

01

©1994 г.

**НОВАЯ КВАЗИТРЕХМЕРНАЯ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ
ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА
СКИН-ЭФФЕКТА И ВИХРЕВЫХ ТОКОВ
В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДНИКАХ**

С. В. Юферев, В. С. Юферев

Для расчета диффузии поля в симметричных системах протяженных параллельных проводников произвольного сечения (трехмерная постановка) получена и проанализирована новая интегро-дифференциальная формулировка метода граничных интегральных уравнений, содержащая только двумерные ядра интегральных операторов и отличающаяся от уравнения соответствующей плоской задачи наличием дополнительного слагаемого. Показано, что вклад этого слагаемого, отражающего неоднородность распределения потенциала по длине проводников вследствие их конечности, существен лишь на малых расстояниях (порядка долей диаметра) от торцов проводника. Построенная формулировка позволяет в несколько раз сократить затраты ресурсов ЭВМ по сравнению со стандартными методами решения интегральных уравнений по поверхности проводников.

Введение

Задача расчета скин-эффекта и вихревых токов в длинных параллельных проводниках постоянного сечения обычно рассматривается в плоской постановке (бесконечные проводники) и в формулировке метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) [1] содержит интегралы только по контурам сечений проводников [2-4]. Однако такое приближение корректно только для очень длинных проводников, и, кроме того, в ряде практических приложений необходимо учитывать пространственное расположение источников возбуждения поля. Потребность в подобных расчетах возникает, например, при проектировании плазменных ускорителей и устройств на магнитной подушке [5-7], что вынуждает решать сложную трехмерную задачу с интегрированием по поверхности многосвязной области. С другой стороны, если отношение характерного размера поперечного сечения и масштаба изменения параметров магнитного поля вдоль направляющей проводника остается в течение импульса много меньше единицы (малый

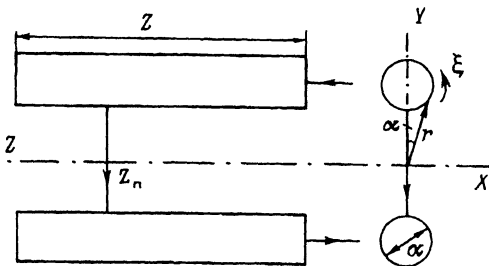


Рис. 1. Пример рассматриваемой системы двух проводников круглого сечения

параметр), то представляется возможным использовать для решения указанной задачи метод асимптотических разложений. Предполагается, что это позволит трансформировать исходное интегральное уравнение в интегро-дифференциальное, содержащее уже, как и в двумерном случае, только контурные интегралы.

Вывод основного уравнения и граничных условий

Рассмотрим систему k длинных параллельных проводников конечной длины постоянного сечения, соединенных линейными токопроводами с источником тока силой $I(t)$. Выберем неподвижную декартову систему координат таким образом, что оси OX и OY лежат в плоскости сечений проводников, а ось OZ параллельна направляющей проводников. Пусть система удовлетворяет условию симметрии относительно координатных осей OX и OY (простейший пример такой системы приведен на рис. 1), причем распределение тока в проводниках симметрично относительно одной из этих осей и антисимметрично относительно другой (для картины тока в системе, изображенной на рис. 1, осью симметрии является ось OY , осью антисимметрии — OX).

В работах [8,9] показано, что распределение скалярного потенциала магнитного поля $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ вдоль поверхности проводников для случая малой глубины проникновения поля в проводник описывается интегральным уравнением следующего вида:

$$c(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{j=1}^K \int_{S_j} \phi(\mathbf{r}', t) \frac{\partial G^{(3)}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}'} ds' = \sum_{j=1}^K \int_{S_j} X(\mathbf{r}', t) G^{(3)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) ds', \quad (1)$$

где X — известная функция, S_j — площадь поверхности j -го проводника, $G^{(3)}$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в объеме диэлектрика

$$G^{(3)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = (4\pi)^{-1} / |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|. \quad (2)$$

