

01; 03

©1994 г.

## СРАВНЕНИЕ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА И ПЕРВИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

*Б.В.Архипов, В.А.Люлька*

На основе нейтральных консервативных разностных схем второго порядка точности проводится расчет вторичного ламинарного течения Куэтта при различных числах Рейнольдса. Скорость диссипации полученного течения сравнивается со скоростью диссипации неустойчивого первичного течения при одинаковых числах Рейнольдса. Полученные результаты показывают, что скорость диссипации вихрей Тейлора больше скорости диссипации первичного течения Куэтта. Таким образом, для рассматриваемой задачи реализующееся устойчивое решение сопровождается большей скоростью диссипации, нежели неустойчивое.

В гидродинамике известен вариационный принцип минимума диссипируемой энергии Гельмгольца [1]. Этот принцип легко доказывается для линейных стационарных уравнений. В случае нелинейных уравнений Навье–Стокса такого принципа доказать не удастся.

В неравновесной термодинамике известен аналогичный принцип минимума производства энтропии, который предложен И.Пригожиным и был доказан для линейной неравновесной термодинамики [2–4].

В общем случае для нелинейных стационарных задач не удастся строго доказать справедливость этого принципа [1–8]. В то же время представляет интерес проверить именно в нелинейном случае, удовлетворяется ли этот принцип в ситуациях, когда решение стационарной краевой задачи для уравнений Навье–Стокса не единственно.

В настоящей работе делается попытка проверить гипотезу о минимуме производства энтропии для уравнений Навье–Стокса на примере течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. Это течение дает исследователям редчайший случай, когда из-за специфической геометрии реализуется в эксперименте вырожденный с точки зрения общей теории случай, т.е. при потере устойчивости первичного течения происходит переход на новое стационарное ламинарное осесимметричное течение [9–15].

Нужно сказать, что в нашей работе мы имеем дело именно с ламинарными течениями, т.е. ее результаты нельзя переносить на существенно более трудный случай турбулентных потоков. По вопросу о связи турбулентности и принципа минимума диссипации (производства энтропии) читателю рекомендуется цикл работ [5–8].

Таким образом, ниже рассматривается проблема, будет ли скорость диссипации вторичного, более устойчивого ламинарного течения меньше диссипации первичного ламинарного течения в ситуации, когда последнее неустойчиво.

Задача о течении между двумя цилиндрами имеет длинную историю и является подробно исследованной многими авторами. Один из последних весьма полных обзоров приводится, например, в работе [9]. В настоящее время существует возможность проводить расчеты трехмерного течения при больших числах Рейнольдса [10], когда возникает хаотический режим. Тем не менее, насколько известно авторам, до сих пор не проводилось сравнение скорости диссипации первичного и вторичного ламинарных течений. Заполнению такого пробела и посвящена данная работа.

В силу невозможности провести такое исследование аналитическими методами приходится привлекать численные. Правомерность применения численных методов часто подвергается сомнению, поскольку у дискретных уравнений имеется собственная вычислительная диссипация. Тем не менее, с нашей точки зрения, применение консервативных (нейтральных по энергии) центрально-разностных схем, имеющих второй порядок аппроксимации, делает расчеты достаточно надежными [16].

Случай течения Куэтта и с этой точки зрения вполне благоприятный, так как в ситуации, когда вращается внутренний цилиндр, а внешний покоится, потеря устойчивости происходит при достаточно малых числах Рейнольдса. Вследствие этого существует возможность использовать схемы второго порядка точности с центральными разностями, поскольку выполняется условие о сеточном числе Рейнольдса, который должен быть меньше двух. При геометрических параметрах настоящих расчетов ("толстый" зазор между цилиндрами) и  $Re = \omega_1 d_1 (d_2 - d_1) / \nu$  критическое значение числа Рейнольдса  $Re \approx 80$ , что соответствует значению  $Re \approx 20$  по определению числа Рейнольдса в [14, 15]. Наши расчеты показывают, что при  $Re = 80-200$  возникает вторичное течение, достаточно сильное для проявления эффекта, и в то же время при таких числах Рейнольдса можно использовать достаточно крупную сетку ( $64 \times 64$ ), чтобы условие возможности применения центрально-разностных схем  $Re_c \approx Re \cdot \Delta x < 2$  не нарушалось.

