

07

©1994 г.

САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ

В.В. Прудский

Рассмотрено взаимодействие электромагнитного излучения с нелинейной оптической средой, содержащей атомы двух сортов, описываемых в рамках двухуровневой модели. В приближении слабой нелинейности одной из компонент показана принципиальная возможность существования в системе уединенных электромагнитных импульсов огибающей. Если дисперсионные эффекты несущественны, то стабилизация волны происходит как за счет перевода газа в состояние инверсной заселенностью уровней, так и за счет нелинейной расфазировки между электрическим полем и поляризацией. В условиях существования дисперсии решения в виде уединенных импульсов реализуются при условии согласования периодов нелинейных колебаний для поля и поляризации среды и возможны для дискретного набора значений групповой скорости волны.

Введение

Эффект самоиндуцированной прозрачности ^[1,2] вызывает интерес в связи с возможностью распространения в среде, представляющей собой газ двухуровневых атомов, незатухающих волновых пакетов. Их характерной особенностью являются интенсивный энергообмен с атомами активного вещества и существенное уменьшение групповой скорости по сравнению со скоростью света. Анализ этого эффекта с точки зрения общей теории солитонов был проведен в ^[3]. В работах ^[4,5] были получены решения в виде электромагнитных солитонов огибающей для парамагнитных (мазерных) сред, во многом аналогичные ^[1].

Однако ситуация усложняется, если среда содержит атомы двух сортов. Взаимодействие электромагнитного излучения при этом происходит как с одной, так и с другой подсистемами. В настоящей работе рассматривается вопрос о возможности существования солитонных решений в двухкомпонентной оптической среде. Для некоторого упрощения задачи мы ограничились приближением слабой (нерезонансной) нелинейности одной из компонент. Как показано ниже, в такой системе возможно существование ряда решений в виде уединенных волн, отличных по своим характеристикам от известных решений Мак-Колла и Хана ^[1].

Исходные уравнения

Распространение электромагнитной волны в нелинейной оптической системе, содержащей два сорта атомов, описывается самосогласованной системой уравнений, состоящей из максвелловских уравнений и уравнений для поляризации среды, моделирующих каждую из компонент в рамках двухуровневого приближения [6],

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \Omega_1^2 P_1 = \frac{2d_1}{\hbar} \left[(N_1 d_1 \Omega_1)^2 - \Omega_1^2 |P_1|^2 - \left| \frac{\partial P_1}{\partial t} \right|^2 \right]^{1/2} E,$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} + \Omega_2^2 P_2 = \frac{2d_2}{\hbar} \left[(N_2 d_2 \Omega_2)^2 - \Omega_2^2 |P_2|^2 - \left| \frac{\partial P_2}{\partial t} \right|^2 \right]^{1/2} E, \quad (1)$$

где $D = E + 4\pi(P_1 + P_2)$, N и d — плотность и дипольный момент атомов, $\Omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ — частота перехода, индексы относятся соответственно к первой и второй компонентам.

Пусть волна распространяется вдоль оси z . Будем искать решения системы (1) в виде плоских волн с медленно меняющимися амплитудами

$$H_y - iH_x = E_x + iE_y = N_1 d_1 \varepsilon(z, t) \exp i(\omega t - kz),$$

$$P_{1x} + iP_{1y} = N_1 d_1 a_1(z, t) \exp i(\omega t - kz),$$

$$P_{2x} + iP_{2y} = N_2 d_2 a_2(z, t) \exp i(\omega t - kz). \quad (2)$$

После подстановки (2) в (1) и усредняя по высокочастотному периоду получим следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} - 2i \left(n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) + (1 - n^2) \varepsilon + 4\pi a_1 = \\ = 4\pi \frac{N_2 d_2}{N_1 d_1} \left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial \tau^2} + 2i \frac{\partial a_2}{\partial \tau} - a_2 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$2i \frac{\partial a_1}{\partial \tau} + \delta a_1 = \frac{q_1}{4\pi} (1 - |a_1|^2)^{1/2} \varepsilon, \quad (4)$$

$$\nu \frac{\partial^2 a_2}{\partial \tau^2} + 2i\nu \frac{\partial a_2}{\partial \tau} + \Delta a_2 = \frac{q_{12}}{4\pi} (1 - |a_2|^2)^{1/2} \varepsilon, \quad (5)$$

где $\tau = \omega t$, $\xi = \omega z/c$, $\delta = (\Omega_1^2 - \omega^2)/\Omega_1^2$, $\Delta = (\Omega_2^2 - \omega^2)/\Omega_2^2$, $\nu = \omega^2/\Omega_2^2$, $q_1 = 8\pi N_1 d_1^2/\hbar \Omega_1$, $q_{12} = 8\pi N_1 d_1 d_2/\hbar \Omega_2$.

