1994 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 64, в. 6
1994 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 64, N 6

01;10

О ВОЗМОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ РЕЖИМОМ АВТОРЕЗОНАНСА С ПОМОЩЬЮ СИЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В.П.Милантьев

Показано, что при наличии постоянного электрического поля, перпендикулярного магнитному полю, вдоль которого распространяется замедленная поперечная волна, возможен режим авторезонанса в системе отсчета, движущейся со скоростью электрического дрейфа.

1. В работах [1,2] было обнаружено, что при движении релятивистской заряженной частицы в поперечной электромагнитной волне, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля, возможен режим авторезонанса. В этом случае синхронизм между циклотронным вращением частицы и волной поддерживается автоматически, несмотря на релятивистское изменение массы частицы. При авторезонансном движении энергия частицы непрерывно возрастает (или убывает), что представляет интерес для задач ускорения частиц, нагрева плазмы, индуцированного тормозного излучения и др. [3–7]. Рост энергии частицы ограничивается радиационными эффектами [3], кулоновскими столкновениями [8] и пр.

Однако режим авторезонанса существует лишь постольку, поскольку условие резонанса частоты циклотронного вращения частицы и скорости изменения фазы волны вдоль ее траектории

$$\Omega/\omega = \gamma(1 - v_{\parallel}/v_{\Phi}) \tag{1}$$

является интегралом движения. Здесь $\Omega = eB_0/mc$ — классическая циклотронная частота вращения частицы с массой покоя m во внешнем магнитном поле B_0, ω — частота волны, $v_{\Phi} = \frac{\omega}{k}$ — ее фазовая скорость, k — волновое число, e — заряд частицы, $v_{\parallel}$ — продольная составляющая ее скорости на направление магнитного поля, γ — релятивистский фактор, c — скорость света.

Оказалось, что условие резонанса (1) является интегралом движения лишь в случае плоской вакуумной волны, когда ее фазовая скорость равна скорости света , т.е. когда показатель преломления $N \equiv kc/\omega = c/v_{\Phi} = 1$.

Вместе с тем существуют такие структуры, как например коаксиальный волновод, в которых имеются неоднородные поперечные волны, распространяющиеся вдоль постоянного магнитного поля со скоростью света. В этих условиях также возможен точный авторезонанс [9].

В случае же замедленной ($N > 1$) или ускоренной волны ($N < 1$) происходит расстройка фазового синхронизма захваченных частиц с волной и вместо монотонного изменения энергии наблюдаются ее осцилляции [10].

В ряде работ исследовалась возможность поддержания условия резонанса (1) во все время движения частицы с помощью изменяющейся фазовой скорости волны [11–13] или изменяющегося внешнего магнитного поля (циклотронной частоты) [14–16]. Обсуждалось также влияние на резонанс внешнего электростатического поля, направленного вдоль магнитного поля [17–19]. Однако возможность поддержания резонанса с помощью поперечного электрического поля, вызывающего электрический дрейф частицы, в литературе не рассматривалась. Между тем в работах [20,21] было показано, что поперечное электростатическое поле может существенно изменить характер резонансного взаимодействия волна–частица.

Настоящая работа посвящена исследованию возможности управления режимом авторезонанса в замедленной или ускоренной поперечной волне с помощью сильного поперечного электростатического поля, в котором скорость электрического дрейфа достигает релятивистских значений. Найдены необходимые условия для поддержания фазового синхронизма во все время движения частицы. Эти условия накладывают довольно жесткие связи скорости электрического дрейфа с фазовой скоростью волны и ее поляризацией.

2. Будем исходить из уравнений движения заряженной частицы в ковариантной форме [22], пренебрегая силами торможения излучением,

$$mc\frac{du^i}{ds_1} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k, \tag{2}$$

где $u^i = (u^0, \mathbf{u})$ — 4-вектор скорости, причем $u^0 \equiv \gamma$, $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{v}/c$; F^{ik} — тензор электромагнитного поля; $ds_1 = c\,dt/\gamma$ — интервал.