Интеграл в левой части уравнения (1) складывается из интегралов по торцам и боковым поверхностям проводников. В рассматриваемых системах распределение скалярного потенциала симметрично относительно оси антисимметрии распределения тока, и наоборот. Для системы, приведенной на рис. 1, это условие имеет вид

$$\phi(-x, y, z) = \phi(x, y, z), \quad \phi(x, -y, z) = -\phi(x, y, z).$$

С учетом последних выражений запишем интеграл по боковой поверхности проводника в виде

$$\sum_{j=1}^K \int_{S_j} \phi \frac{\partial G^{(3)}}{\partial \mathbf{n}'} ds' = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \int_L (-1)^{k+1} d\xi' \int_{z_1}^{z_2} \phi(\xi', z') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R_k^{(3)}} \right) dz', \quad (3)$$

где суммирование ведется по четвертям XY -координатной плоскости, L — общий путь интегрирования, включающий все контура сечений проводников, расположенных в одной четверти, ξ — контурная координата (для определенности условимся ξ считать непрерывной и обегаяющей все контуры сечений проводников последовательно); z_1, z_2 — координаты торцов проводника, а функции $R_k^{(3)}$ вычисляются следующим образом:

$$R_k^{(3)}(\xi', \xi, z', z) = \left((z' - z)^2 + R_k^{(2)}(\xi', \xi) \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь $R_k^{(2)}(\xi', \xi)$ есть расстояния между точкой ξ , пробегающей в силу симметрии только часть пути L , расположенную в первой четверти XY -плоскости, и точками ξ' , лежащими соответственно в первой, второй, третьей и четвертой четвертях. Для вычисления этих расстояний введем функцию радиуса-вектора контура сечения проводника в плоскости XY , обозначив ее $r(\xi)$, а также функцию угла между радиусом-вектором и одной из координатных осей (OY) $\alpha(\xi)$ (рис. 1). Форма сечения однозначно определяется этими функциями, поэтому, считая их известными (заданными), будем иметь:

$$a_1 = R_1^2(\xi', \xi) = r(\xi)^2 + r(\xi')^2 - 2r(\xi)r(\xi') \cos(\alpha(\xi') - \alpha(\xi)), \quad (5A)$$

$$a_2 = R_2^2(\xi', \xi) = r(\xi)^2 + r(\xi')^2 - 2r(\xi)r(\xi') \cos(\alpha(\xi') + \alpha(\xi)), \quad (5B)$$

$$a_3 = R_3^2(\xi', \xi) = r(\xi)^2 + r(\xi')^2 + 2r(\xi)r(\xi') \cos(\alpha(\xi') - \alpha(\xi)), \quad (5C)$$

$$a_4 = R_4^2(\xi', \xi) = r(\xi)^2 + r(\xi')^2 + 2r(\xi)r(\xi') \cos(\alpha(\xi') + \alpha(\xi)). \quad (5D)$$

Дифференцируя функции $1/R^{(3)}$ по нормали к боковой поверхности проводника и подставляя затем результат в (3), получим

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \int_L (-1)^{k+1} d\xi' \int_{z_1}^{z_2} \frac{b_k \phi(\xi', z') dz'}{\left((z' - z)^2 + a_k(\xi', \xi) \right)^{3/2}}, \quad (6)$$

где функции $b_k(\xi', \xi) = \partial a_k / \partial \mathbf{n}'$ находятся непосредственно из (5A)–(5D)

$$b_1 = 2 \left(r' \frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} - r \left(\frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} \cos(\alpha' - \alpha) - r' \sin(\alpha' - \alpha) \frac{\partial \alpha'}{\partial \mathbf{n}'} \right) \right), \quad (7A)$$

$$b_2 = 2 \left(r' \frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} - r \left(\frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} \cos(\alpha' + \alpha) - r' \sin(\alpha' + \alpha) \frac{\partial \alpha'}{\partial \mathbf{n}'} \right) \right), \quad (7B)$$

$$b_3 = 2 \left(r' \frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} + r \left(\frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} \cos(\alpha' - \alpha) - r' \sin(\alpha' - \alpha) \frac{\partial \alpha'}{\partial \mathbf{n}'} \right) \right), \quad (7C)$$

$$b_4 = 2 \left(r' \frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} + r \left(\frac{\partial r'}{\partial \mathbf{n}'} \cos(\alpha' + \alpha) - r' \sin(\alpha' + \alpha) \frac{\partial \alpha'}{\partial \mathbf{n}'} \right) \right). \quad (7D)$$