При выводе (3)–(5) мы предположили, что нелинейность первой подсистемы является сильной: $\partial a_1/\partial \tau \sim \delta a_1$. Считая нелинейность другой подсистемы малой

$$\frac{\partial a_2}{\partial \tau} \ll \Delta a_2, \quad (6)$$

представим приближенное решение (5) в виде

$$a_2 = \frac{q_{12}}{4\pi\Delta} \left[1 - \frac{2i\nu}{\Delta} \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\nu}{\Delta} \left(1 + \frac{4\nu}{\Delta} \right) \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{q_{12}^2}{32\pi^2\Delta^2} |\varepsilon|^2 \right] \varepsilon. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (3) и опуская производные третьего порядка и выше, а также переходя к переменной $\zeta = \xi - \beta\tau$, $v = \beta c$ (групповая скорость волны), получим нелинейную систему уравнений в полных производных для электромагнитных волн в двухкомпонентной оптической системе

$$-\gamma\varepsilon'' + in \left(1 - \frac{\beta}{\beta_g} \right) \varepsilon' + (\alpha - \kappa|\varepsilon|^2) \varepsilon = 2\pi a, \quad (8)$$

$$-2i\beta a' + \delta a = \frac{q_1}{4\pi} (1 - |a|^2)^{1/2} \varepsilon, \quad (9)$$

индекс резонансной компоненты опущен, $\alpha = (n^2 - 1 - q_2/\Delta)/2$, $2\gamma = 1 - \beta^2 [1 + q_2(1 + 4\nu/\Delta)/\Delta^2]$, $\kappa = -q_2 q_{12}^2 / 64\pi^2 \Delta^3$, $\beta_g = n [1 + q_2/\Delta^2]^{-1}$, $q_2 = 8\pi N_2 d_2^2 / \hbar \Omega_2$.

В отсутствие нерезонансных атомов (см.(6)) система (8), (9) описывает оптические солитоны

$$\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{ch}^{-1}(\zeta/\Lambda),$$

$$\Lambda = \frac{16\pi\beta}{q_1\varepsilon_m}, \quad n_2 = 1 + \frac{q_1}{\delta} (1 + \mu_1^2)^{-1}, \quad \mu_1 = \frac{q_1\varepsilon_m}{8\pi\delta},$$

$$\beta = \frac{n}{1 + \frac{q_1}{\delta^2} (1 + \mu_1^2)^{-1}}. \quad (10)$$

Если $q_1 = 0$ и отсутствует резонансная компонента, то (8), (9) имеет еще одно солитонное решение

$$\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{ch}^{-1}(\zeta/\Lambda),$$

$$\Lambda = \left(\frac{k\beta'_g}{\beta_g \kappa \varepsilon_m^2} \right)^{1/2}, \quad n^2 = 1 + \frac{q_2}{\Delta} (1 - \mu_2^2), \quad \mu_2 = \frac{q_{12}\varepsilon_m}{8\pi\Delta}, \quad \beta = \beta_g. \quad (11)$$

Здесь $k\beta'_g/2\beta_g = \gamma$, $\beta'_g = d\beta_g/dk$. Заметим, что выражение (11) допускает предельный переход к случаю $N_1 d_1 = 0$, поскольку величины $q_{12}\varepsilon_m$ и $\kappa\varepsilon_m^2$, согласно (2), не зависят от $N_1 d_1$.

Согласно уравнению (8), решение (11) является чисто действительным и существует благодаря взаимной компенсации эффектов нелинейности и дисперсии. Как известно, при помощи аналогичного механизма образуются ленгмюровские солитоны в нелинейной плазме [7]. В нашем случае однако волна является поперечной, а роль силы Миллера выполняет нелинейная добавка к показателю преломления оптической среды.

Уединенные волны без дисперсии

Поскольку точное решение системы (8), (9) в общем виде затруднительно, то рассмотрим ситуацию, когда расстройка по групповым скоростям $\beta - \beta_g$ не слишком мала и старшая производная в (8), учитывающая эффекты дисперсии, может быть опущена. Полагая $\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\varphi}$, $a = |a|e^{i\vartheta}$ и подставляя в (8), (9), после разделения реальной и мнимой части будем иметь

$$\varepsilon' = -\frac{2\pi\beta_g}{n(\beta_g - \beta)} a \sin \chi, \quad (12)$$

$$a' = -\frac{q_1}{8\pi\beta} (1 - a^2)^{1/2} \varepsilon \sin \chi, \quad (13)$$

$$\chi' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \operatorname{ctg} \chi + \frac{a'}{a} \operatorname{ctg} \chi - \frac{\kappa\beta_g}{n(\beta_g - \beta)} \varepsilon^2 + \frac{\delta}{\beta}, \quad (14)$$

$\chi = \varphi - \vartheta$, знак модуля опущен.