Зададим электромагнитное поле в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_\sim, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\sim \tag{3}$$

где $\mathbf{E}_0 = (0, E_0, 0)$, $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ — постоянные поля; $\mathbf{E}_\sim$, $\mathbf{B}_\sim$ — поля электромагнитной волны с произвольной эллиптической поляризацией и бегущей вдоль постоянного магнитного поля

$$\mathbf{E}_\sim = (E_1\cos\theta, E_2\sin\theta, 0),$$

$$\mathbf{B}_\sim = (-NE_2\sin\theta, NE_1\cos\theta, 0), \quad N = kc/\omega. \tag{3a}$$

Фаза волны θ, являющаяся скаляром, описывается уравнением

$$\frac{d\theta}{ds_1} = -k^i u_i, \tag{4}$$

где $k^i = (\omega/c, \mathbf{k})$ — четырехволновый вектор.

В рассматриваемой задаче волновой вектор $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, так что уравнение (4) имеет вид

$$\frac{d\theta}{ds_1} = -\frac{\omega}{c}(\gamma - Nu_z). \tag{4a}$$

Для дальнейшего удобно ввести безразмерный интервал $ds = ds_1/l$, где $l = c/\Omega$. Тогда в электромагнитном поле (3) уравнения движения (2) записываются в безразмерной форме

$$\frac{du^0}{ds} = u^1\varepsilon\cos\theta + (V + \varepsilon_2\sin\theta)u^2,$$

$$\frac{du^1}{ds} = u^0\varepsilon_1\cos\theta + u^2 - N\varepsilon_1 u^3\cos\theta,$$

$$\frac{du^2}{ds} = u^0(V + \varepsilon_2\sin\theta) - u^1 - N\varepsilon_2 u^3\sin\theta,$$

$$\frac{du^3}{ds} = N(u^1\varepsilon_1\cos\theta + u^2\varepsilon_2\sin\theta). \tag{5}$$

Здесь $V = V_E/c$, $V_E = cE_0/B_0$ — скорость электрического дрейфа; $\varepsilon_1 = E_1/B_0$, $\varepsilon_2 = E_2/B_0$. Из второго и третьего уравнений системы (5) следует, что существует циклотронное вращение частицы. Чтобы его выделить явно, как и в нерелятивистском приближении, необходимо перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью электрического дрейфа [23]. В рассматриваемом случае дрейф происходит вдоль оси x. Поэтому естественно перейти в систему отсчета Σ', движущуюся с постоянной скоростью V вдоль оси x относительно лабораторной системы Σ. В системе Σ' уравнения движения частицы имеют тот же вид (2), только все величины надо заменить на штрихованные $u^i \to u^{i\prime}$, $F^{ik} \to F^{ik\prime}$. Для простоты введем для штрихованного 4-вектора скорости обозначение $u'^i \equiv w^i$. По формулам преобразования векторов электромагнитного поля [22] получаем, что в движущейся системе постоянное электрическое поле отсутствует, а магнитное поле ослабляется

$$\mathbf{E}'_0 = 0, \qquad \mathbf{B}'_0 = (0, 0, B_0/\Gamma), \tag{6}$$

где

$$\Gamma = (1 - V^2)^{-1/2}. \tag{6a}$$

Для компонент поля электромагнитной волны имеем

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \Gamma E_y, \quad E'_z = VN\Gamma E_x,$$

$$B'_x = B_x = -NE_y, \quad B'_y = \Gamma B_y = N\Gamma E_x, \quad B'_z = -V\Gamma E_y. \tag{7}$$

Фаза волны не изменяется $\theta' = \theta$, а частота и волновой вектор в системе Σ' преобразуются по формулам

$$\omega' = \Gamma\omega, \quad k'_x = -kV\Gamma/N, \quad k'_y = 0, \quad k'_z = k_z. \tag{8}$$

Таким образом, в движущейся со скоростью электрического дрейфа системе волна уже не является строго поперечной и направление ее распространения не совпадает с направлением постоянного магнитного поля.

Будем далее считать, что волна распространяется под достаточно малым углом. Это накладывает ограничения на скорость электрического дрейфа и вместе с тем обеспечивает возможность циклотронного вращения частицы в поле $\mathbf{B}_0'$. Случай $V \lesssim 1$ требует особого рассмотрения.

