01;10

ИНКРЕМЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ КРУГЛОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ЛАЗЕРЕ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

А.С.Артамонов, Н.И.Иноземцев

В линейном приближении исследована устойчивость круглого однородного электронного пучка радиусом r_0, распространяющегося в магнитных полях спирального ондулятора и соленоида. Получено дисперсионное уравнение, описывающее спектр собственных колебаний системы электронный пучок-электромагнитное поле. Найдены аналитические выражения для инкрементов неустойчивостей пучка электронов с гауссовским разбросом продольных скоростей в предельных случаях малого и большого разброса для тонкого и широкого электронных пучков.

Введение

На практике оптимальные условия генерации и усиления когерентного электромагнитного излучения в лазерах на свободных электронах, как правило, таковы, что необходимо принимать во внимание конечность поперечного размера электронного пучка. Рассмотрению эффектов, связанных с конечностью поперечного размера для случая ленточных электронных пучков в плоском ондуляторе, посвящены, в частности, работы [1–5]. В работе [6] исследована устойчивость круглого пучка, распространяющегося в соленоиде с осциллирующей продольной компонентой магнитного поля. Генерация когерентного электромагнитного излучения электронным пучком конечных размеров в спиральном ондуляторе рассматривалась в работе [7]. Там же был введен переходной параметр (поперечный размер), разделяющий области тонкого и широкого пучков относительно радиационного взаимодействия,

$$r_{\text{п}} = \lambdabar \left(\frac{\gamma|\mu|I_0}{\Theta_0^2 I}\right)^{1/4}, \qquad \lambdabar = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Здесь I_0 — ток пучка, $I = ec/r_e$ — ток Альфвена, μ — масса продольного движения, γ — релятивистский фактор, $\Theta_0^2 = v_\perp^2/v_\parallel^2$ — квадрат угла вынужденного вращения электронов, λ — длина волны излучения, c — скорость света, e и r_e — заряд и классический радиус электрона.

По отношению к кулоновскому взаимодействию таким параметром $r_п$, очевидно, является длина волны в сопутствующей системе отсчета.

Настоящая работа посвящена линейной теории устойчивости круглого однородного релятивистского электронного пучка в магнитных полях спирального ондулятора и соленоида. В отличие от работы [7] здесь на основе дисперсионного анализа рассматривается полный спектр собственных колебаний системы электронный пучок-электромагнитное поле для конкретной геометрии электронного пучка с учетом разброса продольных скоростей электронов.

Дисперсионное уравнение

Рассмотрим основные типы неустойчивостей, возникающих в пучке, движущемся в магнитных полях спирального ондулятора и соосного с ним соленоида. Рассмотрение будет проводиться для модели непрерывной среды. Это означает,что число частиц в объеме когерентности велико. Соответственно для тонкого и широкого пучков это ограничивает ток снизу следующими условиями:

$$\frac{I\lambda}{ev_\|} \gg 1, \qquad \frac{Ir_п^2\lambda}{ev_\| r_0^2} \gg 1. \tag{1}$$

Мы будем исследовать достаточно общий случай, когда основной механизм развития неустойчивости обусловлен модуляцией продольной скорости электронов, вызванной взаимодействием с электромагнитными полями, возбуждаемыми в электронном пучке, а поперечная скорость электронов соответствует вынужденному движению в полях спирального ондулятора и соленоида. Таким образом, мы пренебрежем механизмом возбуждения поперечного тока посредством модуляции поперечной скорости электронов [8]. Предположим также, что когерентный сдвиг частот Λ собственных колебаний рассматриваемой системы значительно меньше характерных частот одночастичного движения во внешних полях

$$|\Lambda| \ll \omega_{1,2}, \chi_0.$$

Здесь $2\pi/\chi_0$ — период спирального ондулятора, $\omega_{1,2}$ — частоты малых колебаний электронов вблизи равновесных траекторий [8]. Это позволяет, в частности, использовать метод усреднения [9] для расчета коллективной динамики электронного пучка. Коллективную динамику непрерывного электронного пучка будем описывать системой уравнений Власова, содержащей кинетическое уравнение для функции распределения электронов и уравнения Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial t}f+v_\|(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial z}f+\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})f = 0,$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\int f d\varepsilon,$$

$$\Delta\mathcal{A}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{A} = -4\pi\int \mathbf{v} f d\varepsilon+\nabla\frac{\partial}{\partial t}\varphi,$$

$$\operatorname{div}\mathcal{A}=0,\qquad \mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}-\nabla\varphi,\qquad e=m=c. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{A}$ и φ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля; $f=f(\mathbf{r}_\perp,z,\varepsilon,t)$ — одночастичная функция распределения электронов, зависящая от времени t, энергии электронов ε, продольной и поперечной координат z и $\mathbf{r}_\perp$; $\mathbf{v}$ и $v_\parallel$ — соответственно полная и продольная скорости электронов. Магнитные поля спирального ондулятора и соленоида в пренебрежении их зависимостью от поперечного смещения принимаются равными

$$B_{\text{онд}}=B_x+iB_y=B_\perp\exp(-i\chi_0 z),\qquad B_{\text{сол}}=B_z=B_\parallel,$$

