1994 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 64, N 6

01

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНСАМБЛЯ СЛУЧАЙНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Л.Г.Дубас

Излагаются частные представления о преобразовании системы отсчета. Предлагаются новые неинерциальные статистические преобразования системы координат и времени. Приводится частный вариант неинерциальной случайной системы отсчета, связанный с переходом к медленному времени. Полученные соотношения используются для оценки спектральной мощности фликкерных шумовых сигналов в лазерном ондуляторном электромагнитном излучении в одночастичном приближении.

Представления о преобразованиях системы отсчета времени и координат в динамическом пространстве–времени изложены в работе [1]. Ниже будет изложено случайное преобразование системы отсчета координат. Кроме того, будет рассмотрен частный случай лазерного ондуляторного излучения, когда допустимо приближенно одночастичное рассмотрение электронов.

Простейшим преобразованием системы отсчета пространственно-временных координат является неинерциальное детерминированное преобразование [1]. Более сложные представления связаны с неинерциальными случайными статистическими преобразованиями.

Цель работы заключается в выявлении частного примера неинерциального преобразования системы отсчета, имеющего конкретную значимость в некоторой теоретической задаче [2] и связанного с описанием статистического ансамбля единичной частицы.

Случайное преобразование системы отсчета координат может быть описано статистическим ансамблем для положения точки отсчета системы координат. Кроме того, можем иметь дело с обычным детерминированным преобразованием координат и времени.

Включение преобразований временно́й координаты может быть простейшим. Для расчетов желательно разделить представления о центре инерции ансамбля и отдельной случайной реализации. Тогда преобразование времени свяжем со статистическим центром инерции ансамбля частицы, а преобразование координат с относительным положением частицы.

Рассмотрим случайное преобразование системы координат и статистическое преобразование системы отсчета

$$t = t'' \quad x = x'' - \int u dt'',$$

$$t'' = j(t' + vx'/c^2), \quad x'' = j(x' + vt'),$$

$$j = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad v = \text{const}, \quad u \ll c, \quad u = u(t).$$

Последовательное применение этих преобразований приводит к следующему приближенному результату:

$$t = j(t' - vx'/c^2),$$

$$x = j\left(\int (1 - vu/c^2)dx' + \int (v - u)dt'\right),$$

$$y = y', \quad z = z',$$

$$G^{mn} = \begin{bmatrix} j^2/c^2, -j^2u/c^2 & \\ -j^2u/c^2, -j^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Выпишем волновое уравнение для поперечного векторного потенциала

$$j^2/c^2 \left[\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{d(udA)}{dxdt} + \frac{d(udA)}{dtdx}\right] = j^2\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{d^2A}{dy^2} + \frac{d^2A}{dz^2}. \tag{2}$$

Здесь и ниже штрихи переменных опускаются. Полученное "волновое" уравнение в частных производных является статистическим обобщением простого волнового уравнения [3].

Рассмотрим частный предельный случай, соответствующий ультрарелятивистскому варианту,

$$\frac{d(udA)}{dxdt} + \frac{d(udA)}{dtdx} = \frac{d^2A}{dt^2} - c^2\frac{d^2A}{dx^2}, \quad j \gg 1. \tag{3}$$

Таким образом, в релятивистском случае смещение волны в продольном направлении сопровождается статистической диффузией в этом направлении для движущейся системы отсчета (3).

Пусть излучающий электрон движется вместе с системой отсчета и почти не перемещается в ней в продольном направлении. Для выяснения взаимодействия электрона с ондуляторным излучением [3] воспользуемся алгоритмом расчета, аналогичным известному [2]. Причем для получения приближенного уравнения рассмотрим теорию возмущений по малому параметру u/c, ограничиваясь линейным приближением. В нулевом приближении получаем простое волновое уравнение. Следовательно, нулевое решение соответствует обыкновенному тепловому шуму [4] и лазерному излучению, развиваемому в оптическом резонаторе.

