01;02;10;12 Журнал технической физики, т. 64, в. 5, 1994

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ НА ПУЧКАХ ЛЕНТОЧНОГО ТИПА

В.И.Радченко

Исследования процессов рассеяния частиц в ион-атомных столкновениях на малые углы ($\lesssim 10^{-4}$ рад) в силу ряда экспериментальных причин, как правило, проводятся на пучках ионов ленточного типа [1,2]. При этом теряется непосредственно информация о дифференциальном сечении $d\sigma/d\Omega$ изучаемого процесса рассеяния, поскольку для ленточного пучка формируемая в плоскости регистрации картина пространственно-углового распределения (ПУР) частиц, рассеянных в мишени t, представляет собой некоторую суперпозицию элементарных распределений вида

$$f(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}.$$

Будем рассматривать только такие процессы, для которых зависимость дифференциального сечения $d\sigma/d\Omega$ от азимутального угла φ отсутствует.

Введем в плоскости регистрации частиц систему координат (x, y) так, что ее центр совпадает с осью $\mathbf{z}$ пучка, а ось $\mathbf{x}$ перпендикулярна ленте пучка и совместно с $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ образует правую тройку векторов. Дифференциальное сечение f в координатном представлении является четной функцией x и y, так как

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{L},$$

где L — расстояние между плоскостью регистрации частиц и центром мишени.

Плотность потока частиц $j(x, y)$, описывающая их ПУР в плоскости регистрации, также является четной функцией координат. Координату y в функциональной зависимости $j(x, y)$ рассматривают как параметр, которому обычно придается нулевое значение, т.е. ПУР частиц изучают в центральной зоне ленточного пучка и обозначают $j(x) = j(x, y \equiv 0)$. Учитывая четность этих функций и удобство дальнейшего изложения, будем писать их в виде $j(x^2)$ и $f(x^2 + y^2)$, сохранив для обозначения новых функциональных зависимостей те же буквы j и f.

В работе [1] показано, что в приближении бесконечно широкого (по оси $\mathbf{y}$) и тонкого (по оси $\mathbf{x}$) ленточного пучка в режиме однократных столкновений справедливо соотношение

$$j(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + y^2) dy, \tag{1}$$

связывающее дифференциальное сечение рассеяния с функцией ПУР частиц; здесь постоянный множитель перед знаком интеграла опущен как несущественный.

Цель настоящей работы заключается в решении обратной задачи — отыскании дифференциального сечения f по измеренному распределению j. К такой постановке вопроса приводят и другие физико-технические проблемы.

Выражение (1) можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма первого рода с единичным ядром. Уравнения Фредгольма первого рода не имеют общей схемы решения и требуют для своего рассмотрения конкретизации условий задачи. В нашем случае такими условиями являются равенство единице ядра уравнения и четность функций, позволившая придать им вид $j(x^2)$ и $f(x^2+y^2)$.

Покажем, во-первых, что решение поставленной обратной задачи единственно. Действительно, пусть одному и тому же распределению $j(x^2)$ соответствуют две различные функции f_1 и f_2. Тогда должно выполняться равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f_1(x^2+y^2)-f_2(x^2+y^2)\right]\cdot dy=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x^2+y^2)\cdot dy=0. \qquad (2)$$

Но последнее равенство возможно только при $\varphi\equiv 0$, т.е. $f_1\equiv f_2$.

Для решения уравнения (1) будем использовать интегральное преобразование Фурье

$$f(x^2+y^2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\gamma)\cdot e^{i\gamma(x^2+y^2)}\cdot d\gamma, \qquad F(\gamma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-i\gamma\xi}. \qquad (3)$$

Напомним [3], что для применимости преобразования достаточно, чтобы интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|d\xi$ сходился, а функция $f(\xi)$ была кусочно-непрерывна и имела ограниченное изменение в любом конечном интервале. Переменная ξ в (3) изменяется в интервале $(-\infty,\infty)$. Однако физически сечение f определено лишь для $\xi\geqslant 0$, а с формальной точки зрения при $\xi<0$ функция $f(\xi)$ может не удовлетворять условиям применимости преобразования Фурье. В этом случае целесообразно доопределить функцию $f(\xi)$ условием $f(\xi<0)\equiv 0$.

