

01

©1994 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРИТИЧЕСКОГО ЗАРОДЫША В АКТИВНОЙ БИСТАБИЛЬНОЙ СРЕДЕ

С.В.Петровский

Институт океанологии им. П.П. Ширшова,
117851, Москва
(Поступило в Редакцию 3 августа 1993 г.)

1. Пространственно-временная динамика многих активных сред описывается нелинейными уравнениями типа реакция-диффузия. Впервые динамика таких сред рассматривалась в работах [1-3]. В [1,2] для однокомпонентной среды было показано, что, если начальное условие имеет вид "ступеньки", в среде асимптотически формируется бегущая волна — волна переключения, переводящая динамическую систему из начального метастабильного состояния в стабильное.

Иная ситуация может возникнуть, если начальное условие имеет вид локального возмущения (или "импакта"), т.е. является финитной функцией. Постановка этой проблемы принадлежит А.Н. Колмогорову [4]. Оказывается, что для определенного класса диффузионно-реакционных систем в зависимости от масштаба возмущения (т.е. при известной форме от размеров и амплитуды) возможны два качественно различных режима эволюции системы. Если масштаб импакта меньше критического, то возмущение заметно отлично от нуля только в ограниченной области и затухает со временем ("диффузионный режим"). Если масштаб превышает критический, то возмущение распространяется, причем это распространение имеет характер волны переключения ("волновой режим").

В описанной ситуации главной задачей становится развитие способа оценки критического масштаба импакта. В различных физических приложениях это называют также проблемой "игнишн" (ignition) [5] или критического зародыша [6]. Общее решение проблемы (т.е. для локализованного начального возмущения произвольной формы) даже для однокомпонентных динамических систем до сих пор отсутствует. Исследование этого вопроса для импакта прямоугольной (П-образной) формы проведено в [7-9]. В данной работе рассмотрена динамика однокомпонентной бистабильной среды в случае, когда начальный профиль

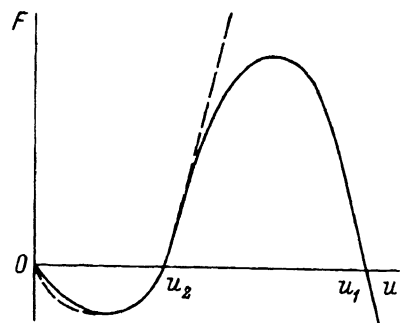


Рис. 1. Характер зависимости $F(u)$ для бистабильной среды (сплошная линия). Штриховая кривая — поведение модельного источника (3).

описывается функцией Гаусса. Получены аналитические соотношения между амплитудой и шириной, позволяющие однозначно предсказать режим эволюции импакта. Заметим, что такое начальное условие, не будучи финитным, является хорошей аппроксимацией локализованного возмущения: более 99 % полного интеграла нормального распределения находится внутри промежутка $(-2\sigma, 2\sigma)$, где σ — полуширина распределения.

2. Рассмотрим некоторую активную среду, описываемую нелинейным диффузионно-реакционным уравнением

$$\partial_t u = D \partial_{xx}^2 u + (1/\tau) F(u), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — функция, описывающая состояние среды; D — коэффициент диффузии; τ — параметр размерности времени; $F(u)$ — нелинейный источник, описывающий кинетику системы.

Типичный вид зависимости $F(u)$ для бистабильной среды показан на рис. 1 (сплошная кривая). Характерным здесь является наличие у функции $F(u)$ трех нулей, соответствующих возможным стационарным пространственно-однородным состоянием системы, из которых два (в данном случае $u \equiv 0$ и $u \equiv u_1$) являются устойчивыми и одно ($u \equiv u_2$) неустойчивым. Заметим, кроме того, что если величина $M = \int_0^{u_1} F(u) du < 0$, то начальное возмущение затухает независимо от его размеров, поэтому достаточно ограничиться рассмотрением систем, для которых $M > 0$.