## 1. Основные уравнения

Рассмотрим уравнения Навье–Стокса в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии [17]. Введем следующие обозначения:  $d_1, d_2$  — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров;  $\omega_1, \omega_2$  — угловые скорости вращения цилиндров;  $L_z$  — размер по направлению  $z$  (ось цилиндра). Определим масштаб расстояния  $d = d_2 - d_1$ , скорости  $u_r = \omega_1 d_1$ , давления  $\rho_0 u_r^2$  и проведем обезразмеривание. Тогда в области  $\{r_1 < r < r_2, 0 < z < L\}$ , где  $r_{1,2} = d_{1,2}/d$ ,  $L = L_z/d$ , получим краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial z}(ruw) - v^2 = -r \frac{\partial}{\partial r}(p) + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r}(u) \right) + r \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u) - \frac{u}{r} \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ruw) + \frac{\partial}{\partial z}(rw^2) = -r \frac{\partial}{\partial z}(p) + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r}(w) \right) + r \frac{\partial^2}{\partial z^2}(w) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ruv) + \frac{\partial}{\partial z}(rvw) + uv = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r}(v) \right) + r \frac{\partial^2}{\partial z^2}(v) - \frac{v}{r} \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0, \quad (4)$$

$$u = w = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_2,$$

$$v = v_1 = 1 \text{ при } r = r_1, \quad v = v_2 = 0 \text{ при } r = r_2,$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{Bmatrix} (r, 0) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{Bmatrix} (r, L), \quad \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} (r, 0) = \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} (r, L).$$

Число Рейнольдса определено по формуле  $\text{Re} = u_r d / \nu$ . Первичное течение равно  $u = w = 0$ ,  $v = v_1 r_1 (-r + r_2^2/r) / (r_2^2 - r_1^2)$ . В силу осевой симметрии и граничных условий баланс энергии имеет вид [15]

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\text{Re}} \int_0^L v_1 r_1 \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r|_{r=r_1}} \right) dz = \\ & = \frac{0.5}{\text{Re}} \int_0^L \int_{r_1}^{r_2} r \left[ \left( 2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( 2 \frac{u}{r} \right)^2 + \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dr dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь слева стоит работа на границе, а справа — диссипация внутри области на единицу угла, выраженные в  $u_r^3 d^2$ . С учетом уравнения неразрывности (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\text{Re}} \int_0^L v_1 r_1 \frac{\partial v}{\partial r|_{r=r_1}} dz = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \int_0^L \int_{r_1}^{r_2} r \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r} (u^2 + v^2) \right] dr dz. \end{aligned} \quad (6)$$

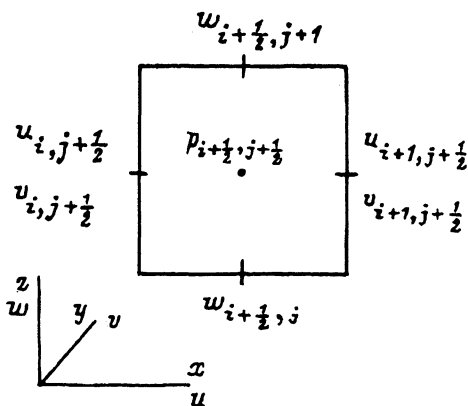


Рис. 1.

Левая и правая части равенства (6) меньше соответствующих частей равенства (5) на константу  $v_1^2 L / \text{Re}$ . В численных преобразованиях с (6) удобнее обращаться, чем с (5), поэтому ниже в разделе 4 мы анализируем значения величин в правой (диссипация) и левой (работа на границе) частях равенства (6), не забывая, что от истинных значений они отличаются на постоянную величину. Для первичного течения Куэтта получаем

$$D_{1an} = -\frac{1}{L \text{Re}} \int_0^L v_1 r_1 \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=r_1} dz = 1.66(6) / \text{Re}.$$

## 2. Разностная схема и итерационный метод

Аппроксимацию уравнений проводим на разнесенной сетке [18–20]. Функции  $u, v$  будем относить к узлам на восточной и западной границах ячейки,  $w$  — на северной и южной, функцию  $p$  — к центру ячейки, как показано на рис. 1.

