

## ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ $N$ ОДИНАКОВЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ БАРЬЕРОВ

© Н.Л. Чуприков

Сибирский физико-технический институт  
при Томском государственном университете,  
634050 Томск, Россия.

(Получена 3 февраля 1995 г. Принята к печати 16 мая 1995 г.)

В рамках метода матрицы переноса, предложенного нами ранее, получены и исследованы аналитические выражения для коэффициента прохождения и временных параметров туннелирования, описывающих рассеяние электрона на одномерной ограниченной сверхрешетке. Исследована связь задачи рассеяния с задачей об энергетическом спектре бесконечной сверхрешетки. Показано, что все области пропускания, где сосредоточены резонансы, являются одновременно разрешенными зонами энергии в спектральной задаче для бесконечной сверхрешетки. Обратное утверждение в общем случае неверно. Выделено три типа областей пропускания, различающихся по числу резонансов. Показано, что параметры туннелирования для полупограничной сверхрешетки имеют почти всюду в области пропускания неограниченные производные по энергии.

### 1. Введение

Задача о прохождении электрона через одномерную систему  $N$  одинаковых потенциальных барьеров является простейшей моделью (в рамках метода эффективной массы) поперечного электронного транспорта в ограниченных полупроводниковых решетках и сверхрешетках. Обычно (см., например, [1]) для ее решения используются численные методы. Аналитическое решение задачи для произвольного  $N$  было проведено в некоторых частных случаях: для  $\delta$ -потенциалов [2] и для прямоугольных потенциальных барьеров [3] (см. также [4]). В общем виде эта задача рассматривалась в работе [5]. Здесь дан вывод и проведен анализ аналитического выражения для коэффициента прохождения, показана связь задачи туннелирования с задачей об энергетическом спектре бесконечной сверхрешетки.

Следует заметить, что метод, аналогичный методам [4,5], уже давно (см., например, [6], а также [7]) применяется для решения задачи о прохождении плоской монохроматической волны через  $N$ -слойные

периодические среды (оптико-механическая аналогия). Как в оптической, так и в электронной задачах используется известное [8] свойство унимодулярных матриц, благодаря которому характеристики  $N$ -периодической структуры удается выразить через характеристики одного периода с помощью полиномов Чебышева 2-го рода.

В данной работе исходная задача решается в рамках метода матрицы переноса, предложенного нами ранее [9-11]. Этот метод, на наш взгляд, более удобен для исследования электронного транспорта в ограниченных периодических структурах, чем методы, используемые в работах [4,5]. В предлагаемом подходе вычисление параметров туннелирования тесно увязывается с вычислением волновой функции. При этом существенно используется известная теорема Флоке [12]. Это позволяет уточнить некоторые результаты работы [5] и более наглядно продемонстрировать связь между однобарьерной и многобарьерной задачами, а также между задачей туннелирования и спектральной задачей для бесконечной сверхрешетки. Особое внимание уделяется здесь анализу свойств временных параметров туннелирования, а также проблеме отражения электрона от полуограниченной сверхрешетки, что осталось за рамками исследования [5].

## 2. Сшитое общее решение уравнения Шредингера

Пусть дано уравнение Шредингера

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \Psi = 0, \quad (1)$$

где  $V(x) = v(x - a_j)$ , если  $x \in (a_j, b_j)$ ; иначе  $V(x) = 0$ ;  $a_j = a_1 + (j - 1)D$ ,  $b_j = b_1 + (j - 1)D$ ;  $j = 1, \dots, N$ ;  $a_1 < b_1$ ;  $D$  — период потенциала;  $m = \text{const}$ ,  $E > 0$ . Здесь  $v(x)$  — некоторая гладкая функция. Требуется найти решение уравнения (1), непрерывное вместе с первой производной по  $x$ , в интервале  $(b_0, a_{N+1})$ ;  $b_0 < a_1$ ,  $b_N + l < a_{N+1}$ .