Пусть начальное условие имеет вид

$$u(x, t = 0) = g_0 \exp(-x^2/\sigma^2). \quad (2)$$

В пользу такого начального профиля можно привести следующие соображения. Во-первых, имея в виду возможные физические причины формирования начального возмущения, следует отметить, что многие случайные процессы подчиняются нормальному распределению. Во-вторых, результаты компьютерного моделирования показывают, что для широкого класса начальных условий (например, для П-импакта [7-9]) на ранних стадиях процесса характерно преобладание диффузии, поэтому в некоторый момент времени Δt форма возмущения становится близкой к функции Гаусса. Переобозначая начало отсчета времени, вновь приходим к (2).

Для начального условия типа (2) различным режимам эволюции отвечает различный вид зависимости от времени амплитуды возмущения $g(t) \equiv \max_x u(x, t) = u(0, t)$. Основываясь на результатах компьютерных экспериментов, можно утверждать, что для волнового режима функция $g(t)$, убывающая в начале процесса вследствие преобладания диффузии, достигает в некоторый момент времени t_1 своего минимума (причем $g(t_1) > u_2$) и далее начинает возрастать, так что $g(t) \rightarrow u_1$ при $t \rightarrow \infty$. Напротив, для диффузионного режима в некоторый момент времени t_2 оказывается $g(t_2) < u_2$, что с неизбежностью приводит к затуханию возмущения ($g(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Таким образом, для целей данной работы наибольший интерес представляет поведение функции $F(u)$ в области $u \sim u_2$. В соответствии с этим рассмотрим источник следующего вида:

$$F(u) = -\alpha u^{1-\gamma} + \beta u, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (3)$$

Очевидно, такая функция годится для качественного описания кинетики бистабильных сред при $u \lesssim u_2 = (\alpha/\beta)^{1/\gamma}$ (рис. 1, штриховая кривая). Заметим, что наличие трех свободных параметров α , β , γ в данном случае не является недостатком модели, так как дает возможность достаточно точно аппроксимировать реальный источник.

В безразмерных переменных $t' = t/\tau$, $x' = x/(D\tau)^{1/2}$ из уравнения (1) с учетом (3) получаем (штрихи опущены)

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u - \alpha u^{1-\gamma} + \beta u. \quad (4)$$

Будем искать решение в автомодельном виде $u(x, t) = g(t)f(\xi)$, где $\xi = x/\varphi(t)$, $g(0) = g_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$. Введенные таким образом функции g и φ имеют смысл соответственно амплитуды и полуширины решения.

В автомодельных переменных уравнение (4) принимает вид

$$(g/\varphi^2)f'' + g(\varphi'/\varphi)\xi f' - g'f + \beta g f - \alpha g^{1-\gamma} f^{1-\gamma} = 0. \quad (5)$$

Исходя из вида начального условия, рассмотрим $f(\xi) = \exp(-\xi^2/\gamma)$; автомодельное решение $u(x, t) = g(t)f(\xi)$ удовлетворяет условию (2) при $\sigma^2 = \gamma\varphi_0^2$. Подставляя в (5), получим

$$(g/\varphi^2)((4/\gamma^2)\xi^2 - (2/\gamma)) - (2/\gamma)g(\varphi'/\varphi)\xi^2 - g' + \beta g - \alpha g^{1-\gamma} \exp(\xi^2) = 0. \quad (6)$$

Ограничиваясь рассмотрением поведения решения вблизи максимума, полагаем $\exp(\xi^2) \approx 1 + \xi^2$. Подставляя в (6) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ξ , приходим к следующей системе уравнений:

$$(4/\gamma^2)(g/\varphi^2) - (2/\gamma)g(\varphi'/\varphi) - \alpha g^{1-\gamma} = 0, \quad (7)$$

$$-(2/\gamma)(g/\varphi^2) - g' + \beta g - \alpha g^{1-\gamma} = 0. \quad (8)$$

3. Для решения системы (7), (8) введем новые неизвестные функции $y = g^\gamma$, $z = \varphi^2$. После несложных преобразований получаем

$$z' = (4/\gamma) - (\alpha\gamma)z/y, \quad (9)$$

$$y' = -\alpha\gamma + (\beta\gamma)y - 2y/z. \quad (10)$$

Из системы (9), (10) можно получить уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию z . Действительно, дифференцируя (9) и выражая $(1/y)$ из (9), а $(z'y - y'z)$ из линейной комбинации (9) и (10), имеем

$$zz'' + (az - b)z' - cz + d = 0, \quad (11)$$

где введены обозначения $a = \beta\gamma$, $b = (2 + 4/\gamma)$, $c = 4\beta$, $d = (4/\gamma)(2 + 4/\gamma)$.