Аппроксимация уравнения неразрывности (4) относится к центру ячейки

$$(r_{i+1} u_{i+1, j+1/2} - r_i u_{i, j+1/2}) \Delta z + r_{i+1/2} (w_{i+1/2, j+1} - w_{i+1/2, j}) \Delta r = 0.$$

Аппроксимацию уравнения (1) относим к западным и восточным граням ячейки

$$\begin{aligned} & 0.25 \Delta z [(u_{i, j+1/2} + u_{i+1, j+1/2})^2 r_{i+1/2} - (u_{i-1, j+1/2} + u_{i, j+1/2})^2 r_{i-1/2}] + \\ & + 0.25 r_i \Delta r [(w_{i+1/2, j+1} + w_{i-1/2, j+1})(u_{i, j+1/2} + u_{i, j+3/2}) - \\ & - (w_{i+1/2, j} + w_{i-1/2, j})(u_{i, j+1/2} + u_{i, j-1/2})] - v_i^2 = \\ & = -r_i \Delta z (p_{i+1/2, j+1/2} - p_{i-1/2, j+1/2}) + \\ & + \text{Re}^{-1} \left\{ [(u_{i+1, j+1/2} - u_{i, j+1/2}) r_{i+1/2} - (u_{i, j+1/2} - u_{i-1, j+1/2}) r_{i-1/2}] \Delta z / \Delta r + \right. \end{aligned}$$

Аппроксимация остальных уравнений в основном аналогична аппроксимации уравнения (1) и здесь не приводится. Таким образом, используются центрально-разностные аппроксимации второго порядка. Нетрудно показать, что, во-первых, приведенная разностная схема нейтральна, т.е. дискретные аналоги нелинейных членов и градиентов давления не дают вклада в энергию, и, во-вторых, аппроксимация вязких членов является положительно определенной.

Для решения системы разностных уравнений используем симметрично-связанный метод Гаусса-Зейделя [20]. Этот метод заключается в том, что в процессе итераций переменные корректируются группами, относящимися к одной ячейке. Так, в ячейке, показанной на рис. 1, с нового шага итерации берутся  $u, v$  в западном и восточном узлах,  $w$  — в северном и южном,  $p$  — в центральном узле. Такой метод дает возможность адекватно учесть уравнение неразрывности на каждом шаге итерации. Отличие используемого итерационного метода от метода из [20] заключается в том, что в уравнениях (1), (3) присутствуют дополнительные нелинейные квадратичные члены  $v^2$  и  $u \cdot v$ . В этих членах в уравнении (1) с нового шага берется  $v$ , а в уравнении (3) берется  $u$ . Поскольку переменные  $u$  и  $v$  определены в одних и тех же узлах сетки, то такой подход вносит дополнительную невязкость, что улучшает сходимость метода, с другой стороны, при этом не вносятся дополнительных затруднений при разрешении уравнений на ячейке.

В [20] симметрично-связанный метод Гаусса-Зейделя применен в совокупности с многосеточным методом. В настоящей работе попытка применения многосеточного метода для отыскания вторичных течений не привела к успеху. Этот метод давал эффективное решение только в тех случаях, когда было устойчиво первичное течение. Возможная причина такого эффекта заключается в том, что при переходе к более крупным сеткам изменяется вязкость задачи и вторичные течения теряют устойчивость. Этот вопрос требует дальнейших исследований. Полученные в настоящей работе решения проведены на одной сетке.

#### 4. Результаты расчетов и выводы

Для расчетов использовалась сетка, состоящая из  $64 \times 64$  ячеек. Были проведены расчеты в случае вращающегося внутреннего цилиндра и покоящегося внешнего при различных числах Рейнольдса, при периоде  $L = 1.25$  и при  $r_1/r_2 = 0.5$ .

Известно [9,12-15,17], что потеря устойчивости первичного течения происходит таким образом, что возникает новое стационарное осесимметричное течение — вихри Тейлора.

Расчеты проводились с двойной точностью. Итерации заканчивались по условию  $\max |\eta_a| < 10^{-6}$ , где  $\eta_a$ ,  $a = u, v, w, p$  — невязки для уравнений (1-4) соответственно. Для достижения такой точности требовалось порядка 5000 итераций. Степень недоитерированности оценивалась также по разности прихода энергии и ее диссипации внутри области.