Рассмотрим дополнительное преобразование системы отсчета к медленному времени [1]

$$t' = t - x/c,$$
$$x' = x. \tag{4}$$

Тогда получаем следующее уравнение в линейном приближении:

$$2c\frac{d^2A}{dxdt} + c^2\frac{d^2A}{dx^2} = -2/c\frac{dudA}{dt^2} - \frac{d(udA)}{dxdt} - \frac{d(udA)}{dtdx}. \tag{5}$$

Выпишем уравнение для первого возмущения. Причем ограничимся плавным приближением, когда для этого решения можно пренебречь второй производной по координате,

$$2c\frac{d^2A}{dxdt} = -2c\frac{dudA}{dt^2} - \frac{d(udA)}{dxdt} - \frac{d(udA)}{dtdx}, \quad L \ll D, \tag{6}$$

где L, D — длина периода и продольный размер ондулятора.

Выписанное приближение не выполняется, если имеет место обратное (6) неравенство.

$$L > D. \tag{7}$$

Это условие является критерием неприменимости последующих расчетов.

Пусть излучение представлено волнами, движущимися со скоростью света, в соответствии с нулевым приближением для уравнения (3) и формулой (4)

$$Ao = Aa \cdot \exp(i2kx), \quad w^2 \cdot \overline{(dAa/dt)^2} \ll \overline{Aa^2}, \quad w = ck, \tag{8}$$

где w, k — круговые частота и волновое число лазерного излучения.

Рассмотрим плавное приближение (6) и приближение синхронного движения электронов и световой волны. Тогда уравнение (6) существенно упрощается и в исходной лабораторной системе имеет следующий вид:

$$c \cdot dA/dt = u \cdot E, \quad \overline{(Aa \cdot du/dt)^2} \ll \overline{(u \cdot dAa/dt)^2}, \quad E = -dAa/dt, \tag{9}$$

где E, A — электрическая напряженность теплового шума и потенциал на лазерной волне.

Средний квадрат для флуктуаций электрической напряженности, развиваемых в лазерном оптическом потоке, равен следующей величине:

$$\overline{E^2} = 4kTZ/S \cdot df, \quad f \geqslant 0, \quad df \geqslant 0, \tag{10}$$

где S — характерная площадь сечения потока, k — постоянная Больцмана, T — эффективная шумовая температура зеркал, z — волновое сопротивление вакуума, df — интервал измеряемых циклических частот.

Флуктуации скоростей электронов, излучающих в ондуляторе, определяются дробовыми шумами. Выпишем формулу для среднего квадрата эффективной флуктуации скорости электрона [5].

$$\overline{u^2} = 2 \cdot c/N \cdot df, \tag{11}$$

где N — продольная концентрация электронов, df — интервал измеряемых циклических частот.

Поскольку взаимодействие электронов и электромагнитной волны носит резонансный характер, постольку в формуле (9) следует использовать аналитические представления о шумовых сигналах в ондуляторном излучении с соответственным уменьшением действующей мощности в два раза [4].

Таким образом,результирующее решение для напряженности электрического поля определяется произведением двух аналитических белых шумовых сигналов. Соответствующая спектральная плотность определяется сверткой исходных спектральных мощностей

$$\overline{(dA/dt)^2} = 3PickTZ/(3 \cdot N)fdf \quad Pi = 3.1416. \tag{12}$$

Следовательно, результирующее решение для векторного потенциала является случайным процессом с независимыми приращениями с характерной фликкерной спектральной мощностью

$$\overline{A^2} = 2ckTZ/(Pi3N)df/f. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь функцию распределения для электромагнитного потенциала в предположении, что исходные случайные величины имеют гауссовское распределение. Результирующее распределение для произведения двух амплитуд независимых случайных величин является обобщенно экспоненциальным [6], представленным в виде интеграла по переменной $s \geqslant 0$

$$F(R) \cdot dR = \left\{ \int R/G^2 \exp(-R\mathrm{ch}(s)/G) ds \right\} \cdot dR, \tag{14}$$

где $R \geqslant 0$, $2G$ — величина и дисперсия амплитуды потенциала.