Аналогично для функции ПУР

$$j(x^2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}J(\gamma)\cdot e^{i\gamma x^2}\cdot d\gamma, \qquad J(\gamma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}j(\xi)\cdot e^{-i\gamma\xi}\cdot d\xi. \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (1) и меняя порядок интегрирования, найдем, что

$$j(x^2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\gamma)\cdot e^{i\gamma x^2}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\gamma y^2}dy\right\}\cdot d\gamma. \qquad (5)$$

Интеграл в фигурных скобках равен

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{|\gamma|}}e^{\pm\frac{\pi}{4}i}, \qquad \begin{cases} +, & \text{если } \gamma > 0, \\ -, & \text{если } \gamma < 0. \end{cases} \tag{6}$$

При $\gamma = 0$ выражение (6) расходится, поэтому интеграл (5), вообще говоря, следует рассматривать в смысле главного значения. Чтобы избавиться от знака модуля $|\gamma|$ в (6) и придать подынтегральному выражению в (5) один и тот же аналитический вид как при $\gamma > 0$, так и при $\gamma < 0$, заметим, что для отрицательных γ можно записать $\sqrt{\gamma} = \pm i\sqrt{|\gamma|}$, поскольку операция извлечения квадратного корня из некоторого комплексного числа $z = r \cdot e^{i\varphi}$ принципиально дает двузначный результат $\sqrt{z} = \pm\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Условимся брать только “положительные” значения квадратного корня для $\gamma < 0$, т.е. $\sqrt{\gamma} = i\sqrt{|\gamma|}$. Выполнение этого условия позволяет для всех γ представить интеграл (6) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

и обеспечивает действительность функций j и f при формальном интегрировании по формулам (5) и (9) (см. ниже).

Используя этот результат в (5) и сравнивая полученное выражение с представлением (4), придем к соотношению

$$F(\gamma) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}e^{-\frac{\pi}{4}i}J(\gamma). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (3), окончательно получаем, что

$$f(x^2+y^2) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2\pi\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\gamma} \cdot J(\gamma) \cdot e^{i\gamma(x^2+y^2)}d\gamma. \tag{9}$$

Приведем простой пример. Пусть наблюдаемое распределение описывается гауссианом

$$j(x^2) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Тогда для образа этой функции $(j(\xi < 0) \equiv 0)$ из (4) найдем, что

$$J(\gamma) = \frac{A}{\frac{1}{2\sigma^2} + i\gamma}. \tag{10}$$

Подстановка образа (10) в формулу (9) и интегрирование с помощью теоремы о вычетах дают для функции f следующее выражение:

$$f(x^2+y^2) = \frac{A}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}. \tag{11}$$

Проверяя последний результат прямым интегрированием функции (11) в соответствии с уравнением (1), вернемся к исходному гауссиану для $j(x^2)$. Таким образом, если наблюдаемое распределение представляет собой гауссиан, то в условиях данной задачи дифференциальное сечение рассеяния также является гауссианом с той же дисперсией σ^2.

Для решения уравнения (1) может быть также использовано разложение функции $f(\xi)$ в формальный ряд Фурье по полной ортонормированной системе базисных функций $\varphi_k(\xi)$ на некотором интервале (a, b) переменной ξ

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\xi), \tag{12}$$

где $a_k = (f, \varphi_k)$ — коэффициенты Фурье, задаваемые скалярным произведением (f, φ_k) в функциональном пространстве $CL_2[a, b]$ [4].

Интервал (a, b) разложения функции $f(\xi)$ в ряд (12) может быть конечным или бесконечным в зависимости от того, можно в (1) положить $f(\xi) = 0$ вне соответствующего промежутка интегрирования или нет. Обычно $a = 0$ (рассеяние быстрых частиц в ион-атомных столкновениях происходит вблизи $\theta = 0$). Если b ограничено, то бесконечный интервал интегрирования в (1) можно заменить на $(-\sqrt{b}, \sqrt{b})$, а в качестве базисных функций φ_k использовать полиномы Лежандра, функции Бесселя и др.

Подставим (12) в (1) и сменим порядок суммирования и интегрирования, тогда

$$j(x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \varphi_k(x^2 + y^2) \cdot dy = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x^2). \tag{13}$$

Заметим, что разложения (12), (13) могут быть произведены не только по ортогональной, но и по любой удобной системе функций. Иногда, например, наблюдаемое распределение (13), а следовательно, и функция f с достаточной экспериментальной точностью представимы суперпозицией нескольких гауссианов с различной дисперсией.

То обстоятельство, что аргумент функций φ_k в (13) представлен в виде $x^2 + y^2$, может позволить проинтегрировать $\varphi_k(x^2 + y^2)$ по y в промежутке $(-\infty, \infty)$ даже в том случае, когда $\int_0^\infty \varphi_k(\xi) d\xi$ расходится или не существует. Это упрощает выкладки, но следует помнить, что такое расширение интервала интегрирования в (13) не должно существенным образом сказываться на величине самого интеграла.

Допустим, что коэффициенты a_k в представлении наблюдаемого распределения j рядом (13) по функциям χ_k известны. Их подстановка в ряд (12) даст выражение для искомой функции f. Если же система функций $\chi_k(\xi)$ является ортогональной системой, то a_k находятся с помощью скалярных произведений (j, χ_k).