Полагая $z' = v(z)$, понижаем порядок уравнения (11)

$$zvv'(z) + (az - b)v - (cz - d) = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что $ad/c = b$, из (12) получаем уравнение в разделяющихся переменных

$$dv/dz = -[1 - (c/a)/v][(az - b)/z], \quad (13)$$

которое легко интегрируется

$$v + (c/a) \ln |v - (c/a)| = -az + b \ln(z) + K. \quad (14)$$

Здесь K — константа интегрирования, выражающаяся через начальные условия

$$K = (v_0 + az_0) + (c/a) \ln |v_0 - (c/a)| - b \ln(z_0). \quad (15)$$

Учитывая, что

$$v_0 = (4/\gamma) - (\alpha\gamma)z_0/y_0, \quad (16)$$

получаем

$$K = [(4/\gamma) - (\alpha\gamma)(z_0/y_0) + (\beta\gamma)z_0] + (4/\gamma) \ln |\alpha\gamma(z_0/y_0)| - ((4/\gamma) + 2) \ln(z_0), \quad (17)$$

где $y_0 = g_0^\gamma$, $z_0 = \varphi_0^2$.

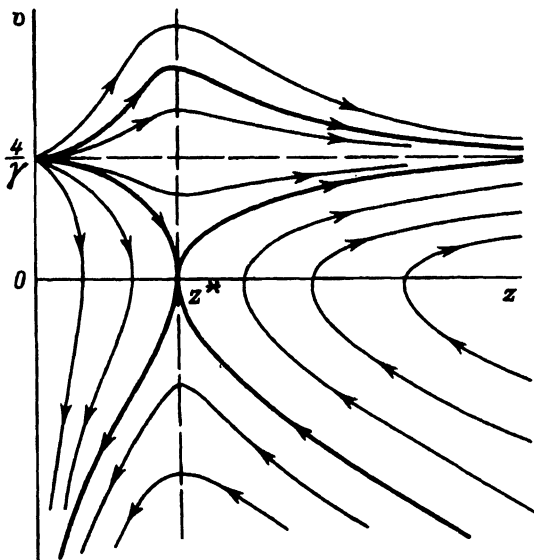


Рис. 2. Структура поля интегральных кривых для уравнения (13).

Легко видеть, однако, что поведение интегральных кривых зависит не от величины K , а от разности $\Psi = K - K^*$, где $K^* = b(1 - \ln(b/a)) + (c/a)\ln(c/a)$. Выражение для Ψ имеет вид

$$\Psi = \gamma z_0 [\beta - (\alpha/y_0)] - \ln \left[(y_0/y^*)^{4/\gamma} (ez_0/z^*)^2 \right], \quad (18)$$

где $y^* = (\alpha\gamma/4\beta)(2 + 4/\gamma)$, $z^* = (1/\beta\gamma)(2 + 4/\gamma)$.

Структура поля интегральных кривых, определяемых выражением (14), представлена на рис. 2. Жирной линией показаны кривые, отвечающие случаю $\Psi = 0$. Область фазовой плоскости выше прямой $v = 4/\gamma$ нефизическая, так как в силу уравнения (9) $v < 4/\gamma$ для любых y и z . Стрелками указано направление движения вдоль интегральных кривых, соответствующее возрастанию времени. Все точки полуоси $z > 0$ отвечают неустойчивым стационарным состояниям динамической системы.