В таблице полученные значения скорости диссипации при разных числах Рейнольдса сравниваются со значениями для первичного течения. Для объяснения смысла введенных обозначений вспомним, что для характерной величины диссипации на единицу осевой длины можно ввести два значения: первое — не зависящее от коэффициента вяз-

<i>D</i>	Re					
	80	90	100	125	166	200
$D_{1t}$	0.0210	0.0221	0.0229	0.0228	0.0210	0.0193
$D_{1k}$	0.0210	0.018	0.016	0.013	0.0099	0.00829
$D_{2tv}$	1.659	1.993	2.289	2.852	3.483	3.856
$D_{2ts}$	1.660	1.9847	2.288	2.8514	3.481	3.855
$D_{2kv}$	1.659	1.659	1.659	1.659	1.659	1.659
$D_{2ks}$	1.6589	1.6589	1.6589	1.6589	1.6589	1.6589
$D_{2an}$	1,6(6)	1.6(6)	1.6(6)	1.6(6)	1.6(6)	1.6(6)

для характерной величины диссипации на единицу осевой длины можно ввести два значения: первое — не зависящее от коэффициента вязкости  $D_{r1} = u_r^3 \cdot d$  и второе — зависящее от вязкости  $D_{r2} = \nu \cdot u_r^2$ . Соответственно индексом 1 обозначены величины, обезразмеренные с помощью  $D_{r1}$ , а индексом 2 — с помощью  $D_{r2}$ . Очевидно, что  $D_1 = D_2 / \text{Re}$ . Для аналитического течения Куэтта  $D_{1an} = 1.6(6) / \text{Re}$ ,  $D_{2an} = 1.6(6)$ .

Ниже индексом *k* обозначаем величины, относящиеся к первичному течению Куэтта, индексом *t* — ко вторичному течению (вихрям Тейлора), индекс *v* означает, что рассматривается диссипация внутри области, индекс *s* — приход энергии через границу. Наряду с аналитическими решениями дифференциальных уравнений для первичного течения Куэтта, обозначаемыми индексом *an*, рассматриваем реше-

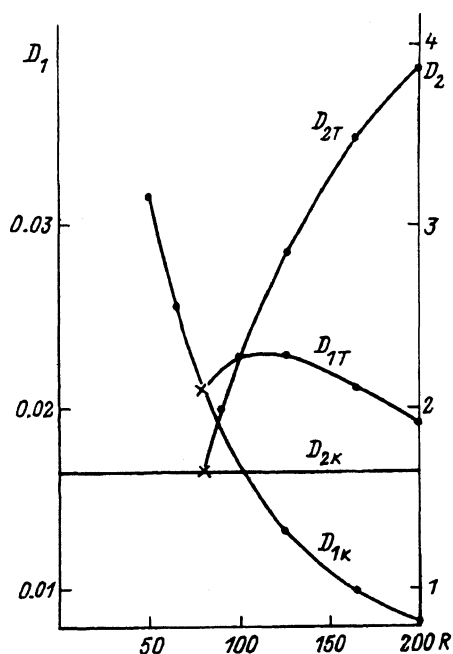


Рис. 2.

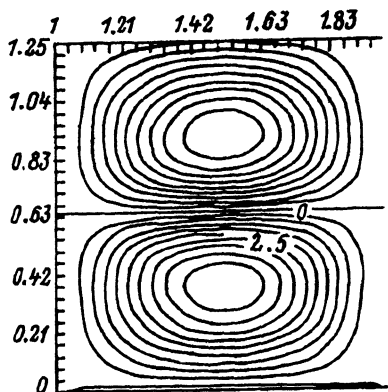


Рис. 3.

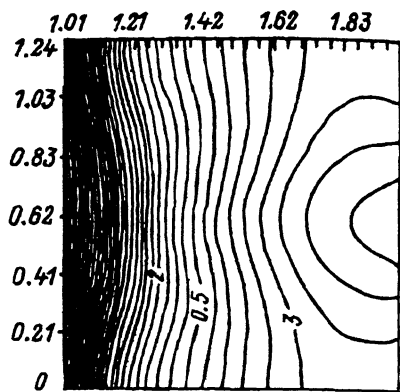


Рис. 4.