Пусть

$$\Psi(x) = A_0^{(+)} \exp(i\kappa_0 x) + A_0^{(-)} \exp(-i\kappa_0 x) \quad (2)$$

— общее решение уравнения (1) в области  $(b_0, a_1)$ ;  $\kappa_0 = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$ . Тогда в соответствии с методом [9-11] решение в других областях запишется в виде

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_0^{(+)} G_{\{1,j\}}^*(x) + A_0^{(-)} G_{\{1,j\}}(x); & x \in (a_j, b_j); \\ A_0^{(+)} H_{\{1,j\}}^*(x) + A_0^{(-)} H_{\{1,j\}}(x); & x \in (b_j, a_{j+1}); \end{cases} \quad (3)$$

где

$$G_{\{1,j\}}(x) = q_{\{1,j\}}(x) \exp(-i\kappa_0 x) - p_{\{1,j\}}(x) \exp(i\kappa_0 x); \quad (4)$$

$$H_{\{1,j\}}(x) = q_{\{1,j\}} \exp(-i\kappa_0 x) - p_{\{1,j\}} \exp(i\kappa_0 x); \quad (5)$$

$q_{\{1,j\}}(x)$  и  $p_{\{1,j\}}(x)$  — элементы многобарьерной матрицы переноса (МП)  $Y_{\{1,j\}}(x)$  (см. Приложение), описывающей усеченную систему потенциальных барьеров, расположенную в интервале  $(a_1, x)$ , где

$x \in (a_j, b_j)$ ;  $j = 1, \dots, N$ ; здесь и далее аргумент функции  $Y_{\{1,j\}}(x)$  опускается, если  $x = b_j$ . Заметить, что МП для одинаковых барьеров различны (в отличие от матриц, используемых в [4-7]), поскольку содержат информацию о положении барьеров в системе.

Выражения (2)–(5) совместно с рекуррентными соотношениями (П1)–(П5) (см. Приложение) для МП дают общее решение уравнения (1) для любой одномерной системы потенциальных барьеров. При этом рекуррентные соотношения являются связующим звеном между однобарьерной и многобарьерной задачами. Покажем, что в случае одинаковых барьеров эта связь существенно упрощается.

Запишем общее решение уравнения (1) в виде

$$\Psi(x) = A_0^{(+)} \mathcal{E}^*(x) + A_0^{(-)} \mathcal{E}(x), \quad (6)$$

где  $\mathcal{E}(x)$  — непрерывная вместе со своей первой производной по  $x$  функция, которая определяется выражениями (2)–(5). Согласно теореме Флоке [12], в области периодичности потенциала  $V(x)$  (точнее, в интервале  $(b_1, b_N + l)$ , где  $l = a_2 - b_1$ ) существует фундаментальная система решений, которые удовлетворяют условию

$$\Psi(x) = \alpha \cdot \Psi(x - D), \quad (7)$$

где  $\alpha$  — некоторая константа. Чтобы найти их, достаточно построить сначала функции, удовлетворяющие этому условию лишь в интервале  $(b_1, a_2)$ . Если все барьеры одинаковы, то полученные таким образом функции будут удовлетворять условию (7) во всей области периодичности потенциала. Используя (6), легко показать, что искомого решения существуют, если коэффициенты  $A_0^{(+)}$ ,  $A_0^{(-)}$  и параметр  $\alpha$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{A_0^{(-)}}{A_0^{(+)}} = \frac{\tilde{q}_1^* - \alpha}{\tilde{p}_1} = \frac{\tilde{p}_1^*}{\tilde{q}_1 - \alpha}, \quad (8)$$

где  $\tilde{q}_1 = q_1 \exp(-i\kappa_0 D)$ ,  $\tilde{p}_1 = p_1 \exp(i\kappa_0 D)$ .

