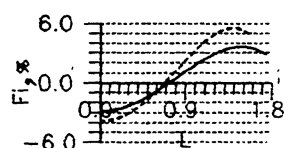
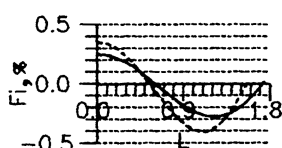
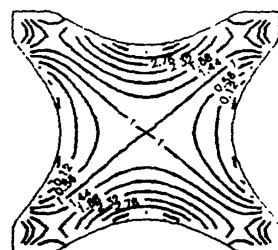
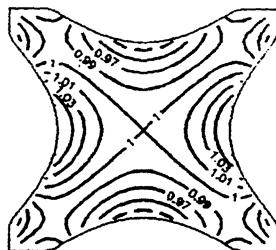
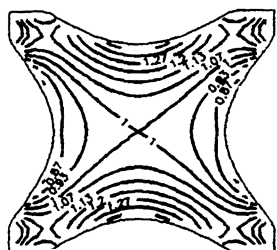
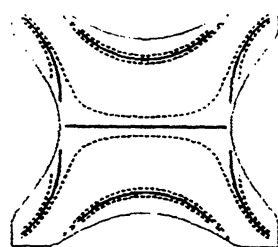
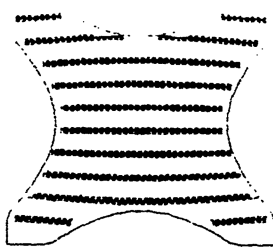
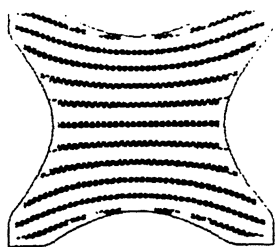
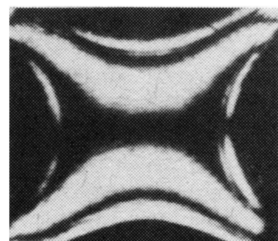
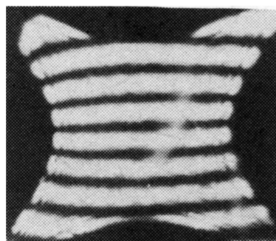
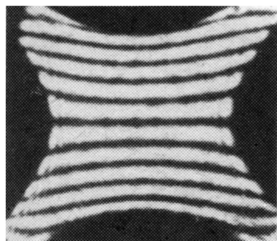
*б**в*

Рис. 2. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. *а* — переменное напряжение 50 Гц ( $\epsilon = 0.5$ ), *б* — постоянное напряжение ( $\epsilon = 0.86$ ), *в* — поле заряда. Верхний ряд — экспериментальные интерферограммы, второй — теоретические, третий — уровни градиента показателя преломления, нижний ряд — ошибки приближения.

$\alpha = 0.79$ ,  $R_z = R_x = 1.75$  мм. Рис. 2, *а* соответствует работе дефлектора на переменном (частота 50 Гц) электрическом поле (управляющее напряжение 2000 В). При этом поле в области описывается (2) с  $\epsilon = \epsilon_z/\epsilon_x = 0.5$ . Рис. 2, *б* соответствует работе того же дефлектора на постоянном напряжении (2000 В), когда поле описывается (2) с  $\epsilon = \sigma_z/\sigma_x = 0.86$ . Рис. 2, *в* соответствует условиям регистрации объемного электрического заряда [8], впервые рассмотренного в [9], с равным нулю суммарным напряжением на электродах.

В верхнем ряду расположены интерферограммы, полученные экспериментально, во втором ряду — интерферограммы, построенные в результате расчетов. Сплошные линии соответствуют интерференционным минимумам, пунктир —  $\pm 10\%$  уровню. В третьем ряду приведены рассчитанные уровни градиента показателя преломления, нормированные к значению градиента в центре дефлектора. Нижние графики — ошибки приближения (7) на границе области — на двух парах сопряженных гипербол в процентах к истинному значению потенциала  $\pm \varphi_0/2$ , где сплошная линия соответствует электродам, пересекающим ось  $z$ , а пунктир — пересекающим ось  $x'$  (рис. 1).

Сопоставление двух верхних рядов показывает, что результаты вычислений удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными: количество и форма полос интерферограмм соответствуют количеству и форме полос графика. Таким образом, ошибки (7) потенциала на границах области существенно не влияют на распределение потенциала внутри области.

Одним из важнейших параметров, характеризующих качество работы дефлектора, является постоянство градиента показателя преломления в пределах апертуры устройства, которое возможно только у идеального дефлектора, когда  $\alpha = \varepsilon$ . На рис. 2 (третий ряд) видно, что при значительном различии между анизотропией  $\alpha$ , заложенной в конструкцию устройства, и истинной анизотропией кристалла  $\varepsilon$  ( $\alpha = 0.79$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ) максимальное отклонение градиента показателя преломления в пределах апертуры от его значения в центре дефлектора составляет примерно 40%, в то время как при меньшей разнице ( $\alpha = 0.79$ ,  $\varepsilon = 0.86$ ) эта величина не превышает  $\pm 7\%$ .

Таким образом, с помощью предлагаемого приближенного метода можно ответить на вопрос, возникающий при создании дефлектора: с какой точностью нужно знать параметры кристалла ( $\varepsilon$ ) или выполнить конструкцию ( $\alpha$ ), чтобы получить заданную погрешность угла отклонения луча в пределах апертуры устройства.

Следует отметить, что предлагаемый метод позволяет построить приближенное решение и для комплексного  $\varepsilon$ , т.е. исследовать поведение дефлектора на таких частотах, на которых как диэлектрическая проницаемость, так и проводимость кристалла существенно влияют на распределение электрического поля.

Исследования профинансированы Фондом фундаментальных исследований Беларуси.

#### Список литературы

- [1] Fowler U.S., Buhner C.F., Bloom L.B. // Proc. IEEE. 1964. Т. 52. С. 193-197.
- [2] Гусак Н.А., Лепарский В.Е. // ЖПС. 1974. Т. 21. № 4. С. 627-630.
- [3] Гусак Н.А., Лепарский В.Е. // ЖПС. 1975. Т. 23. № 1. С. 137-142.
- [4] Бондарев И.Ф., Гриб А.Ф., Гусак Н.А., Сотский В.А. // ЖПС. 1982. Т. 36. № 6. С. 999-1002.
- [5] Северук Б.Б., Гусак Н.А. // Опт. и спектр. 1978. Т. 45. Вып. 6. С. 1168-1172.
- [6] Гусак Н.А., Гриб А.Ф. // РиЭ. 1982. Т. 27. № 9. С. 1825-1829.
- [7] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 600 с.
- [8] Лепарский В.Е. // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. Минск, 1986. С. 96-100.
- [9] Крылов Б.В. // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 6. С. 61-65.