Для того чтобы получить выражение для второй неизвестной функции $y(t)$, рассмотрим подстановку $y(t) = w(t) \exp(\beta\gamma t)$. Подставляя в (9), (10), имеем

$$z' = (4/\gamma) - \alpha\gamma \exp(-\beta\gamma t)(z/w), \quad (19)$$

$$w' = -\alpha\gamma \exp(-\beta\gamma t) - 2(w/z). \quad (20)$$

Отсюда

$$z'w - zw' = bw \quad (21)$$

и

$$(z/w)' = (b/z)(z/w). \quad (22)$$

Обозначая $(z/w) \equiv v(t)$ и считая $z(t)$ известной функцией, из (22) получаем

$$v(t)/v_0 = \exp \left(b \int_0^t d\tau / z(\tau) \right) \quad (23)$$

и окончательно

$$y(t) = (y_0/z_0)z(t) \exp \left(\beta\gamma t - b \int_0^t d\tau / z(\tau) \right). \quad (24)$$

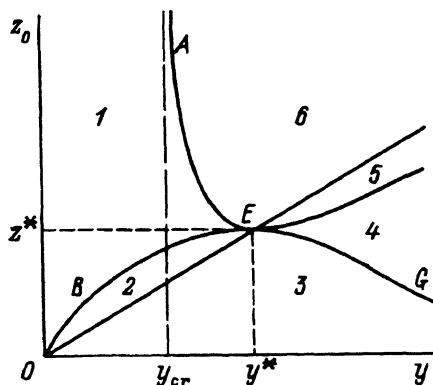


Рис. 3. Карта плоскости параметров (y_0, z_0) .

Используя (24), несложно показать, что функция $y(t)$ обладает следующими асимптотическими свойствами: $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $z \rightarrow 0$ (области 1 и 2 на рис. 3) или $z \rightarrow z_{st} < z^*$ (область 3), и $y \rightarrow \infty$, если $z \rightarrow \infty$ (области 4 и 5) или $z \rightarrow z_{st} > z^*$ (область 6). Отметим, что неограниченный рост $y(t)$ для источника вида (3) является артефактом рассматриваемой модели, в действительности для бистабильной среды $y(t) \rightarrow y_1 \sim u_1^{\gamma}$.

4. Таким образом, анализ выражений (14), (24) позволяет ответить на главный вопрос: при каких соотношениях между амплитудой и шириной начальное возмущение затухает, а при каких образуется волна переключения, переводящая систему в другое состояние. На рис. 3 показана плоскость параметров (y_0, z_0) . Кривые $\Psi(y_0, z_0) = 0$ (ветви AEG и BEG) и $v_0(y_0, z_0) = 0$ (прямая линия) разбивают ее на несколько областей, каждой из которых соответствует свой режим эволюции импакта. Областям 1–3 отвечает режим диффузионного затухания импакта, так как здесь амплитуда $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, в то время как ширина возмущения стремится либо к нулю, либо к некоторому конечному значению. Областям 4 и 5 соответствует неограниченное возрастание ширины импакта при одновременном возрастании амплитуды, что означает образование волны. В области 6 ширина с течением времени стремится к некоторому стационарному значению. Соответствующий режим, однако, является неустойчивым. При наличии малых возмущений, которые не учитываются в данной модели, но всегда присутствуют в реальной физической системе, ширина возмущения также начинает возрастать неограниченно (область 5).

Заметим в заключение, что вид кривой AEG (определяемой формулой (18)), отделяющей на плоскости параметров (y_0, z_0) область диффузионного затухания начального возмущения от области волнового режима распространения, согласуется с видом аналогичной кривой, полученной в [8] для П-импакта из компьютерных экспериментов.

Автор выражает благодарность В.М. Простокишину за полезные замечания, высказанные в процессе подготовки текста работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, код проекта 95-03-14113.

Список литературы.

- [1] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. Вып. 6. С. 1–26.
- [2] Fischer R. // Ann. of Eugenics. 1937. Vol. 7. P. 355–369.
- [3] Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. // Журнал физ. хим. 1938. Т. 12. № 1. С. 100–105.
- [4] Колмогоров А.Н. Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1985. 416 с.
- [5] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махэиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука. 1980. 478 с.
- [6] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [7] Виноградов М.Е., Баренблатт Г.И., Горбунов А.Е., Петровский С.В. // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 4. С. 509–512.
- [8] Баренблатт Г.И., Виноградов М.Е., Горбунов А.Е., Петровский С.В. // Океанология. 1993. Т. 33. № 1. С. 5–12.
- [9] Петровский С.В. // ИФЖ. 1993. Т. 65. № 4.