Уравнения (8) имеют два независимых решения, которые можно записать в виде

$$A_0^{(+)} = \tilde{q}_1 - \alpha, \quad A_0^{(-)} = \tilde{p}_1^*, \quad (9)$$

$$A_0^{(+)} = \tilde{p}_1, \quad A_0^{(-)} = \tilde{q}_1^* - \alpha^{-1}, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \text{sign}(u)e^\varphi, \quad \varphi = \text{arcch}(u), & \text{если } |u| > 1; \\ e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arccos(u), & \text{если } |u| \leq 1; \end{cases} \quad (11)$$

$$u = 2\text{Re}(\tilde{q}_1) = \cos(\tilde{J}_1)T_1^{-1/2}; \quad (12)$$

$\tilde{J}_1 = J_1 + \kappa_0 l$ ; заметим, что в выражение (12) входят только те величины, которые одинаковы для всех барьеров. Фаза  $\varphi$  для  $|u| \leq 1$  должна находиться на комплексной плоскости в одной четверти с фазой  $\tilde{J}_1$ .

Такой выбор обеспечивает правильное предельное поведение функции в пустой решетке ( $\max |v(x)| \rightarrow 0$ ). При этом  $\varphi/D \rightarrow \kappa_0 + 2k\pi$ , где  $k$  — некоторое целое число.

Таким образом, решения, обладающие свойством (7), можно записать в виде (см. (6))

$$B_1(x) = (\tilde{q}_1 - a)\mathcal{E}^*(x) + \tilde{p}_1^*\mathcal{E}(x), \quad (13)$$

$$B_2(x) = \tilde{p}_1\mathcal{E}^*(x) + (\tilde{q}_1^* - a^{-1})\mathcal{E}(x). \quad (14)$$

Если  $|u| \leq 1$ , то  $B_2(x) \equiv B_1^*(x)$ .

Решения (13), (14) можно также записать в виде

$$B_{1,2}(x) = \alpha^{\pm x/D} \cdot \mathcal{U}_{1,2}(x), \quad (15)$$

где  $\mathcal{U}_{1,2}(x)$  — периодические (с периодом  $D$ ) функции в интервале  $(a_1, b_N + l)$ . Т.е. в области периодичности потенциала функции  $B(x)$  и  $B_2(x)$  — блоховские функции.

### 3. Общие соотношения для параметров туннелирования ограниченных сверхрешеток

Из условия (7) следует, что

$$B_1(x) = \alpha^{+N} \cdot B_1(x - ND), \quad B_2(x) = \alpha^{-N} \cdot B_2(x - ND) \quad \text{для } \forall x \in (b_N, b_N + l). \quad (16)$$

Но с другой стороны, решения в интервалах  $b_0, a_1$  и  $(b_N, a_{N+1})$  связаны МП  $Y_{\{1,N\}}$  (см. выражения (2)–(5)). Таким образом, функции  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$  в интервале  $(b_N, b_{N+1} + l)$  можно записать как в терминах параметра  $\alpha$ , так и в терминах МП  $Y_{\{1,N\}}$ . В результате получаем уравнения для элементов матрицы  $Y_{\{1,N\}}$ , которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\tilde{q}_{\{1,N\}}^* - \alpha^{\pm N})(\tilde{q}_1 - \alpha^{\pm 1}) - \tilde{p}_{\{1,N\}}\tilde{q}_1^* &= 0, \\ -\tilde{p}_{\{1,N\}}^*(\tilde{q}_1 - \alpha^{\pm 1}) + (\tilde{q}_{\{1,N\}} - \alpha^{\pm N})\tilde{p}_1^* &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $q_{\{1,N\}} = q_{\{1,N\}} \exp(-iN\kappa_0 D)$ ,  $\tilde{p}_{\{1,N\}} = p_{\{1,N\}} \exp(iN\kappa_0 D)$ . Можно показать, что уравнения (17) эквивалентны двум независимым соотношениям