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштаба для ξ и z характерный размер поперечного сечения \mathcal{L} и масштаб изменения параметров магнитного поля вдоль направляющей проводника \mathcal{Z} соответственно. При этом интеграл (6) примет вид

$$\frac{1}{4\pi\beta} \sum_{k=1}^4 \int_L (-1)^{k+1} b_k d\xi' \int_{z_1}^{z_2} \frac{\phi(\xi', z') dz'}{\left(\frac{z' - z}{\beta} \right)^2 + a_k (\xi', \xi)^{3/2}}, \quad (8)$$

где $\beta = \mathcal{L}/\mathcal{Z}$ — малый параметр.

Внутренний интеграл в (8) представим в виде асимптотического ряда по параметру β . Применяя методику, использовавшуюся в работе [10] и пренебрегая членами порядка $0(\beta^3)$ и выше, получаем асимптотику

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\phi dz'}{\left[\left(\frac{z - z'}{\beta} \right)^2 + a_k \right]^{3/2}} = \sum_{n=0}^2 \frac{\beta^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{z - z'}{\beta} \right)^n \frac{dz'}{\left[\left(\frac{z - z'}{\beta} \right)^2 + a_k \right]^{3/2}}. \quad (9)$$

Произведя несложные аналитические вычисления интегралов и подставив полученные результаты в (8), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_L \phi d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{b_k}{a_k} \left(\frac{z - z_1}{((z - z_1)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2}} + \frac{z_2 - z}{((z_2 - z)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2}} \right) - \\ & \frac{\beta^2}{4\pi} \int_L \frac{\partial \phi}{\partial z} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k \cdot \left(\frac{1}{((z_2 - z)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2}} - \frac{1}{((z - z_1)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2}} \right) - \\ & - \frac{\beta^2}{8\pi} \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k \ln a_k - \frac{\beta^2}{4\pi} \ln \beta \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k - \\ & \frac{\beta^2}{8\pi} \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k \left(\frac{z - z_1}{((z - z_1)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2}} + \frac{z_2 - z}{((z_2 - z)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2}} \right) + \\ & + \frac{\beta^2}{8\pi} \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k \ln \left(\left(z - z_1 + ((z - z_1)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(z_2 - z + ((z_2 - z)^2 + \beta^2 a_k)^{1/2} \right) \right). \quad (10) \end{aligned}$$

Совершая под знаком интеграла предельный переход $\beta \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_L \phi d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{b_k}{a_k} - \frac{\beta^2}{4\pi} \int_L \frac{\partial \phi}{\partial z} \left(\frac{1}{z_2 - z} - \frac{1}{z - z_1} \right) d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k - \\ & - \frac{\beta^2}{8\pi} \int_4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k \ln a_k - \frac{\beta^2}{4\pi} \ln \beta \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k - \\ & - \frac{\beta^2}{8\pi} \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k + \frac{\beta^2}{8\pi} \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \ln(4(z_2 - z)(z - z_1)) d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k. \end{aligned}$$

Из выражений (7A)-(7D) следует, что, вследствие симметрии

$$\sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k = 0. \quad (11)$$

Подставляя (11) в предыдущее выражение, окончательно запишем

$$\frac{1}{4\pi} \int_L \phi d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{b_k}{a_k} - \frac{\beta^2}{8\pi} \int_L \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} d\xi' \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k \ln a_k + 0(\beta^3). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь интеграл по торцам проводников. В этом случае направление нормали к поверхности совпадает с осью OZ и интеграл (3) принимает вид

$$\sum_{j=1}^K \int_{S_j} \phi \frac{\partial G^{(3)}}{\partial \mathbf{n}'} ds' = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^K \int_{S_j} ds' \phi(s') \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{z^t - z}{((z^t - z)^2 + a_k(s', s))^{3/2}},$$

где z^t принимает значения z_1 или z_2 .