При этом распределение фазы потенциала является равномерным. В приближении больших или малых величин потенциала получаем следующую аппроксимацию:

$$F(R) = \begin{cases} R\log(G/R)/G^2, & R \leqslant 2G/\sqrt{2\log(G/R)+1}, \\ 2/G\sqrt{R/(GPi)}\exp(-R/G), & R \gg G. \end{cases} \tag{15}$$

Итак фликкерный шум в ондуляторном лазерном излучении есть негауссовский случайный процесс с обратно пропорциональной зависимостью от частоты. Полный интеграл для шумовой мощности по всем частотам расходится, однако в рассматриваемом ультрарелятивистском приближении энергия электронов также является неограниченной. Поэтому эта неопределенность должна разрешаться в неодномерном рассмотрении без предположения об ультрарелятивизме.

Рассмотрим теперь зависимость шумовой мощности излучения на низких частотах от величины тока электронов. Согласно известным представлениям [2] о коэффициенте усиления ондуляторного излучения, величина напряженности электромагнитного поля лазерного ондуляторного излучения обратно пропорциональна кубу коэффициента релятивистского увеличения массы электронов

$$Ea = E - E3AAn/\overline{p^2}, \quad \overline{A^2} \ll \overline{An^2}, \quad p = jmc, \tag{16}$$

где An, $\overline{An^2}$ — величина и средний по периоду квадрат величины векторного магнитного потенциала, создаваемого ондулятором; m — масса электрона.

Выпишем соответствующее выражение для мощности электромагнитного излучения, определяемого средним квадратом напряженности электрического поля,

$$Ps = P + Pa, \quad Pa = 9P\overline{A^2 An^2}/(\overline{p^2})^2, \tag{17}$$

где P, Pa — мощности нешумового и шумового излучений.

Поскольку мощность ондуляторного излучения пропорциональна квадрату тока электронного потока, то мощность шума в релятивистском случае пропорциональна току электронов

$$Pa = I \cdot \text{const}. \tag{18}$$

Итак, полное шумовое возмущение лазерного ондуляторного излучения при достаточной стабильности параметров электронного пучка определяется тепловыми дробовыми и фликкерными шумами. При этом фликкерный шум определяется взаимодействием теплового и дробового шумов. В одномерном ультрарелятивистском приближении фликкерный шум имеет указанное распределение со спектральной мощностью, прямо пропорциональной току электронов и обратно пропорциональной флуктуационной частоте.

Отметим, что этот результат отличается от ситуации с твердым телом, где мощность фликкерного шума, как правило, имеет более крутую, например квадратичную, зависимость от тока электронов [7].

Пусть электронный пучок случайно нестабилен, причем статистика его параметров носит дробинный характер, аналогичный дробовому шуму с гауссовским распределением и равномерным распределением спектральной мощности в области низких частот. Тогда учет этой нестабильности сводится к дополнительному увеличению эффективной мощности дробовых шумов. Также возможен учет малой в сравнении с длиной волны ондуляторного излучения шероховатости зеркал лазерного оптического резонатора путем введения эффективной шумовой температуры для теплового электромагнитного излучения.

Согласно формуле (17), мощность фликкерных шумов исчезает при отсутствии ондуляторной накачки. Также отметим в (17), что мощность фликкерного шума обратно пропорциональна четвертой степени релятивистского фактора. Поэтому для создания лазерной автогенерации с высокой стабильностью частоты целесообразно использование малых ондуляторных магнитных потенциалов и электронов с большой релятивистской энергией.

Список литературы

[1] *Дубас Л.Г.* //Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 13. С. 68–70.
[2] Генераторы когерентного излучения на свободных электронах /Под ред. А.А.Рухадзе. М.: Мир, 1983. 282 с.
[3] *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1981. 504 с.
[4] *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.

[5] *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
[6] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 832 с.
[7] Задачи физической электроники /Под ред. Н.Д.Девяткова. М.: Наука, 1982. 256 с.

Поступило в Редакцию
6 сентября 1993 г.