$$\tilde{p}_{\{1,N\}} = \Omega_N \tilde{p}_1, \quad \text{Re}(\tilde{q}_{\{1,N\}}) = \theta_N, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_N &= \frac{\sin(N\varphi)}{\sin(\varphi)}, \quad \theta_N = \cos(N\varphi), \quad \text{если } |u| \leq 1; \\ \Omega_N &= \frac{\text{sh}(N\varphi)}{\text{sh}(\varphi)}, \quad \theta_N = \text{sign}(u) \text{ch}(N\varphi), \quad \text{если } |u| > 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношений (18), (19) следует, что

$$T_{\{1,N\}} = (1 + \rho\Omega_N^2)^{-1}, \quad (20)$$

$$F_{\{1,N\}} = \begin{cases} F_1, & \text{если } \Omega_N \geq 0, \\ F_1 + \pi, & \text{если } \Omega_N < 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$\tilde{J}_{1,N} = \arccos \left( T_{\{1,N\}}^{1/2} \cdot \theta_N, \right) \quad (22)$$

где  $\tilde{J}_{\{1,N\}} = J_{\{1,N\}} + \kappa_0 l$ ,  $\rho = R_1/T_1$ ; легко убедиться в том, что неравенство  $|T_{\{1,N\}}^{1/2} \cdot \theta_N| \leq 1$  выполняется всегда. Соотношения (20)–(22) обращаются в тождества при  $N = 1$ . При этом фаза  $\tilde{J}_{1,N}$  должна совпадать с фазой  $\tilde{J}_1$ . Для определения знака  $\sin(\tilde{J}_{\{1,N\}})$  удобно использовать соотношение

$$\sin(\tilde{J}_{\{1,N\}}) = (T_{\{1,N\}}/T_1)^{1/2} \Omega_N \sin(\tilde{J}_1),$$

которое следует из (22). Если  $|u| \leq 1$ , то  $\text{sign}(\sin(\tilde{J}_{\{1,N\}})) = \text{sign}(\sin(N\varphi))$  если  $|u| > 1$ , то  $\text{sign}(\sin(\tilde{J}_{\{1,N\}})) = \text{sign}(\sin(\tilde{J}_1))$ .

«Фазовое» время прохождения  $t_{\{1,N\}}$  и «фазовое» время отражения  $t_{\{1,N\}}^{(-)}$  ( $t_{\{1,N\}}^{(+)}$ ) для волны, падающей слева (справа), можно определить по формулам (см. [13])

$$t_{\{1,N\}} = \hbar J'_{\{1,N\}}, \quad t_{\{1,N\}}^{(\mp)} = t_{\{1,N\}} \mp \hbar F'_{\{1,N\}} \quad (23)$$

здесь и далее обозначена производная по  $E$ .

Заметим, что слово «фазовое» в общепринятом названии (см. [14]), на наш взгляд, используется не совсем удачно. Временные параметры (23) описывают динамику волнового пакета, а не отдельной волны. Здесь более уместно было бы название «групповое время прохождения (отражения)» по аналогии с групповой скоростью волнового пакета.

Из выражений (21) следует, что  $F'_{\{1,N\}}(E) \equiv F'_1(E)$ , т.е. разница  $t_{\{1,N\}}^{(\mp)} - t_{\{1,N\}}$  для  $N$  одинаковых барьеров такая же, как и для одного барьера. Поэтому здесь достаточно исследовать лишь свойства времени прохождения. В дальнейшем более удобно рассматривать время  $\tilde{t}_{\{1,N\}}$  ( $\tilde{t}_{\{1,N\}} = \hbar \tilde{J}'_{\{1,N\}}$ ), которое необходимо волновому пакету, чтобы пройти ровно  $N$  периодов сверхрешетки. Очевидно,  $t_{\{1,N\}} = \tilde{t}_{\{1,N\}} - t_0$ , где  $t_0 = \hbar \kappa'_0 l$  — время прохождения межбарьерного участка.