Переходя в полученном интеграле к безразмерным переменным, запишем

$$\frac{z^t - z}{4\pi\beta} \sum_{j=1}^K \int_{S_j} ds' \phi \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{1}{\left(\left(\frac{z^t - z}{\beta} \right)^2 + a_k \right)^{3/2}}. \quad (13)$$

Сделаем оценку величины этого интеграла. В зависимости от близости расположения к торцу точки наблюдения возможны следующие случаи: 1) $|z^t - z| \sim \beta$ — точка наблюдения находится вблизи торца. Переходя к переменной $y = (z^t - z)/\beta$, нетрудно видеть, что интеграл в этом случае имеет порядок $0(1)$ (без учета симметрий).

2) $|z^t - z| \gg \beta$ — точка наблюдения находится далеко от торца. Введем функцию $f(z)$ как

$$f(z) = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^{k+1}}{\left(\left(\frac{z^t - z}{\beta} \right)^2 + a_k \right)^{3/2}}. \quad (14)$$

Выделяя в (14) малый параметр $\beta^2 a_k (z^t - z)^{-2}$ и раскладывая $f(z)$ в ряд по его степеням, получим

$$f(z) = \beta^2 (z^t - z)^{-3} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{3}{2} \beta^2 a_k (z^t - z)^{-2} + 0(\beta^4) \right).$$

Из выражений (5A)–(5D) непосредственно следует, что

$$\sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} a_k = 0.$$

Поэтому при суммировании по четвертям первые два члена разложения обращаются в нуль вследствие симметрии, поэтому $f(z)$ и весь интеграл (13) имеют порядок $0(\beta^6)$.

Следовательно, влияние торцов проводника сказывается только в узкой приторцевой области, а при удалении от них в уравнении (1) можно оставить только интегро-дифференциальный оператор (12), имеющий погрешность $0(\beta^3)$. Несложно показать, что

$$\frac{b_k}{a_k} = 4\pi \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \mathbf{n}'},$$

где $G^{(2)}$ есть фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа в свободном пространстве

$$G^{(2)}(\xi', \xi) = -(2\pi)^{-1} \ln |\mathbf{r}(\xi') - \mathbf{r}(\xi)|. \quad (15)$$

Поэтому интегральное уравнение (1), описывающее распределение скалярного потенциала вдоль поверхности проводников, с точностью до членов порядка $0(\beta^2)$ можно представить в виде

$$c(\xi)\phi(\xi, z) + \sum_{j=1}^K \int_{L_j} \phi(\xi', z) \frac{\partial G^{(2)}(\xi', \xi)}{\partial \mathbf{n}(\xi')} d\xi' - \\ - \frac{\beta^2}{2\pi} \sum_{j=1}^K \int \frac{\partial^2 \phi(\xi', z)}{\partial z^2} \frac{\partial R(\xi', \xi)}{\partial \mathbf{n}(\xi')} R(\xi', \xi) \ln R(\xi', \xi) d\xi' = P^{(3)}(\xi, z), \quad (16)$$

где $P^{(3)} = P^{(3)}(\xi, z)$ — трехмерная известная правая часть.

Полученное выражение отличается от левой части соответствующей плоской задачи наличием третьего слагаемого. Подчеркнем, что (16) не содержит координат торцов z_1 и z_2 .

Поскольку уравнение (16) является интегро-дифференциальным, то для его решения необходимо задать граничные условия по переменной z . Эти условия можно получить, полагая в (10) $z = z_1$ или $z = z_2$ и повторяя все последующие операции. В результате, пренебрегая членами порядка $0(\beta^3)$, имеем

$$c\phi \Big|_{z=z^t} + \sum_{j=1}^K \int_{L_j} \phi \Big|_{z=z^t} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} d\xi' - \frac{\beta}{4\pi} \sum_{j=1}^K \int_{L_j} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=z^t} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{n}} d\xi' = P^{(3)} \Big|_{z=z^t}, \quad (17)$$

где $\phi|_{z^t} = \phi(\xi, z^t)$; $t = 1, 2$.

Таким образом, для симметричной системы длинных параллельных проводников конечной длины постоянного сечения вместо стандартного интегрального уравнения, в котором интегрирование проводится по поверхности проводников, мы получили интегро-дифференциальное уравнение (16), содержащее только контурные интегралы и отличающееся от плоской формулировки наличием дополнительного слагаемого.