а скорость вынужденного движения электронов в них

$$v_x+iv_y=v_\perp\exp(-i\chi_0 z),\qquad v_z=v_\parallel=\text{const},$$

$$v_\perp=\frac{\omega_\perp v_\parallel}{\omega_\parallel-\chi_0 v_\parallel},\qquad \omega_\perp=\frac{B_\perp}{\gamma},\qquad \omega_\parallel=\frac{B_\parallel}{\gamma},$$

причем в рассматриваемом приближении $|\omega_\parallel-\chi_0 v_\parallel|\gg|\Lambda|$. Линеаризуя систему уравнений (2) относительно отклонений одночастичной функции распределения, векторного и скалярного потенциалов от их значений в стационарном состоянии и представляя искомые решения в виде

$$(\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int(\ldots)_{\omega,\mathbf{k}}\exp(i\omega t-i\mathbf{k}\mathbf{r})d\omega d\mathbf{k},$$

получим следующее интегральное уравнение для продольной фурье-компоненты возмущения плотности электронного пучка:

$$\tilde\rho_{\omega,k_\parallel}(\mathbf{r}_\perp)+\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varepsilon}{\omega-k_\parallel v_\parallel(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[g_{\omega,k_\parallel}(\varepsilon,\mathbf{R})\cdot f_0(\varepsilon,\mathbf{r}_\perp)\cdot\tilde\rho_{\omega,k_\parallel}(\mathbf{r}'_\perp)\right]d\mathbf{r}'_\perp=0. \tag{3}$$

Здесь

$$g_{\omega,k_\parallel}(\varepsilon,\mathbf{R})=-2\pi\left\{\frac{v_\parallel(\varepsilon)}{k_\parallel}\left(\omega^2-k_\parallel^2\right)\cdot\mathcal{K}_0\left(R\cdot\sqrt{k_\parallel^2-\omega^2}\right)+\frac{\omega v_\perp^2(\varepsilon)}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\mathcal{K}_0\left(R\sqrt{(k_\parallel+\chi_0)^2-\omega^2}\right)+\mathcal{K}_0\left(R\sqrt{(k_\parallel-\chi_0)^2-\omega^2}\right)\right]\right\},$$

$\mathcal{K}_0$ — функция Макдональда, $\mathbf{R}=\mathbf{r}'_\perp-\mathbf{r}_\perp$.

Предполагая, что невозмущенная одночастичная функция распределения $f_0(\varepsilon,\mathbf{r}_\perp)$ факторизуется

$$f_0(\varepsilon,\mathbf{r}_\perp)=f_0(\varepsilon)\cdot\rho_0(\mathbf{r}_\perp),$$

т.е. отсутствует корреляция между энергией отдельного электрона и его поперечной координатой, а также пренебрегая более слабой зависимостью от ε функции $g_{\omega,k_\parallel}$ по сравнению с резонансным множителем $\left(\omega-k_\parallel v_\parallel(\varepsilon)\right)^{-1}$, приведем уравнение (3) к виду [10]

$$\tilde\rho_{\omega,k_\parallel}(\mathbf{r}_\perp)+2F\int q_{\omega,k_\parallel}(R)\cdot\rho_0(\mathbf{r}_\perp)\cdot\tilde\rho_{\omega,k_\parallel}(r'_\perp)d\mathbf{r}'_\perp=0,$$

где

$$q_{\omega,k_\parallel}(R) = \left(\omega^2 - k_\parallel^2\right) \mathcal{K}_0 \left(R\sqrt{k_\parallel^2 - \omega^2}\right) + \frac{\omega k_\parallel v_\perp^2}{2v_\parallel} \times$$

$$\times \left[\mathcal{K}_0 \left(R\sqrt{(k_\parallel + \chi_0)^2 - \omega^2}\right) + \mathcal{K}_0 \left(R\sqrt{(k_\parallel - \chi_0)^2 - \omega^2}\right)\right], \qquad (4)$$

$$F = \frac{1}{\mu\varepsilon_0} \int \frac{f_0(\varepsilon)d\varepsilon}{(\omega - k_\parallel v_\parallel(\varepsilon))^2}$$

— фактор, учитывающий разброс продольных скоростей в электронном пучке, обусловленный разбросом энергии,

$$\mu = \left(\varepsilon v_\parallel \frac{dv_\parallel}{d\varepsilon}\right)_0^{-1}$$

— масса продольного движения.