Это свидетельствует о точности расчетов и подтверждает нейтральность схемы. Данные таблицы представлены на рис. 2. Из этих данных видно, что диссипация вихрей Тейлора существенно превышает диссипацию первичного течения Куэтта. Возникающее вторичное течение достаточно интенсивное и составляет по величине  $\sim 10\%$  первичного. При увеличении числа Рейнольдса разница диссипаций увеличивается и превышает 50% для  $Re = 200$ . Как видно из графиков, точка бифуркации находится в районе  $Re = 80$ . Уже при  $Re = 90$  возникают довольно мощные вихри Тейлора и диссипация увеличивается. На рис. 3, 4 показаны соответственно функция тока вихрей Тейлора и поле давления при  $Re = 125$  и  $L = 1.25$ . Видно, что поле давления имеет симметричный вид, что свидетельствует о периодичности получаемой функции. Отметим, что расчеты при разных значениях  $Re$  и  $L$  давали одинаковую качественную структуру рассматриваемых функций.

Таким образом, в настоящей работе на основании численных расчетов показывается, что диссипация вихрей Тейлора (производство энтропии) больше, чем скорость диссипации первичного течения Куэтта, неустойчивого при данном числе Рейнольдса. Получаемый эффект значимый и существенно превосходит ошибки аппроксимации, недоитерированности или округления. Почему, на наш взгляд, можно считать, что в данном случае свойства разностных решений можно переносить на свойства дифференциальных? По ряду причин. Во-первых, числа Рейнольдса достаточно малы, так что толщина пограничного слоя  $1/\sqrt{Re} < 1/\sqrt{200} \approx 1/14$ , что существенно больше размера ячейки сетки; во-вторых, для расчетов используется схема второго порядка точности, ошибка аппроксимации которой оценивается остаточным членом разложения в ряд Тейлора и равна  $\Delta x^2/24 \approx 10^{-4}$ ; в-третьих, дискретные уравнения являются консервативными по импульсу, массе и нейтральными по энергии, т.е. обладают свойствами, аналогичными дифференциальным уравнениям; в-четвертых, порядок ошибки (невязка, дисбаланс потоков энергии) существенно меньше получаемых решений. Все это дает большую уверенность в точности получаемого результата.

В заключение авторы выражают признательность Ю.Д.Шмыглевскому за внимание к работе и полезные критические замечания.

## Список литературы

- [1] Лойцанский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
- [2] Пригожин И.Р. // Успехи физ. наук. 1980. Т. 131. № 2. С. 185–200.
- [3] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
- [4] Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.
- [5] Климонтович Ю.Л., Энгель-Херберт Х. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 3. С. 440–447.
- [6] Климонтович Ю.Л. // УФН. 1989. Т. 14. С. 631.
- [7] Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
- [8] Христов Х.И., Нартов В.П. // ДАН СССР. 1984. Т. 277. № 4. С. 315–322.
- [9] DiPrima R.C., Swinney H.L. // Hydrodynamic Instabilities Transition Turbulence. Stuttgart: Springer, 1983. P. 139–180.
- [10] Vastano J.A., Moser R.D. // J. Fluid. Mech. 1991. Vol. 233. P. 83–118.
- [11] Иванюлов Ю.П., Яковлев Г.И. // Прикл. матем. и механ. 1966. Т. 30. № 3. С. 768–779.
- [12] Юдович В.И. // Прикл. матем. и механ. 1966. Т. 30. № 3. С. 688–698.
- [13] Бабенко К.И. // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 357–370.
- [14] Афендиқов А.Л. О стационарных бифуркациях течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. Препринт ИПМ АН СССР. № 44. М., 1982.
- [15] Афендиқов А.Л., Бабенко К.И. О вихрях Тейлора. Препринт ИПМатем. АН СССР. № 3. М., 1982.
- [16] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [18] Harlow F., Welch J.E. // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 2182–2189.
- [19] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
- [20] Vanka S.P. // J. Comput. Phys. 1986. Vol. 65. С. 138–158.

Вычислительный центр  
Москва

Поступило в Редакцию  
24 марта 1993 г.