При получении (14) использовано условие линейного несплывания фаз

$$\frac{1}{2} n \delta (\beta_g - \beta) = \alpha \beta \beta_g. \quad (15)$$

Используя интегралы системы (12)–(14)

$$a^2 = \frac{\varepsilon^2}{Q} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4Q}\right), \quad Q = \frac{16\pi^2\beta\beta_g}{q_1 n(\beta_g - \beta)}, \quad (16)$$

$$a \sin \chi = \rho \varepsilon - \frac{\kappa}{8\pi} \varepsilon^3, \quad \rho = \frac{n\delta(\beta_g - \beta)}{4\pi\beta\beta_g}, \quad (17)$$

придем к уравнению первого порядка

$$\varepsilon' = -\frac{1}{\lambda} \varepsilon \left[\frac{1}{Q} - \rho^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{\kappa\rho}{\pi} \right) \varepsilon^2 - \frac{\kappa^2}{64\pi^2} \varepsilon^4 \right]^{1/2}, \quad (18)$$

$$\lambda = 2\beta\rho/\delta.$$

Приравнивая к нулю подкоренное выражение, получим нелинейный знак дисперсии

$$1 - Y - Y\mu_1^2 - v^2 - \frac{v^4}{4Y} = 0, \quad (19)$$

$Y = \delta(n^2 - 1 - q_2/\Delta)/q_1$, $v^2 = q_2\delta\mu_2^2/q_1\Delta$, обобщающий (10) на случай наличия нерезонансного газа.

Игнорируя (18) при $\delta = 0$, получим солитонное решение в виде

$$\varepsilon = \left[\frac{8Q}{1 + \sqrt{1 + Q^3 \kappa^2 / \pi^2} \operatorname{ch}(2\zeta/\lambda)} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Решение (20) получено при учете совместного действия двух нелинейных эффектов: механизма самоиндуцированной прозрачности [1] и

расфазировки между полем и поляризацией вследствие возникновения дополнительного квадратичного по полю слагаемого, обусловленного нерезонансной нелинейностью газа.

Если параметр $Q^3 \kappa^2 / \pi^2 \ll 1$, то определяющей является нелинейность резонансного газа и мы имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{ch}^{-1}(\zeta/\lambda), \quad \varepsilon_m = 2\sqrt{Q}. \quad (21)$$

В противоположном случае $Q^3 \kappa^2 / \pi^2 \gg 1$ резонансная среда остается линейной, а формирование солитона обусловлено действием нерезонансной нелинейности

$$\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{ch}^{-1/2}(2\zeta/\lambda), \quad \varepsilon_m = \left(\frac{64\pi^2}{Q\kappa^2} \right)^{1/4}. \quad (22)$$

Учет дисперсионных эффектов

Формула (20) является асимптотической и справедлива, когда роль первого слагаемого в (8) незначительна. Однако если коэффициент при первой производной поля $\beta_g - \beta$ (см.(8)) мал, то необходимо учитывать дисперсионные эффекты. Относительная роль этих эффектов определяется величиной параметра $\gamma\beta_g/(\beta_g - \beta)$. Если $\gamma\beta_g/(\beta_g - \beta) \ll 1$, то справедливо рассмотрение предыдущего раздела. Для изучения решений (8), (9) в случае $\gamma\beta_g/(\beta_g - \beta) \sim 1$ положим

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (23)$$

и представим (8), (9) в виде двух уравнений второго порядка для комплексных амплитуд

$$-\gamma\varepsilon_1'' + (\alpha_1 - \kappa|\varepsilon_1|^2)\varepsilon_1 = 0 \quad (24)$$

$$in \left(1 - \frac{\beta}{\beta_g} \right) \varepsilon_2' + \alpha_2 \varepsilon_2 = 2\pi a,$$

$$-2i\beta a' + \delta a = \frac{q_1}{4\pi} (1 - |a|^2)^{1/2} \varepsilon_2, \quad (25)$$

каждое из которых имеет солитонное решение, совпадающее по виду с (10) и (11). Решая их, находим