Разложим функцию $\tilde{\rho}_{\omega,k_\parallel}(\mathbf{r}_\perp)$ в ряд по азимутальным гармоникам и учтем, что

$$\mathcal{K}_0(R \cdot a) = \sum_m \int_0^\infty \frac{J_m(k_\perp r'_\perp) J_m(k_\perp r_\perp)}{k_\perp^2 + a^2} \exp\left[im(\varphi - \varphi')\right] k_\perp dk_\perp =$$

$$= 2\pi \sum_m H_m(a, r_\perp, r'_\perp) \exp[im(\varphi - \varphi')],$$

где

$$H_m(a, r_\perp, r'_\perp) = \begin{cases} \mathrm{I_m}(a \cdot r_\perp) \cdot K_m(a \cdot r'_\perp), & r_\perp < r'_\perp, \\ \mathrm{I_m}(a \cdot r'_\perp) \cdot K_m(a \cdot r_\perp), & r'_\perp < r_\perp, \end{cases}$$

I_m и K_m — модифицированные функции Бесселя индекса m.

Тогда для каждой из азимутальных гармоник $\tilde{\rho}_{m,\omega,k_\parallel}$ в случае круглого однородного пучка радиусом r_0 получим следующее интегральное уравнение:

$$\tilde{\rho}_{m,\omega,k_\parallel}(r_\perp) + 4\pi\rho_0 F \left\{ \left(\omega^2 - k_\parallel^2\right) \int_0^{r_0} \left[H_m(a, r_\perp, r'_\perp) + \frac{\omega k_\parallel v_\perp^2}{2v_\parallel \left(\omega^2 - k_\parallel^2\right)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(H_m(b, r_\perp, r'_\perp) + H_m(d, r_\perp, r'_\perp)\right)\right] \tilde{\rho}_{m,\omega,k_\parallel}(r'_\perp) r'_\perp dr'_\perp \right\} = 0. \qquad (5)$$

Здесь $a = (k_\parallel^2 - \omega^2)^{1/2}$, $b = \left[(k_\parallel + \chi_0)^2 - \omega^2\right]^{1/2}$, $d = \left[(k_\parallel - \chi_0)^2 - \omega^2\right]^{1/2}$, причем $\mathrm{Re}\, a, b, c > 0$. Подставляя в (5) выражение для $\tilde{\rho}_{m,\omega,k_\parallel}(r_\perp)$ в виде $\tilde{\rho}_{m,\omega,k_\parallel}(r_\perp) = c_1 \mathrm{J_m}(\mathbf{\Gamma}_1 \cdot r_\perp) + c_2 \mathrm{J_m}(\mathbf{\Gamma}_2 \cdot r_\perp) + c_3 \mathrm{J_m}(\mathbf{\Gamma}_3 \cdot r_\perp)$, найдем дисперсионное уравнение, описывающее спектр собственных колебаний непрерывного круглого электронного пучка в магнитных полях спирального ондулятора и соленоида,

$$\det \begin{vmatrix} \mathcal{D}(\beta, \mathbf{\Gamma}_1), & \mathcal{D}(\beta, \mathbf{\Gamma}_2), & \mathcal{D}(\beta, \mathbf{\Gamma}_3) \\ \mathcal{D}(\alpha_+, \mathbf{\Gamma}_1), & \mathcal{D}(\alpha_+, \mathbf{\Gamma}_2), & \mathcal{D}(\alpha_+, \mathbf{\Gamma}_3) \\ \mathcal{D}(\alpha_-, \mathbf{\Gamma}_1), & \mathcal{D}(\alpha_-, \mathbf{\Gamma}_2), & \mathcal{D}(\alpha_-, \mathbf{\Gamma}_3) \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

где

$$\mathcal{D}(\beta, \mathbf{\Gamma}) = \frac{\mathbf{\Gamma} J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}) K_m(\beta) - \beta J_m(\mathbf{\Gamma}) K_{m+1}(\beta)}{\beta^2 + \mathbf{\Gamma}^2},$$

$$\mathcal{D}(\alpha_\pm, \mathbf{\Gamma}) = \frac{\mathbf{\Gamma} J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}) K_m(\alpha_\pm) - \alpha_\pm J_m(\mathbf{\Gamma}) K_{m+1}(\alpha_\pm)}{\alpha_\pm^2 + \mathbf{\Gamma}^2},$$

$$\beta = r_0 (k_\parallel^2 - \omega^2)^{1/2}, \qquad \alpha_\pm = r_0 \left[(k_\parallel \mp \chi_0)^2 - \omega^2 \right]^{1/2}.$$

При этом $\mathbf{\Gamma}_1$, $\mathbf{\Gamma}_2$, $\mathbf{\Gamma}_3$ являются решением бикубического уравнения

$$1 = \omega_p^2 \mu \varepsilon_0 F \left[\frac{\beta^2}{\beta^2 + \mathbf{\Gamma}^2} - \frac{\omega k_\parallel v_\perp^2 r_0^2}{2 v_\parallel} \left(\frac{1}{\alpha_-^2 + \mathbf{\Gamma}^2} + \frac{1}{\alpha_+^2 + \mathbf{\Gamma}^2} \right) \right], \tag{7}$$

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0 \mu} \right)^{1/2}$$

— частота плазменных колебаний.

