01 Журнал технической физики, т. 64, в. 7, 1994

ТЕОРЕМЫ О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ ПРИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ

М.А.Шакиров

Санкт-Петербургский государственный технический университет, 195251
(Поступило в Редакцию 28 сентября 1993 г.)

Целью настоящей работы является вывод формул для определения пондеромоторных (механических) сил, действующих на линейные заряды и линейные токи соответственно в электростатическом и магнитном полях, ограниченных идеальными экранами.

Теорема 1. Пусть в многосвязной однородной с проводящими границами области D_z возбуждено электростатическое поле, причем одним из источников является заряженная с плотностью заряда τ_0 нить, проходящая через точку z_0. Пусть $\omega(z)$ — аналитическая функция, отображающая область D_z на область D_ω, в которой заряд τ_0 проходит через точку $\omega_0 = \omega(z_0)$. Механическая сила, действующая на единицу длины нити с зарядом τ_0, равна

$$f_{z_0} = f_{x_0} + j f_{y_0} = f_{\omega_0} \overset{*}{\omega}{}_0' + f_{z\omega}, \tag{1}$$

где

$$f_{z\omega} = \frac{\tau_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\omega_0''}{\omega_0'} \right)^* \tag{2а}$$

или

$$f_{z\omega} = \frac{\tau_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{z_0''}{z_0'^2} \right)^*, \tag{2б}$$

где ω_0' и ω_0'' — значения первой и второй производных функции $\omega(z)$ в точке z_0; f_{ω_0} — механическая сила, действующая на нить с зарядом τ_0 в области D_ω.

Выражения (2а) и (2б) равносильны. Первое удобно для применения, если отображение задается функцией $\omega(z)$, а второе при использовании функции $z(\omega)$.

Доказательство. Напряженность поля в окрестности точки ω_0 в D_ω-области можно разложить на собственную и внешнюю составляющие

$$E_\omega = E_\xi + j E_\eta = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon_0 (\omega - \omega_0)^*} + E_{\omega_0}^e.$$

При этом очевидно, что механическая сила $f_{\omega_0} = \tau_0 E_{\omega_0}^e$. Для напряженности поля в окрестности точки z_0 в D_z-области имеем

$$E_z = E_x + j E_y = E_\omega \overset{*}{\omega}{}_0' = E_{\omega_0}^e \overset{*}{\omega}{}_0' + \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\overset{*}{\omega}{}_0'}{(\omega - \omega_0)^*},$$

где $*$ — знак сопряженной величины.

Если к правой части этого выражения прибавить и отнять $\tau_0/2\pi\varepsilon_0(z-z_0)^*$, то его можно переписать в виде разложения

$$E_z = \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon(z-z_0)^*} + E^e_{z_0},$$

$$E^e_{z_0} = E^e_{\omega_0}\overset{*}{\omega}{}'_0 + \frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{z-z_0} + \frac{\omega'_0}{\omega-\omega_0}\right]^*_{z\to z_0},$$

где $E^e_{z_0}$ — очевидно, внешняя составляющая напряженности, определяющая искомую силу $f_{z_0} = \tau_0 E^e_{z_0}$.

Выражение в квадратных скобках содержит неопределенность типа $[\infty-\infty]$. Решая ее, получим следующее выражение для внешней составляющей поля в точке:

$$E^e_{z_0} = E^e_{\omega_0}\overset{*}{\omega}{}'_0 + \frac{\tau_0^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\omega''_0}{2\omega'_0}\right]^*.$$

После умножения на τ_0 с учетом принятых обозначений для сил приходим к выражению (1). Теорема доказана.

Теорема 2. Механическая сила, действующая на линейный ток i_0, равна

$$f_{z_0} = f_{\omega_0}\overset{*}{\omega}{}'_0 - f_{z\omega}, \tag{5}$$

$$f_{z\omega} = \frac{\mu_0 i_0^2}{4\pi}\left(\frac{\omega''_0}{\omega'_0}\right)^* = \frac{\mu_0 i_0^2}{4\pi}\left(-\frac{z''_0}{z'^2_0}\right)^*, \tag{6}$$

где f_{ω_0} — сила, действующая на ток i_0 в области D_ω.

Заметим, что в отличие от (1) в формуле (5) перед слагаемым $f_{z\omega}$ стоит знак минус. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей.

В заключение полезно отметить следующее.

1. Формулы преобразования для сил конформно связанных областей отличаются от преобразований напряженностей полей, но сводятся к ним при устремлении заряда нити τ_0 или линейного тока i_0 к нулю (так как при этом, как следует из формул (2) и (6), величина $f_{z\omega} \to 0$).

2. Предложенные формулы могут быть использованы для анализа чувствительности механических сил при изменении параметров экранов или местоположения зарядов и токов.

3. Из теорем следует, что формулы преобразования (1) и (2) применимы в общем случае, когда источники полей (за исключением заряда τ_0 и тока i_0) в D_z-области заданы с некоторой плотностью распределения. В этих случаях могут потребоваться численно-аналитические методы для вычисления силы f_{ω_0} в D_z-области.

4. При гармонических источниках полей в формулах преобразований (1) и (2) следует использовать понятия о средних за период значениях сил, при этом токи заменяются их действующими значениями.

5. В целом предложенные формулы связи для сил весьма удобны для применения, что, по-видимому, с учетом доступности их доказательств является достаточным основанием для их включения в соответствующие разделы теории плоскопараллельных полей.