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_{m1}^2, \quad \Lambda_1^2 = \frac{2\gamma}{\kappa \varepsilon_{m1}^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{q_1}{\delta} \left(1 + \frac{q_1^2 \varepsilon_{m2}^2}{64\pi^2 \delta^2} \right)^{-1}, \quad \Lambda_2 = \frac{16\pi\beta}{q_1 \varepsilon_{m2}}. \quad (26)$$

Отметим, что в отличие от (10) решение уравнения (24) существует при произвольных β , а его значение определяется (25). Исключая

промежуточные параметры α_1 и α_2 , получим выражение для β и нелинейное дисперсионное уравнение

$$\beta = n \left[1 + \frac{q_2}{\Delta^2} + \frac{q_1}{\delta^2} (1 + \mu_1^2)^{-1} \right]^{-1},$$

$$n^2 = 1 + \frac{q_1}{\delta} (1 + \mu_1^2)^{-1} + \frac{q_2}{\Delta} (1 - \mu_2^2). \quad (27)$$

Ясно, что полученные решения удовлетворяют исходной системе уравнений, если $\varepsilon_{m1} = \varepsilon_{m2} = \varepsilon_m$ и $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$. Из последнего равенства следует дополнительное ограничение на групповую скорость

$$\beta = \left[1 + \frac{q_2}{\Delta^2} \left(1 + \frac{4\nu}{\Delta} + \frac{q_2^2}{4\Delta q_1^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (28)$$

которое является условием согласования действия двух нелинейных механизмов.

Решение (26) является частным; более общее исследование задачи возможно лишь численными методами. Для численного интегрирования систему (8), (9) удобно переписать в виде

$$-\gamma_1 X'' + \gamma_1 X'(\varphi')^2 - X\varphi' + \sigma X - \kappa_1 X^3 = \sin \Psi \cos \chi, \quad (29)$$

$$-2\gamma_1 X'\varphi' - \gamma_1 X\varphi'' + X' = -\sin \Psi \sin \chi, \quad (30)$$

$$\Psi' = -X \sin \chi, \quad (31)$$

$$\vartheta' = X \operatorname{ctg} \Psi \cos \chi - \delta_1 \quad (32)$$

$X = \varepsilon Q^{-1/2}$, $\sin \Psi = a$, $\gamma_1 = \gamma [q_1 \beta_g^3 / 4\beta n^3 (\beta_g - \beta)^3]^{1/2}$, $\sigma = \alpha Q^{1/2} / 2\pi$, $\kappa_1 = \kappa Q^{3/2} / 2\pi$, $\delta_1 = \delta Q^{1/2} n / 4\pi$, штрихом обозначена производная по $\zeta_1 = [q_1 \beta_g / 4n\beta (\beta_g - \beta)]^{1/2} \zeta$.

Отметим, что при $\gamma_1 = 0$ система (29)–(32) совпадает с (12)–(14).

Исследование уравнений (29)–(32) проводилось с целью обнаружения решений в виде уединенных волн. Были выбраны параметры $\kappa_1 = 10$, $\delta_1 = 0.5$, $\sigma = \gamma_1 \delta_+^2 + \delta_1$, (условие линейного несплывания фаз), $\delta_+^2 = 1 - \delta_1^2$. Начальные данные задавались $X = 10^{-4}$, $X' = \delta_+ X$, $a = -X \sin \chi / \delta_+$, $\varphi = \varphi' = 0$, $\vartheta = -\arctg(-\delta_+ / \delta_1)$.

Точность численных расчетов контролировалась с помощью интеграла системы (29)–(32)

$$W = 2\gamma_1 X^2 \varphi' - X^2 - 2(1 - \cos \Psi). \quad (33)$$

Решения в виде уединенных волн были получены для следующих значений γ_1 : 1.623000, 1.857536, 2.421360, 3.035191, 3.376707, 3.716232, 4.563777, 5.914151, 6.446298, 9.930321, 11.509169, 20, 36.655839, 79.7443936, 102.110092, которые соответствуют волнам с отношениями периодов колебаний поля к периодам колебаний поляризации 9/2, 13/3, 4/1, 11/3,

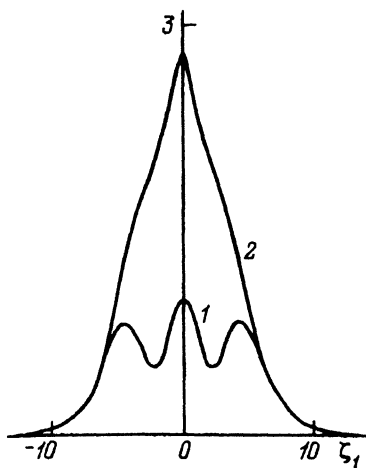


Рис. 1. Форма волны 3/1.