В системе Σ' фаза волны описывается уравнением

$$\frac{d\theta}{ds_1} = -k'^i w_i = -\frac{\omega}{c}\Gamma(w^0 + Vw^1 - \frac{N}{\Gamma}w^3). \tag{9}$$

Как и в уравнениях (5), вводя безразмерный интервал $ds = ds_1/l$, уравнения движения частицы в полях (6–8) запишем в безразмерной форме

$$\frac{dw^0}{ds} = \varepsilon_1 w^1 \cos\theta + \varepsilon_2 \Gamma w^2 \sin\theta + VN\Gamma\varepsilon_1 w^3 \cos\theta,$$

$$\frac{dw^1}{ds} = \frac{w^2}{\Gamma} + \varepsilon_1 w^0 \cos\theta - V\Gamma\varepsilon_2 w^2 \sin\theta - N\Gamma\varepsilon_1 w^3 \cos\theta,$$

$$\frac{dw^2}{ds} = -\frac{w^1}{\Gamma} + \varepsilon_2 \Gamma w^0 \sin\theta + V\Gamma\varepsilon_2 w^1 \sin\theta - N\varepsilon_2 w^3 \sin\theta,$$

$$\frac{dw^3}{ds} = VN\Gamma\varepsilon_1 w^0 \cos\theta + N\Gamma\varepsilon_1 w^1 \cos\theta + N\varepsilon_2 w^2 \sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -q\Gamma(w^0 + Vw^1 - \frac{N}{\Gamma}w^3), \tag{10}$$

где $q = \omega/\Omega$.

При не слишком больших Γ в системе (10) можно выделить циклотронное вращение частицы с помощью замены переменных

$$w^1 = w_\perp \cos\theta_0, \qquad w^2 = w_\perp \sin\theta_0, \tag{11}$$

где θ_0 — фаза циклотронного вращения.

При замене (11) в уравнениях системы (10) помимо фазы волны θ будут содержаться также фаза θ_0 и комбинации фаз $\theta \pm \theta_0$. Если параметры ε_1, ε_2 достаточно малы, то фазы θ и θ_0 являются быстро меняющимися переменными, тогда как одна из их комбинаций, соответствующая циклотронному резонансу, должна рассматриваться как медленная переменная [24].

Будем считать комбинацию фаз $\theta - \theta_0 = \theta_r$ резонансной. Тогда после сглаживания по быстрым фазам θ и θ_0 и их нерезонансной комбинации получаем упрощенную систему уравнений движения частицы в области циклотронного резонанса

$$\frac{dw^0}{ds} = \frac{w_\perp}{2}(\varepsilon_1 + \Gamma\varepsilon_2)\cos\theta_r, \tag{12}$$

$$\frac{dw_\perp}{ds} = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon_1(w^0 - N\Gamma w^3) + \varepsilon_2(\Gamma w^0 - N w^3)\Big\}\cos\theta_r, \tag{13}$$

$$\frac{dw^3}{ds} = \frac{N w_\perp}{2}(\Gamma\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\cos\theta_r, \tag{14}$$

$$\frac{d\theta_r}{ds} = \frac{1}{\Gamma}\left\{1 - q\Gamma^2\left(w^0 - \frac{N}{\Gamma}w^3\right)\right\} - \frac{\sin\theta_r}{2w_\perp}\Big\{\varepsilon_1(w^0 - N\Gamma w^3) + \varepsilon_2(\Gamma w^0 - N w^3)\Big\}. \tag{15}$$

Точный циклотронный резонанс соответствует соотношению между частотами

$$1 - q\Gamma^2\left(w^0 - \frac{N}{\Gamma}w^3\right) = 0. \tag{16}$$

Отсюда следует, что циклотронный резонанс будет сохраняться во все время движения частицы (режим авторезонанса), если величина

$$Y \equiv w^0 - \frac{N}{\Gamma}w^3 \tag{16a}$$

является интегралом движения. Рассмотрим эволюцию этой величины в соответствии с уравнениями (12)–(15)

$$\frac{dY}{ds} = \frac{w_\perp}{2}\left\{\varepsilon_1(1 - N^2) + \Gamma\varepsilon_2\left(1 - \frac{N^2}{\Gamma^2}\right)\right\}\cos\theta_r. \tag{17}$$