Разложим функцию $f(\xi)$ на промежутке $[0, b]$ в тригонометрический ряд Фурье, взятый в комплексной форме, тогда

$$f(x^2+y^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0(x^2+y^2)}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{b}. \tag{14}$$

Считая b достаточно большим, так что интегрирование в (13) можно вести от $-\infty$ до ∞, получим с учетом (7)

$$j(x^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \sqrt{\frac{\pi}{k\cdot\omega_0}} e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{ik\omega_0 x^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\omega_0 x^2}, \tag{15}$$

где

$$g_k = \frac{1}{b}\int_0^b j(\xi) e^{-ik\omega_0\xi} d\xi$$

— коэффициенты Фурье функции $j(\xi)$.

Соотношение (15) связывает известные коэффициенты g_k, определяемые по наблюдаемому распределению j, с искомыми коэффициентами

$$C_k = \sqrt{\frac{k\omega_0}{\pi}} e^{-\frac{\pi}{4}i} g_k. \tag{16}$$

Обратим внимание, что всегда $C_0 = 0$ (g_0 ограничено), т.е. постоянная составляющая у функции f отсутствует, иначе бы интеграл (1) расходился. Для задач, подобных задаче о рассеянии частиц, число частиц в ПУР принципиально конечно, поэтому $g_0 \equiv 0$.

Благодаря (14) и (16), решение уравнения (1) при $(x^2+y^2) \in [0, b]$ приобретает следующий вид:

$$f(x^2+y^2) = e^{-\frac{\pi}{4}i} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{k\omega_0}{\pi}} g_k e^{ik\omega_0(x^2+y^2)}. \tag{17}$$

Возвратимся, наконец, к первоначальной угловой зависимости искомой функции

$$f(\theta) = e^{-\frac{\pi}{4}i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{k\omega_0}{\pi}} g_k e^{ik\omega_0 L^2 \cdot \mathrm{tg}^2\theta}. \tag{18}$$

Переход к переменной θ в представлении (9) осуществляется аналогично.

Формулы (8), (9) и (16), (17) схожи между собой, что является естественным следствием использования интеграла и ряда Фурье соответственно для представления функций f и j.

Таким образом, результаты настоящей работы и работ [1,5] позволяют вычислить дифференциальное сечение рассеяния f по измеренному в реальном эксперименте ПУР. Для этого необходимо произвести редукцию измеренного ПУР к идеальному прибору [5], т.е. получить наблюдаемое распределение j в приближении бесконечно широкой и тонкой ленты пучка, связанное с сечением f для достаточно тонкой мишени уравнением (1), и воспользоваться методикой решения этого уравнения, предложенной в данной работе.

Список литературы

[1] *Радченко В.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 4. С. 132–134.
[2] *Ведьманов Г.Д., Козлов В.П., Кудрявцев В.Н.* и др. // ПТЭ. 1989. № 2. С. 47–50.
[3] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 768 с.
[4] *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 384 с.
[5] *Раутиан С.Г.* // УФН. 1958. Т. 66. № 3. С. 475–517.

Уральский политехнический институт
Екатеринбург

Поступило в Редакцию
6 октября 1992 г.

---

07 *Журнал технической физики, т. 64, в. 5, 1994*

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ НА ОПТИКУ СРЕДЫ

А.И.Ванин

Структура и поверхностные характеристики мелкодисперсных включений оказывают существенное влияние на оптические характеристики сред [1]. Задача данной работы — прояснить роль поверхностных слоев сферических частиц в формировании оптики материала с такими частицами. Примером среды с мелкодисперсными включениями может быть пленка TeO_x (нестехиометрического состава), в матрице TeO_2 которой имеются примерно сферические частицы Te, находящиеся в зависимости от скорости охлаждения в кристаллической или аморфной фазе, что проявляется в спектре среды [2]. Легирующие добавки, которые используются для достижения требуемых оптических и механических характеристик материала, на наш взгляд, преимущественно садятся на частицы Te. Эти атомы и атомы Te и матрицы, которые не коллективизированы в объемную фазу, могут образовывать поверхностный адсорбционный слой на частицах. Мы не ставим задачей описание оптических характеристик пленок TeO_x, это только пример среды, на который мы ориентируемся.

Рассматривается среда с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_m(\omega)$, в которой имеются частицы сферической формы, материал которых имеет диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$; частицы имеют поверхностный слой. Атомы поверхностного слоя описываются поляризуемостями $\alpha_k(\omega)$ (индекс k отмечает сорт атома). Поляризуемость малых частиц (значительно меньших длины волны) в среде вычисляется аналогично [3] и имеет следующий вид:

$$A(\omega) = R^3 \operatorname{tg} K(\omega)/2 + A_0(\omega) \Big/ \left[\cos^2 K(\omega) \left(1 - \sqrt{2}\, A_0(\omega) \operatorname{tg} K(\omega)/R^3\right)\right], \quad (1)$$

где $A_0(\omega)$ — поляризуемость частицы без поверхностного слоя (R — радиус частицы) в приближении однородного по толщине