$\gamma_1 = 4.563777$; 1 — зависимость $X(\zeta_1)$,
2 — зависимость $\Psi(\zeta_1)$.

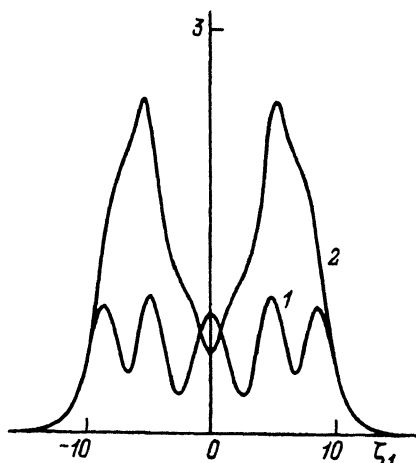


Рис. 2. Форма волны 5/2.

$\gamma_1 = 5.914151$; 1 — зависимость $X(\zeta_1)$,
2 — зависимость $\Psi(\zeta_1)$.

7/2, 10/3, 3/1, 5/2, 7/3, 5/3, 3/2, 1/1, 3/4, 1/2, 3/7. На рис. 1 и 2 представлен вид характерных решений для поля и поляризации.

Существование решений в виде уединенных волн обусловлено кратностью отношения периодов нелинейных колебаний поля и поляризации среды и возможно для дискретного набора значений параметра γ_1 . Как показывают численные расчеты, волна вида 1/1 (см. (26)) является частным решением (29)–(32). Согласно (28), подобное решение реализуется для некоторого фиксированного значения групповой скорости β . Аналогично этому можно определить групповую скорость каждого из полученных импульсов, используя выражение для γ_1 и его численное значение. Таким образом, можно сделать вывод, что существует набор групповых скоростей β , для которых электромагнитная волна в дисперсной двухкомпонентной среде имеет вид уединенной.

Отметим, что решения в виде уединенных волн в системе, характеризующей совместным действием двух колебательных механизмов, были обнаружены для ультрарелятивистского электронного пучка в нелинейной плазме [8].

Основные выводы

Проведенное выше исследование иллюстрирует возможность распространения в нелинейной оптической двухкомпонентной среде уединенных импульсов электромагнитного поля.

В случае когда дисперсия незначительна, нелинейными механизмами, ограничивающими амплитуду поля, являются механизм самоиндуцированной прозрачности и расфазировка между полем и поляризацией вещества. Согласно первому механизму, в голове импульса атомы переходят в инвертированное состояние, на хвосте происходит обратный процесс перекачки внутренней энергии вещества в энергию поля, так что после прохождения волны среда возвращается в первоначальное невозбужденное состояние. Вследствие же нелинейного изменения разности фаз между электрическим полем и поляризацией поглощение

волны сменяется не ее усиление, в то время как полная инверсия газа не достигнута.

В условиях кода на формирование волны оказывают влияние эффекты дисперсии, решения в виде уединенных импульсов возможны для дискретных значений групповой скорости β и реализуются при условии согласования двух колебательных процессов (24) и (25).

В заключение отметим, что результаты настоящей работы получены при пренебрежении релаксационными процессами в двухуровневом газе и, следовательно, справедливы для достаточно коротких импульсов.

Список литературы

- [1] *McCull S.L., Hahn E.L.* // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 183. P 457-477.
- [2] *Полужтов И.А., Попов Ю.М., Ройтберг В.С.* // *УФН.* 1974. Т. 114. № 1. С. 97-131.
- [3] *Красовицкий Д.В.* // *ЖТФ.* 1984. Т. 54. Вып. 9. С. 1798-1800.
- [4] *Бачин И.В., Красовицкий Д.В.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1987. Т. 30. № 1. С. 117-119.
- [5] *Бачин И.В., Красовицкий Д.В.* // *УФЖ.* 1987. Т. 32. № 6. С. 840-844.
- [6] *Пантел Р., Путтор Ф.Г.* *Основы квантовой электроники.* М.: Мир, 1972. 384 с.
- [7] *Горев В.В., Кингсен А.С., Рудаков Л.И.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1976. Т. 19. № 5-6. С. 691-720.
- [8] *Дорофеевко В.Г., Красовицкий В.Б., Фомин Г.В.* // *ЖЭТФ.* 1990. Т. 98. Вып. 2. С. 419-433.

Ростовский университет

Поступило в Редакцию
9 декабря 1992 г.
В окончательной редакции
28 июня 1993 г.