Анализ уравнения и метод решения

Представим уравнение (16) в виде

$$c(\xi)\phi(\xi, z) + \int_L K^0(\xi, \xi')\phi(\xi', z)d\xi' - \beta^2 \int_L K^2(\xi, \xi') \frac{\partial^2 \phi(\xi', z)}{\partial z^2} d\xi' = P(\xi, z), \quad (18)$$

где введены обозначения

$$K^0(\xi, \xi') = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{b_k}{a_k},$$

$$K^2(\xi, \xi') = \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} b_k \ln a_k,$$

а суммирование опять проводится по четвертям. Проводя в (18) дискретизацию по ξ , получим

$$\Delta\xi \sum_{j=1}^{N\xi} \tilde{K}_{ij}^0 \phi_j(z) - \beta^2 \Delta\xi \sum_{j=1}^{N\xi} K_{ij}^2 \frac{\partial^2 \phi_j(z)}{\partial z^2} = P_i(z), \quad i = 1, \dots, N\xi, \quad (19)$$

где

$$\tilde{K}_{ij}^0 = \begin{cases} K_{ij}^0 + c_i/(\Delta\xi), & \text{если } i = j, \\ K_{ij}^0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

а $N\xi$ — число разбиений контура L .

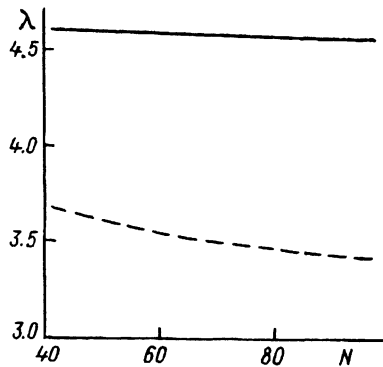


Рис. 2. Зависимость минимального собственного числа пары параллельных проводников круглого (сплошная линия) и квадратного (штриховая) сечений от числа узлов (N) контура.

$r/d = 1$, где r — диаметр или сторона, d — расстояние между проводниками.

Прежде чем проводить дискретизацию по z , отметим, что, как легко видеть, общее решение уравнения (19) имеет вид

$$\phi_i(z) = s_i \exp(-\lambda_i z/\beta), \quad (20)$$

где s_i — численные коэффициенты, являющиеся функциями точки контура, а λ_i — собственные числа матрицы $(K^2)^{-1} \tilde{K}^0$.

Решение (20) описывает неоднородность распределения потенциала по длине проводника вследствие влияния фактора конечности длины проводников, а наименьшее собственное число λ_{\min} определяет степень этого влияния. Отметим, что собственные числа зависят только от конфигурации контуров сечений проводников, но не от их длины. На рис. 2 графически изображены зависимости $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(\Delta\xi)$ для пары параллельных проводников круглого и квадратного сечений. Хорошо видно, что при $\Delta\xi \rightarrow 0$ кривые имеют асимптоты. Расчеты показали, что для большинства систем проводников минимальные собственные числа лежат в интервале 1–10. Следовательно, функция (20) существенно отлична от нуля только на малых расстояниях (порядка долей диаметра) от торцов. На рис. 3 для пары проводников круглого сечения представлена зависимость $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(d)$, где d — расстояние между проводниками. Из графика следует, что с увеличением d (и, следовательно, с уменьшением взаимного влияния полей токов в проводниках друг на друга) область влияния торцов расширяется, и в предельных случаях λ_{\min} отличаются на порядок.

Таким образом, решение плоской задачи определения наименьшего собственного числа матрицы $(K^2)^{-1} \tilde{K}^0$ позволяет для конкретной

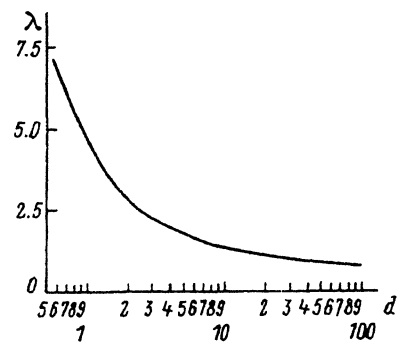


Рис. 3. Зависимость минимального собственного числа пары параллельных проводников круглого сечения от расстояния между ними, измеряемого в диаметрах сечения.