В уравнении (6) члены, пропорциональные $\mathcal{D}(\beta, \mathbf{\Gamma}_i)$, описывают кулоновское взаимодействие электронов; $\mathcal{D}(\alpha_+, \mathbf{\Gamma}_i)$ и $\mathcal{D}(\alpha_-, \mathbf{\Gamma}_i)$ — радиационное взаимодействие соответственно с прямой и обратной электромагнитными волнами. Для релятивистского электронного пучка взаимодействие с обратной электромагнитной волной является относительно слабым. Пренебрегая в этом случае соответствующими слагаемыми в уравнении (6), получим

$$\mathcal{D}(\beta, \mathbf{\Gamma}_1) \cdot \mathcal{D}(\alpha, \mathbf{\Gamma}_2) = \mathcal{D}(\beta, \mathbf{\Gamma}_2) \cdot \mathcal{D}(\alpha, \mathbf{\Gamma}_1) \tag{8}$$

или

$$\frac{(\beta^2 + \mathbf{\Gamma}_2^2)(\alpha^2 + \mathbf{\Gamma}_1^2)}{(\beta^2 + \mathbf{\Gamma}_1^2)(\alpha^2 + \mathbf{\Gamma}_2^2)} [\mathbf{\Gamma}_1 J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}_1) K_m(\beta) - \beta J_m(\mathbf{\Gamma}_1) K_{m+1}(\beta)] \times$$
$$\times [\mathbf{\Gamma}_2 J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}_2) K_m(\alpha) - \alpha J_m(\mathbf{\Gamma}_2) K_{m+1}(\alpha)] =$$
$$= [\mathbf{\Gamma}_2 J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}_2) K_m(\beta) - \beta J_m(\mathbf{\Gamma}_2) K_{m+1}(\beta)] \times$$
$$\times [\mathbf{\Gamma}_1 J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}_1) K_m(\alpha) - \alpha J_m(\mathbf{\Gamma}_1) K_{m+1}(\alpha)],$$

причем Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют биквадратному уравнению

$$1 = \omega_p^2 \mu \varepsilon_0 F \left[\frac{\beta^2}{\beta^2 + \mathbf{\Gamma}^2} - \frac{\omega k_\parallel v_\perp^2 r_0^2}{2 v_\parallel (\alpha^2 + \mathbf{\Gamma}^2)} \right]. \tag{9}$$

Подставляя в первый множитель левой части дисперсионного уравнения (8) выражения для $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$, полученные из уравнения (9), найдем

$$\frac{(\beta^2 + \mathbf{\Gamma}_1^2)}{(\beta^2 + \mathbf{\Gamma}_2^2)} \frac{(\alpha^2 + \mathbf{\Gamma}_2^2)}{(\alpha^2 + \mathbf{\Gamma}_1^2)} = -\frac{(\mathbf{\Gamma}_1^2 + \beta^2 - B)^2}{2AB} = -\left(x + \sqrt{x+1} \right)^2,$$

где

$$x=\frac{(\beta^2-B)^2-AB}{2(\beta^2-B)\sqrt{AB}},\qquad B=\omega_p^2\mu\varepsilon_0\beta^2F,\qquad A=-\frac{1}{2}B\gamma_\parallel^2v_\perp^2.$$

В приближении малости когерентного сдвига частот собственных колебаний системы параметр x^{-1} также оказывается малым, поэтому левой частью дисперсионного уравнения (8) можно пренебречь

$$[\mathbf{\Gamma}_2J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}_2)K_m(\beta)-\beta J_m(\mathbf{\Gamma}_2)K_{m+1}(\beta)]\times$$
$$\times[\mathbf{\Gamma}_1J_{m+1}(\mathbf{\Gamma}_1)K_m(\alpha)-\alpha J_m(\mathbf{\Gamma}_1)K_{m+1}(\alpha)]=0. \tag{10}$$

Для дальнейшего анализа удобно выделить три характерные области физических параметров α и β: 1) $|\alpha|,|\beta|\gg1$, когда электронный пучок с известной точностью можно считать неограниченным в поперечном направлении как относительно кулоновского, так и радиационного взаимодействия; 2) $|\beta|\gg1$, $|\alpha|\ll1$, в этом случае характер радиационного взаимодействия в значительной степени определяется конечностью поперечных размеров пучка электронов; 3) $|\beta|,|\alpha|\ll1$ соответствует тонкому электронному пучку, при этом кулоновское взаимодействие является преобладающим по отношению к радиационному.