Если электростатическое поле отсутствует ($\Gamma = 1$), то в случае вакуумной волны ($N = 1$) независимо от ее поляризации величина Y сохраняется. Это известный режим авторезонанса. При $N \neq 1$ и отсутствии электрического поля величина Y не может быть интегралом движения. При наличии электростатического поля ($\Gamma \neq 1$) ситуация изменяется, тогда при определенных условиях в рассматриваемой движущейся системе отсчета оказывается возможным режим авторезонанса, когда величина Y сохраняется при движении частицы. Рассмотрим подробнее эти условия, которые существенно зависят от поляризации волны.

3. В случае линейно поляризованной поперечной волны имеются две возможности.

$$\text{а)}\ \varepsilon_1 \equiv \varepsilon \neq 0, \qquad \varepsilon_2 = 0. \tag{18}$$

Из уравнения (17) следует, что величина Y будет сохраняться, если $N = 1$. Таким образом, режим авторезонанса в случае вакуумной волны имеется и в движущейся системе отсчета, если волна поляризована в направлении электрического дрейфа.

$$\text{б)}\ \varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 \equiv \varepsilon \neq 0. \tag{19}$$

Уравнение (17) показывает, что в волне, поляризованной в направлении электростатического поля, авторезонанс возможен в замедленной волне при условии $\Gamma = N > 1$, т.е. когда скорость электрического дрейфа

$$V = \frac{1}{N}(N^2 - 1)^{1/2}. \tag{20}$$

В случае циркулярно поляризованной волны $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ режим авторезонанса оказывается возможным при условии

$$\Gamma = N^2 > 1, \tag{21}$$

при этом волна также должна быть замедленной. Для волны с произвольной эллиптической поляризацией условие авторезонанса выполняется, если имеет место соотношение

$$\Gamma = \frac{1}{2\varepsilon_2}\left\{\varepsilon_1(N^2-1) + \sqrt{\varepsilon_1^2(N^2-1)^2 + 4\varepsilon_2^2 N^2}\right\}. \tag{22}$$

4. Исследование авторезонансного режима движения заряженной частицы при выполнении одного из условий (18)–(22) показывает, что во всех случаях, кроме (19), движение описывается довольно сложными формулами. Это, вероятно, связано с тем, что режим (19) является оптимальным. Рассмотрим его более подробно. В этом случае при точном выполнении резонансного соотношения (16) из системы (12)–(15) имеем

$$\frac{dw_\perp}{ds} = \frac{NY\varepsilon}{2}\cos\theta_r, \qquad \frac{d\theta_r}{ds} = -\frac{NY\varepsilon}{2w_\perp}\sin\theta_r. \tag{23}$$

При этом необходимо учитывать условие авторезонанса

$$w^0 - w^3 \equiv Y = \frac{1}{qN^2} = \mathrm{const}, \tag{24}$$

а также релятивистское соотношение

$$(w^0)^2 = 1 + w_\perp^2 + (w^3)^2. \tag{25}$$

Исключая w^3 из (24), (25), получаем формулу

$$w^0 = \frac{1}{2Y}(Y^2 + w_\perp^2 + 1). \tag{26}$$

Из системы (23) следует интеграл движения

$$w_\perp \sin\theta_r = w_{\perp 0}\sin\theta_{r0} \equiv \alpha = \mathrm{const}, \tag{27}$$

где $w_{\perp 0}$, θ_{r0} — начальные значения поперечного импульса частицы и резонансной фазы соответственно.

С учетом интеграла (27) из уравнений (23) легко найти

$$w_\perp^2 = w_{\perp 0}^2 + \varepsilon NY w_{\perp 0}(s-s_0)\cos\theta_{r0} + \left(\frac{\varepsilon NY}{2}\right)^2 (s-s_0)^2. \tag{28}$$

Согласно (26), по такому же закону в параметрическом виде изменяется энергия частицы.