системы проводников оценить целесообразность учета в левой части уравнения (16) третьего слагаемого, содержащего малый параметр.

Дискретизация (19) по z дает

$$\Delta\xi \sum_{j=1}^{N\xi} \tilde{K}_{ij}^0 \phi_{mj} - \frac{\Delta\xi}{(\Delta z)^2} \sum_{j=1}^{N\xi} K_{ij}^2 (\phi_{m-1,j} - 2\phi_{mj} + \phi_{m+1,j}) = P_{mi},$$

$$m = 2 \dots Nz - 1, \quad i = 1 \dots N\xi, \quad (21)$$

где Nz — число разбиений по длине проводника.

Произведя перегруппировку членов в (21) и переходя к векторной форме записи, окончательно получим

$$\mathbf{A} \cdot \phi_{m-1} + \mathbf{B} \cdot \phi_m + \mathbf{A} \cdot \phi_{m+1} = \mathbf{P}, \quad m = 2 \dots Nz - 1, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{A}_{ij} = -\frac{\Delta\xi}{(\Delta z)^2} K_{ij}^2,$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{\Delta\xi}{(\Delta z)^2} \left((\Delta z)^2 \tilde{K}_{ij}^0 + 2K_{ij}^2 \right),$$

$$\phi_m = (\phi_{m1}, \phi_{m2}, \dots, \phi_{m, N\xi}),$$

$$\mathbf{P}_m = (P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{m, N\xi}).$$

Произведя аналогичные операции с граничными условиями (17), после несложных преобразований имеем

$$\mathbf{C} \cdot \phi_1 + \mathbf{D} \cdot \phi_2 = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{C} \cdot \phi_{N1} + \mathbf{D} \cdot \phi_{N1-1} = \mathbf{P}_{N1}, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{C}_{ij} = -\frac{\Delta\xi}{\Delta z} \left(\Delta z \tilde{K}_{ij}^0 + K_{ij}^1 \right), \quad \mathbf{D}_{ij} = -\frac{\Delta\xi}{\Delta z} K_{ij}^1,$$

$$K^1(\xi', \xi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{b_k}{a_k^{1/2}}.$$

Уравнение (22) с граничными условиями (23) естественно решать стандартным методом матричной прогонки [11].

В заключение сравним затраты оперативной памяти при решении трехмерной задачи в стандартной формулировке МГИУ и посредством уравнения (16). При решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса используемая матрица имеет порядок $N\xi \times Nz$, а в схему матричной прогонки для данной задачи входят $(Nz + 4)$ матрицы порядка $N\xi$. Следовательно, изложенная формулировка позволяет снизить затраты оперативной памяти приблизительно в $(Nz)^2 / (Nz + 4)$ раз. Если в (16) положить $\beta = 0$, то указанный выигрыш будет $(Nz)^2$.

Тестирование алгоритма численной реализации построенной формулировки проводилось посредством сравнения с результатами решения модельных задач, полученными с помощью стандартного МГИУ. Для этого была выбрана задача расчета распределения скалярного потенциала и компонент вектора поверхностной плотности тока для пары параллельных проводников конечной длины постоянного сечения. Проводники соединяются в цепь посредством линейных токопроводов, подведенных к торцам проводников. С одной стороны токопроводы подключаются к источнику тока, расположенному вдали от проводников и не оказывающему на них влияния, а с другой замыкаются перемычкой, расстояние от которой до торцов проводников $h = z_n - z_T$ является параметром задачи.