Инкременты неустойчивостей широкого электронного пучка ($|\boldsymbol{\beta}|,|\boldsymbol{\alpha}|\gg1$)

Радиальные волновые числа $\mathbf{\Gamma}_i$, определяемые совместным решением уравнения (9) и (10), характеризуют степень модуляции по радиусу $r_\perp$ соответствующей моды собственных колебаний электронного пучка. Очевидно, что максимальные инкременты неустойчивостей будут лежать в области минимальных значений радиальных волновых чисел $\mathbf{\Gamma}_i$. В случае широкого электронного пучка эти значения можно считать не зависящими от параметров α и β и являющимися нулями функции Бесселя $J_m(\mathbf{\Gamma}_{1,2})=0$, причем $|\mathbf{\Gamma}_i|\ll|\alpha|,|\beta|$. Тогда определение частот собственных колебаний сводится к решению уравнения (9). Решение этого уравнения будем искать в области радиационного резонанса $\omega=k_\parallel v_\parallel(\varepsilon_0)=k_\parallel-\chi_0$, предполагая для определенности, что распределение продольных скоростей в электронном пучке является гауссовским

$$\int\limits_0^\infty\frac{f_0(\varepsilon)d\varepsilon}{(\omega-k_\parallel v_\parallel(\varepsilon))^2}=-\int\limits_0^\infty d\tau\exp(-\Lambda\tau-\Lambda_{\text{т}}^2\tau^2),$$

$$\Lambda=i(\omega-k_\parallel v_\parallel(\varepsilon_0)),\qquad \Lambda_{\text{т}}^2=\omega^2\frac{\overline{\left(v_\parallel(\varepsilon)-v_\parallel(\varepsilon_0)\right)^2}}{2v_\parallel^2(\varepsilon_0)}.$$

а) М а л ы й р а з б р о с п р о д о л ь н ы х с к о р о с т е й э л е к т р о н о в ($|\Lambda|\gg\Lambda_{\text{т}}$). В этом случае уравнение (9) примет следующий вид:

$$\Lambda^2+6\Lambda_{\text{т}}^2+\tilde{\omega}_p^2+\frac{ib\tilde{\omega}_p^2}{\Lambda+i\tilde{\Delta}}=0,$$

где

$$\tilde{\omega}_p^2 = \frac{\omega_p^2\beta^2}{\beta^2+\Gamma^2}, \qquad b = \frac{k_\| v_\perp^2}{4v_\|}\left(1+\frac{\Gamma^2}{\beta^2}\right),$$

$$\tilde{\Delta} = \chi_0 - k_\|(1-v_\|) - \frac{\Gamma^2 k_\|}{2\beta^2\gamma_\|^2 v_\|}$$

— обобщенная отстройка от радиационного резонанса.

Это уравнение отличается от известного в теории ЛСЭ уравнения (см., например, [11]), описывающего в приближении трехволнового взаимодействия неустойчивость электронного пучка, наличием членов $\sim \Gamma^2$. Физически это связано с тем, что модуляция по радиусу приводит к редукции плазменной частоты, а наличие в электромагнитной волне поперечных волновых чисел к изменению точки радиационного резонанса.

Если кулоновское взаимодействие является преобладающим $|\tilde{\omega}_p^2+6\Lambda_т^2|^{3/2} \gg |b\tilde{\omega}_p^2|$, то при $\mu < 0$ независимо от отстройки $\tilde{\Delta}$ в электронном пучке будет развиваться неустойчивость отрицательной массы [12] с инкрементом

$$\mathrm{Re}\,\Lambda \simeq \left(|\tilde{\omega}_p|^2 - 6\Lambda_т^2\right)^{1/2}, \tag{11}$$

при $\mu > 0$ будет иметь место рамановский режим развития радиационной неустойчивости в диапазоне отстроек

$$\frac{\left(\tilde{\Delta}-\sqrt{\tilde{\omega}_p^2+6\Lambda_т^2}\right)^2}{4} \leqslant \frac{b\tilde{\omega}_p^2}{2\sqrt{\tilde{\omega}_p^2+6\Lambda_т^2}}$$

с максимальным инкрементом

$$\mathrm{Re}\,\Lambda \simeq \sqrt{\frac{b\tilde{\omega}_p^2}{2\sqrt{\tilde{\omega}_p^2+6\Lambda_т^2}}}.$$