Явное выражение для  $\tilde{J}'_{\{1,N\}}$  можно получить, если учесть в (23) соотношение (22). Для  $|u| > 1$  имеем

$$\tilde{J}'_{\{1,N\}} = \left[ T_{\{1,N\}} \theta_N (\rho \Omega'_N + \rho' \Omega_N / 2) - \text{sign}(u) N \varphi' \text{sh}(\varphi) \right] \sqrt{T_1 / \sin(\tilde{J}_1)},$$

$$\Omega'_N = \varphi' (N \cdot \text{ch}(N\varphi) - \Omega_N \text{ch}(\varphi)) / \text{sh}(\varphi). \quad (24)$$

Соответствующее выражение для  $|u| \leq 1$  удобно записать в виде

$$\tilde{J}'_{\{1,N\}} = T_{\{1,N\}} (NC\varphi' + A\theta_N \Omega_N), \quad (25)$$

где

$$C = (1 + \rho \cdot \sin^{-2}(\varphi))^{1/2} \quad (26)$$

(очевидно,  $C \geq T_1^{-1}$ );

$$A = \frac{T_1^{1/2}}{\sin(\varphi) \sin(\tilde{J}_1)} \left( 1/2\rho' \sin(\varphi) - \rho\varphi' \cos(\varphi) \right).$$

В обоих случаях  $\rho' = -T_1' T_1^{-2}$ ;

$$\varphi' = n \left[ \tilde{J}_1' \sin(\tilde{J}_1) + \frac{1}{2} \ln'(T_1) \cos(\tilde{J}_1) \right] \cdot |T_1 \cos^2(\tilde{J}_1)|^{-1/2} \quad (27)$$

$n = \text{sign}(\sin(\tilde{J}_1))$ , если  $|u| \leq 1$ ;  $n = -\text{sign}(u)$ , если  $|u| > 1$ .

Значения энергии, в которых выполняется уравнение  $\sin(\tilde{J}_1) = 0$ , расположены только в тех областях, где  $|u| > 1$ . Можно показать, что функция  $\tilde{J}'_{\{1,N\}}(E)$  имеет в этих точках устранимую особенность. Это касается также точек, где  $|u| = 1$ .

#### 4. Области пропускания и непропускания

Свойства одноэлектронного транспорта в ограниченных периодических структурах существенно зависят от значения параметра  $u$ . Нетрудно убедиться в том, что все резонансы расположены только в тех областях значений энергии, где  $|u| \leq 1$ . В дальнейшем области энергии, где выполняется это условие, будем называть областями пропускания (ОП). В противном случае — областями непропускания (ОНП).

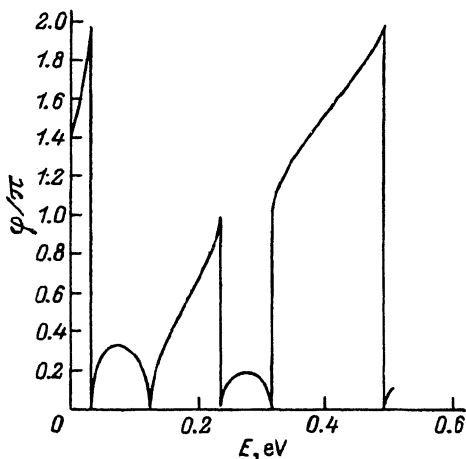
В работе [5] было показано, что в ОП имеется ровно  $N - 1$  резонансных значений энергии. Однако это утверждение требует уточнения.

Действительно, как следует из выражения (20), резонансными значениями энергии для исследуемой системы являются нули функции  $\Omega_N(E)$  в ОП и однобарьерные резонансы, где  $R_1(E) = 0$ . Причем однобарьерные резонансы обязательно попадают в ОП, поскольку условие  $|u| \leq 1$  в этих точках заведомо выполняется. В дальнейшем ОП, которые не содержат однобарьерные резонансы, будем называть областями 1-го типа. В противном случае — областями 2-го типа.