На рис. 4, а, б приведены распределения обеих компонент поверхностной плотности тока вдоль оси z в точке контура $\xi = 0$ для положения перемычки между торцами ($z_n - z_T < 0$, рис. 1). Перемычка соприкасается с проводниками в точке, имеющей также нулевое значение контурной координаты. Показаны кривые, полученные посредством стандартного МГИУ в трехмерной постановке, построенной квазитрехмерной формулировки МГИУ, а также стандартным МГИУ в приближении бесконечно длинных проводников (двумерная постановка). Хорошо видно, что даже в этом, наиболее "опасном" случае построенная формулировка качественно верно описывает картину тока и обладает несомненными преимуществами по сравнению с плоским приближением.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена задача расчета распределения скалярного потенциала магнитного поля по поверхности симметричной в каждой плоскости сечений системы длинных параллельных проводников произвольной формы с пространственно расположенными

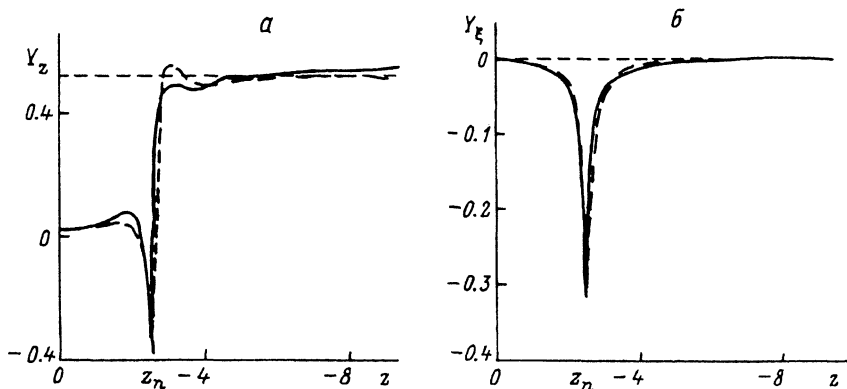


Рис. 4. Распределение продольной (а) и поперечной (б) координат поверхностной плотности тока вдоль оси z в точке контура $\xi = 0$ для пары параллельных проводников круглого сечения при перемычке, расположенной между торцами. Сплошные кривые — стандартный МГИУ в пространственной постановке, штриховые — квазитрехмерная формулировка, пунктир — стандартный МГИУ в плоской постановке.

источниками возбуждения поля (трехмерная постановка). Показано, что если характерный размер поперечного сечения проводников существенно меньше масштаба их длины, то исходное интегральное уравнение по поверхности проводников, полученное методом граничных интегральных уравнений, можно преобразовать посредством асимптотических методов в интегро-дифференциальное, содержащее уже только интегралы по контурам сечений проводников и отличающееся от соответствующей плоской задачи наличием дополнительного слагаемого. Вклад этого слагаемого, отражающего неоднородность распределения потенциала по длине проводников вследствие их конечности, существен лишь на малых расстояниях от торцов проводника. Полученное уравнение решено методом матричной прогонки, что позволяет на порядок снизить затраты ресурсов ЭВМ по сравнению с методами, обычно используемыми для решения интегральных уравнений.

Список литературы

- [1] *Brebbia C.A., Telles J.S.F., Wrobel L.C.* Boundary Element Techniques. Springer Verlag, 1984. 466 с.
- [2] *Rucker W.M., Richter K.R.* // IEEE Trans. on Magn. 1983. Vol. 19. N 6. P. 2429–2432.
- [3] *Meng H.Lean* // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 57. N 8. P. 3844–3846.
- [4] *Юферев С.В., Юферев В.С.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 11. С. 21–27.
- [5] *Rodger D., Leonard P.J., Eastham J.F.* // IEEE Trans. on Magn. 1991. Vol. 27. N 1. P. 314–317.
- [6] *Niikura S., Kameary A.* // IEEE Trans. on Magn. 1992. Vol. 28. N 2. P. 1450–1453.
- [7] *Tsuchimoto M., Yamashita A., Hashimoto M. et al.* // IEEE Trans. on Magn. 1992. Vol. 28. N 2. P. 1434–1437.
- [8] *Nicolas A.* // IEEE Trans. on Magn. 1988. Vol. 24. N 1. P. 130–133.
- [9] *Yuferev S.V.* // Proc. 5th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation. 1992. Harvey Mudd College (Claremont, USA), 1992.
- [10] *Тихонов А.Н., Самарский А.А., Арсеньев А.А.* // ЖВМиМФ. 1972. Т. 12. № 4. С. 1005–1012.
- [11] *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе РАН
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
8 апреля 1993 г.