Если же коллективные эффекты в электронном пучке определяются радиационным взаимодействием, т.е. $|\tilde{\omega}_p^2+6\Lambda_т^2|^{3/2} \ll |b\tilde{\omega}_p^2|$, то имеет место так называемый комптоновский режим развития неустойчивости с максимальным инкрементом вблизи радиационного резонанса

$$|\tilde{\Delta}| \ll |b\tilde{\omega}_p^2|^{1/3},$$

$$\mathrm{Re}\,\Lambda \simeq \frac{\sqrt{3}}{2}|b\tilde{\omega}_p^2|^{1/3}\left(1-\frac{\tilde{\omega}_p^2+6\Lambda_т^2}{3|b\tilde{\omega}_p^2|^{2/3}}\right).$$

Вдали от резонанса

$$\Lambda \simeq \pm i\sqrt{\frac{b\tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\Delta}}+\tilde{\omega}_p^2+6\Lambda_т^2}$$

и, следовательно, при $\mu > 0$ неустойчивость развивается для больших отрицательных отстроек от резонанса, при $\mu < 0$ — для положительных.

б) Большой разброс продольных скоростей электронов ($|\mathrm{Re}\,\Lambda| \ll \Lambda_т$). Поскольку в этом случае максимальное значение инкремента неустойчивости реализуется при достаточно больших отстройках от радиационного резонанса ($\tilde{\Delta} \sim \Lambda_т$), то величиной $\mathrm{Re}\,\Lambda$ в выражении для $\overline{(\omega - k_\| v_\|(\varepsilon))^{-1}}$ можно пренебречь. В результате получим

$$\Lambda \simeq -i(\tilde{\Delta} - Ab) - Bb, \tag{12}$$

где

$$A = \tilde{\omega}_p^2 \int_0^\infty \tau \exp(-\Lambda_т^2 \tau^2) \cos(\tilde{\Delta}\tau) d\tau = \frac{\tilde{\omega}_p^2}{2\Lambda_т^2} {}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{\tilde{\Delta}^2}{4\Lambda_т^2}\right),$$

$$B = -\tilde{\omega}_p^2 \int_0^\infty \tau \exp(-\Lambda_т^2 \tau^2) \sin(\tilde{\Delta}\tau) d\tau = -\frac{\sqrt{\pi}\tilde{\Delta}\tilde{\omega}_p^2}{4\Lambda_т^3} \exp\left(-\frac{\tilde{\Delta}^2}{4\Lambda_т^2}\right),$$

${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Таким образом, максимальное значение инкремента неустойчивости равно [11]

$$\mathrm{Re}\,\Lambda \simeq \frac{\sqrt{\pi} b \tilde{\omega}_p^2}{2\sqrt{2}\Lambda_т^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

при $\tilde{\Delta} = \sqrt{2}\Lambda_т$. Причем, как видно, неустойчивость развивается при $\mu > 0$ для положительных отстроек от радиационного резонанса ($\tilde{\Delta} > 0$), а при $\mu < 0$ — для отрицательных.

Инкременты неустойчивостей элекронного пучка, тонкого относительно радиационного взаимодействия ($|\beta| \gg 1$, $|\alpha| \ll 1$)

В этом случае наименьшее значение параметра Γ получается из решения дисперсионного уравнения

$$\frac{\Gamma J_1(\Gamma)}{J_0(\Gamma)} = \frac{\alpha K_1(\alpha)}{K_0(\alpha)}$$

или с учетом того, что $|\Gamma|$, $|\alpha| \ll 1$,

$$\Gamma^2 = \frac{4}{\ln\left[\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{c^2\alpha^2}\right]},$$

c — постоянная Эйлера.

Подставляя это выражение в уравнение (9) и учитывая, что $|\mathbf{\Gamma}^2| \ll \ll |\beta^2|\,|\alpha^2| \ll |\mathbf{\Gamma}^2|$, получим

$$\omega_p^2 \int\limits_0^\infty \left\{1+\frac{r_0^2\omega^2 v_\perp^2}{8}\ln\left[ir_0^2 k_\parallel(\Lambda+i\Delta)\right]\right\}\exp\left(-\Lambda\tau-\Lambda_\text{т}^2\tau^2\right)\tau d\tau=-1. \qquad (14)$$

а) Малый разброс продольных скоростей электронов. При произвольных отстройках Δ инкременты неустойчивостей тонкого относительно радиационного взаимодействия электронного пучка определяются из уравнения

$$\Lambda^2+6\Lambda_\text{т}^2+\omega_p^2+\frac{\omega_p^2 r_0^2\omega^2 v_\perp^2}{8}\ln\left[ir_0^2 k_\parallel(\Lambda+i\Delta)\right]=0.$$

Для относительно малых поперечных скоростей вынужденного движения $v_\perp^2 \ll 8(r_0\omega)^{-2}$ радиационное взаимодействие является малой поправкой к кулоновскому; при этом в электронном пучке может развиваться либо неустойчивость отрицательной массы ($\mu<0$, (11)), либо радиационная неустойчивость с максимальным инкрементом

$$\operatorname{Re}\Lambda \simeq \frac{\pi\omega_p^2 r_0^2\omega^2 v_\perp^2}{16\sqrt{\omega_p^2+6\Lambda_\text{т}^2}}.$$