Для всех ОП 1-го типа, левая граница которых не совпадает с точкой  $E = 0$ , число резонансов равно  $N - 1$ , т.е. равно числу нулей функции  $\Omega_N(E)$  (именно этот случай и был рассмотрен в [5]). В ОП 2-го типа к ним добавляется однобарьерный резонанс. Однако здесь нужно иметь в виду, что положение однобарьерного резонанса на энергетической шкале в отличие от остальных резонансов не зависит от  $N$ . Для структур специального вида одобарьерный резонанс может совпадать с одним из нулей функции  $\Omega_N(E)$ . Таким образом, число резонансов в ОП 2-го типа может быть равно как  $N$ , так и  $N - 1$ .

Особо следует рассмотреть периодические структуры, для которых  $\min(v(x)) < 0$ . Такие структуры могут иметь усеченные ОП, левой границей которых является точка  $E = 0$ . Например, это имеет место для прямоугольных потенциальных ям шириной  $d$  и глубиной  $V_0$ , для которых удовлетворяется условие  $d(2mV_0/\hbar^2)^{1/2} = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  В этом случае точка  $E = 0$  является однобарьерным резонансом, и поэтому она заведомо принадлежит ОП (см. также раздел 7). Число резонансов в усеченной ОП может варьироваться в пределах от 0 до  $N - 1$  или  $N$ , в зависимости от типа области.

Рис. 1. Зависимость параметра  $\varphi$  (в  $\pi$ ) от энергии частицы ( $m$  равна массе свободного электрона) для периодических структур, образованных из прямоугольных ям (ширина  $31\text{\AA}$ , глубина  $1\text{эВ}$ ), отстоящих друг от друга на расстоянии  $15\text{\AA}$ .



Все три случая реализуются, например, для периодических структур, образованных из потенциальных ям шириной  $31\text{\AA}$  и глубиной  $1\text{эВ}$ , расстояние  $l$  между которыми равно  $15\text{\AA}$ . Результаты численных расчетов для этих структур приведены на рис. 1–5. На рис. 1 показана зависимость  $\varphi(E)$  в единицах  $\pi$ , откуда хорошо видны границы первых трех ОП. Крайняя левая ОП содержит точку  $E = 0$ . Одобарьерный резонанс ( $E = 0.41\text{эВ}$ ) попадает в третью (слева) ОП, т.е. это ОП 2-го типа. В интервале ( $0.125\text{--}0.235\text{эВ}$ ) расположена ОП 1-го типа. Разница в числе резонансов в каждой из ОП видна из рис. 2, где показана зависимость коэффициента прохождения  $T_{\{1,N\}}(E)$  при  $N = 4$ . Максимумы на кривой  $T_{\{1,N\}}(E)$  в ОП 2-го типа из-за одобарьерного резонанса выражены слабо. Зависимость времени прохождения для этого же случая показана на рис. 3. Число максимумов на кривой  $t_{\{1,N\}}(E)$  в ОП совпадает с числом резонансов.

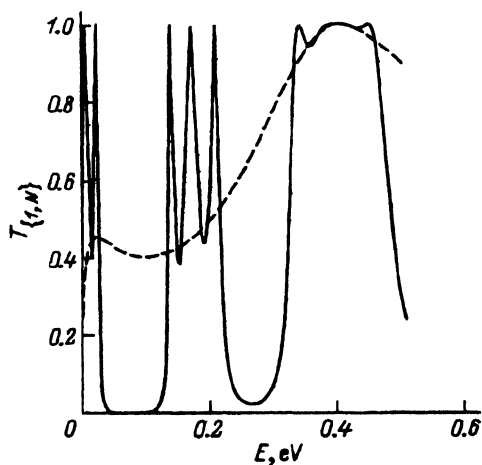


Рис. 2. Коэффициент прохождения  $T_{\{1,N\}}$ :  $N = 4$  — сплошная линия,  $N = 1$  — штриховая линия.