Чтобы найти явную зависимость энергии частицы от времени, необходимо воспользоваться соотношением

$$dt' = \frac{ds}{\Omega}w^0 = \frac{ds}{2\Omega Y}\left\{1 + Y^2 + w_{\perp 0}^2 + \varepsilon NY w_{\perp 0}(s-s_0)\cos\theta_{r0} + \left(\frac{\varepsilon NY}{2}\right)^2 (s-s_0)^2\right\}. \tag{29}$$

Отсюда видно, что явная зависимость энергии частицы от времени является довольно сложной. Эффективность ускорения частицы, как и при движении в вакуумной волне, падает с увеличением энергии [3]

$$\frac{dw_0}{dx'^3} = \frac{N\varepsilon}{2}\frac{w_\perp}{w^3}\cos\theta_r = \frac{N\varepsilon}{2}\frac{(2w^0Y - Y^2 - 1)^{1/2}}{w^0 - Y}. \tag{30}$$

Вместе с тем из (30) следует, что эффективность ускорения в рассматриваемом случае в N раз больше, чем в случае вакуумной волны. В лабораторной системе изменение энергии частицы описывается формулой

$$\gamma = \Gamma(w^0 + Vw^1), \tag{31}$$

так что энергия, в среднем набираемая частицей, в $\Gamma = N$ раз больше, чем в движущейся со скоростью электрического дрейфа системе.

Список литературы

[1] *Коломенский А.А., Лебедев А.Н.* // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 6. С. 1259–1263. ЖЭТФ. 1963. Т. 44. Вып. 1. С. 261–266.
[2] *Давыдовский В.Я.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. Вып. 9. С. 886–888.
[3] *Воронин В.С., Коломенский А.А., Лебедев А.Н.* // Тр. ФИАН. 1973. Т. 69. С. 95–111.
[4] *Loeb A., Friedland L., Eliezer S.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1987. Vol. 15. N 2. P. 238–242.
[5] *Нейштадт А.И., Тимофеев А.В.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 5. С. 1706–1713.
[6] *Андреев Ю.А., Давыдовский В.Я.* // ЖТФ. 1975. Т. 45. Вып. 1. С. 3–8.
[7] *Ботвинник И.Е., Братман В.Л., Волков А.Б. и др.* // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 22. С. 1386–1389.
[8] *Красовицкий В.Б., Раздорский В.Г.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 4. С. 700–703.
[9] *Андреев Ю.А., Давыдовский В.Я., Доценко И.Б., Нагоев С.А.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 5. С. 138–145.
[10] *Roberts C.S., Buchsbaum S.J.* // Phys. Rev. 1964. Vol. 135A. N 2A. P. 381–388.
[11] *Бонч-Осмоловский А.Г.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 10. С. 1757–1760.
[12] *Гилинский И.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9. No 2. С. 407–409.
[13] *Милантьев В.П.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 10. С. 2026–2029.
[14] *Воронин В.С., Кононов В.К.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 1. С. 160–162.
[15] *Диденко А.Н., Кононов В.К.* // Атомная энергия. 1971. Т. 30. № 1. С. 50–52.
[16] *Милантьев В.П., Мирошников А.Г.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 1. С. 3–7.
[17] *Schram D.C., Beukema G.P.* // Physica. 1969. Vol. 42. N 6. P. 277–290.
[18] *Андреев Ю.А., Давыдовский В.Я., Даниленко В.К., Сапогин В.Т.* // Изв. вузов. Физика. 1980. Т. 23. № 11. С. 96–97.
[19] *Курин А.Ф.* // РиЭ. 1983. Т. 28. № 6. С. 1148–1153.
[20] *Карнилович С.П., Милантьев В.П.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. Вып. 2. С. 537–546.
[21] *Туркин Ю.А.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 7. С. 15–21.
[22] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1973. 504 с.
[23] *Морозов В.И., Соловьев Л.С.* // Вопросы теории плазмы. М., 1963. Вып. 2. С. 177–261.
[24] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* // Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974. 504 с.

Российский университет дружбы народов
Москва

Поступило в Редакцию
28 июля 1993 г.