В обратном случае $v_\perp^2 \gg 8(r_0\omega)^{-2}$ кулоновское взаимодействие является относительно слабым, а радиационное приводит к развитию неустойчивости с максимальным инкрементом

$$\operatorname{Re}\Lambda \simeq \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda\!\!\!^{-2} v_\parallel^2}{2r_\text{п}^4}\ln\left(\dfrac{r_\text{п}}{r_0}\right)^2\right)^{1/2}, & \mu>0 \quad [10], \\ \left(\dfrac{\pi\lambda\!\!\!^{-2} v_\parallel^2}{4r_\text{п}^4}\right)^{1/2}, & \mu<0. \end{cases} \qquad (15)$$

б) Большой разброс продольных скоростей электронов. Этот случай соответствует соотношению параметров

$$\frac{8\Lambda_\text{т}^2}{r_0^2\omega v_\perp^2\omega_p^2} \gg 1.$$

При этом, как следует из уравнения (14), инкременты радиационной неустойчивости отсутствуют для отрицательной массы продольного движения и экспоненциально малы для положительной. Действительно, пренебрегая в выражении для $(\omega-k_\parallel v_\parallel(\varepsilon))^{-2}$ величиной $\operatorname{Re}\Lambda$ и полагая $J_m\Lambda \simeq -\Delta$, найдем

$$\operatorname{Re}\Lambda \simeq \frac{1}{r_0^2 k_\parallel}\exp\left[-\frac{a^2 A}{A^2+B^2}\right]\sin\left(\frac{a^2 B}{A^2+B^2}\right),$$

где $a^2 = 8/\left(r_0^2\omega^2 v_\perp^2 \omega_p^2\right)$, A и B определены выше (12).

Таким образом, инкремент радиационной неустойчивости достигает своего максимального значения при отстройке

$$\Delta \simeq \frac{2\sqrt{\pi}}{a^2}\left(A^2+B^2\right) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2a^2\Lambda_\text{т}^2}$$

и равен [10]

$$\operatorname{Re}\Lambda \simeq \frac{1}{k_\parallel r_0^2}\exp\left\{-\frac{16\Lambda_\text{т}^2}{r_0^2\omega^2 v_\perp^2\omega_p^2}\right\}. \tag{16}$$

Инкременты неустойчивости тонкого электронного пучка ($|\alpha| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$)

В этой области параметров инкременты неустойчивостей находятся из уравнения, аналогичного уравнению (14),

$$\omega_p^2\int\limits_0^\infty\left\{-\frac{r_0^2k_\parallel^2}{4\gamma_\parallel^2}\ln\left(\frac{r_0^2k_\parallel^2}{\gamma_\parallel^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{r_0^2k_\parallel^2v_\perp^2}{8}\ln\left[ir_0^2k_\parallel(\Lambda+i\Delta)\right]\right\}\exp\left(-\Lambda\tau-\Lambda_\text{т}^2\tau^2\right)\tau d\tau=-1.$$

Поскольку $\beta^2 = r_0^2k_\parallel^2/\gamma_\parallel^2 \ll 1$ и $v_\perp^2\gamma_\parallel^2 < 1$, то кулоновское взаимодействие в электронном пучке является преобладающим, а инкременты неустойчивостей находятся из следующих выражений. При относительно малом разбросе продольных скоростей

$$\operatorname{Re}\Lambda \simeq \begin{cases}\sqrt{\dfrac{|\tilde\omega_p^2|-6\Lambda_\text{т}^2}{4}}, & \mu<0,\\[2mm] \dfrac{\pi\gamma_\parallel^2 v_\perp^2\tilde\omega_p^2}{4\sqrt{\tilde\omega_p^2+6\Lambda_\text{т}^2}}, & \mu>0,\end{cases}$$

при относительно большом разбросе продольных скоростей электронов

$$\operatorname{Re}\Lambda \simeq \frac{1}{k_\parallel r_0^2}\exp\left(-\frac{4\Lambda_\text{т}^2}{\gamma_\parallel^2 v_\perp^2\tilde\omega_p^2}\right), \tag{17}$$

где $\tilde\omega_p = \omega_p^2\beta^2\ln(\beta^{-2})/4$ — плазменная частота тонкого электронного пучка.

Заключение

При анализе коллективной устойчивости электронного пучка мы предлагали, что угловой разброс электронов отсутствует. В рассматриваемом приближении этот фактор может быть также принят во внимание, если учесть зависимость одночастичной функции распределения электронов от переменных действия поперечного движения $I_{1,2}$, полагая при этом $\dot{I}_{1,2} = 0$. Тогда при выводе дисперсионного уравнения наряду с интегрированием по энергии необходимо выполнить интегрирование по $I_{1,2}$ и учесть, что систематическая составляющая отклонения продольной скорости от равновесного значения равна [13]

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon + \langle v_{\parallel}^2 \rangle \frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} I_1 + \langle v_{\parallel}^2 \rangle \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} I_2.$$

Разброс энергии $\Delta\varepsilon$ определяет важный параметр Π, характеризующий возможность электронного пучка генерировать когерентное электромагнитное излучение [10] (см. (13, 16)),

$$\Pi = 2\overline{\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2} \frac{\gamma\gamma_{\parallel}}{\mu} \frac{I_0}{I}.$$

При $\Pi \ll 1$ можно подобрать параметры ондулятора таким образом, что энергетический разброс не будет подавлять генерацию когерентного излучения (генерация будет происходить так же, как и в “холодном” электронном пучке).

Величина углового разброса, как и радиус электронного пучка, определяется величиной эмиттанса пучка Э и параметрами фокусировки на участке генерации. Для получения максимальных инкрементов радиационной неустойчивости необходимо таким образом подобрать параметры фокусировки, чтобы, с одной стороны, получить как можно меньше значение радиуса электронного пучка, а с другой — оставить величину углового разброса в тех пределах, когда он не оказывает заметного влияния на инкременты неустойчивости

$$\overline{\left(\frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{\parallel}}\right)^2} \ll \frac{\lambda\!\!\!^{-2}}{l_g^2}, \tag{18}$$

$l_g = \Lambda^{-1}$ — инкрементная длина.

В работе [10] показано, что оптимальные условия фокусировки зависят от соотношения длины волны λ и эмиттанса Э. Так, для случая спирального ондулятора в области $\lambda \gtrsim$ Э электронный пучок целесообразно фокусировать до размеров тонкого пучка. Тогда минимальная инкрементная длина радиационной неустойчивости в комптоновском режиме генерации будет равна [10]

$$(l_g)_{\min} \simeq \frac{r_{\text{п}}^2}{\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{\gamma^2 \lambda\!\!\!^{-}}{Q\sqrt{1+Q^2}} \sqrt{\frac{\gamma I_0}{I}},$$

Q — параметр ондуляторности.

При меньших значениях $\lambda\,(\lambda < Э)$ сфокусировать электронный пучок до области тонкого пучка, не нарушив условие (18), становится невозможным. В этой области параметров $(l_g)_{\min}$ вычисляется по формулам широкого пучка и не зависит от длины волны излучения [10]

$$(l_g)_{\min} \simeq \frac{Э}{2\pi}\frac{\gamma^2}{Q\sqrt{1+Q^2}}\sqrt{\frac{\gamma I_0}{I}}.$$

Дальнейшее уменьшение λ ограничивается величиной $\lambda_{гр} \simeq ЭП^{1/2}$, меньше которой энергетический разброс в пучке будет подавлять генерацию когерентного электромагнитного излучения.

Авторы признательны В.Е.Савченко за стимулирующий интерес и поддержку в работе.

Список литературы

[1] *Гинзбург Н.С.* //РиЭ. 1989. Т. 34. № 9. С. 1953–1938.
[2] *Качалов К.О., Попков Н.Г.* //РиЭ. 1989. Т. 34. № 10. С. 2148–2156.
[3] *Гинзбург Н.С., Сергеев А.С.* //РиЭ. 1990. Т. 35. № 9. С. 1944–1954.
[4] *Качалов К.О.* //РиЭ. 1992. Т. 37. № 3. С. 566–576.
[5] *Гинзбург Н.С., Серов А.С.* // ЖТФ. 1989. Т. 69. Вып. 3. С. 126–134.
[6] *Davidson R.C., Yuan-Zhoo Yin.* //Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30. N 6. P. 3078–3090.
[7] *Кондратенко А.М., Салдин Е.Л.* //ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 8. С. 1633–1642.
[8] *Артамонов А.С., Иноземцев Н.И.* //РиЭ. 1989. Т. 34. № 3. С. 593–600.
[9] *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 149 с.
[10] *Артамонов А.С., Болдышев В.Ф., Дербенев Я.С.*и др. Препринт ХФТИ. № 41. Харьков, 1990. 26 с.
[11] *Федоров М.В.* //УФН. 1981. Т. 132. № 2. С. 123–136.
[12] *Буров А.В., Дербенев Я.С.* Препринт ИЯФ СОАН СССР. № 33. Новосибирск, 1981. 12 с.
[13] *Артамонов А.С., Дербенев Я.С., Иноземцев Н.И.* //ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 3. С. 214–216.

Научно-исследовательский,
проектно-конструкторский и технологический
институт комплексного электропривода
АООТ "НИИКЭ"
Новосибирск

Поступило в Редакцию
3 августа 1993 г.