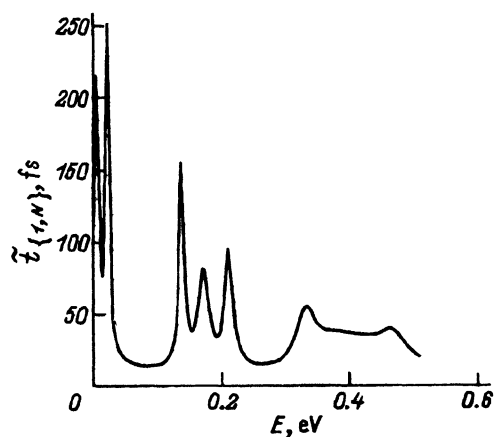


Рис. 3. Фазовое время прохождения  $t_{\{1,N\}}$  для 4-х периодов.

## 5. Время прохождения электрона в условиях резонанса.

В общем случае фазовое время прохождения для системы одинаковых барьеров, также как и для одного барьера (например, для прямоугольных ям), может быть отрицательной величиной. Однако можно показать, что в условиях резонанса фазовое время прохождения  $\tilde{t}_{\{1,N\}}$  всегда положительно.

Действительно, в точках  $E_{\text{res}}$ , где  $\sin(N\varphi) = 0$  (но  $\sin(\varphi) \neq 0$ ), для времени прохождения одного периода  $\tau_{\{1,N\}}$  ( $\tau_{\{1,N\}} = \tilde{t}_{\{1,N\}}/N$ ) справедливо соотношение

$$\tau_{\{1,N\}}(E_{\text{res}}) = C(E_{\text{res}})\tau(E_{\text{res}}), \quad (28)$$

где  $\tau = \hbar\varphi'$ . Следуя [15,16], нетрудно убедиться в том, что для  $|u| \leq 1$  параметр  $\tau$  связан со средней скоростью электрона в состоянии  $B_1(x)$  в области периодичности соотношением

$$\tau^{-1} = \int_{a_1}^{a_2} B_1^*(x) \left( -\frac{i\hbar}{m} \cdot \frac{d}{dx} \right) B_1(x) dx \left( \int_{a_1}^{a_2} B_1^*(x) B_1(x) dx \right)^{-1}. \quad (29)$$

Используя выражение (13) для  $B_1(x)$ , а также уравнение

$$\frac{dq}{dx} \exp(-i\kappa_0 x) = \frac{dp}{dx} \exp(i\kappa_0 x)$$

для элементов МП (см. [11]), числитель в выражении (29) можно привести к виду

$$2\hbar m^{-1} D(1+C) \sin^2(\varphi).$$

Это выражение, а следовательно, параметр  $\tau$  и фазовое время прохождения  $\tilde{t}_{\{1,N\}}$  в условиях резонанса положительны для любой системы одинаковых барьеров.

## 6. Отражение от полуограниченной сверхрешетки

Предел  $N \rightarrow \infty$  соответствует задаче об отражении электрона от полуограниченной сверхрешетки (ПС), левая граница которой расположена в точке  $x = a_1$ . Анализ выражений (20) и (25) показывает, что параметры туннелирования имеют в этом случае необычные свойства.

Прежде всего отметим, что в ОНП электрон должен стопроцентно отражаться от ПС:  $T_{\{1,\infty\}}(E) = 0$  во всех точках ОНП. Напротив, в ОП существует всюду плотное счетное множество значений энергии, при которых ПС полностью прозрачна для электрона. Причем границы ОП тоже принадлежат этому множеству. Все это наталкивается на мысль, что при больших  $N$  в нерезонансных точках ОП  $T_{\{1,N\}}(E) \approx 1$ . Однако можно показать, что это не так.

Действительно, при больших  $N$ , как следует из (20) и (25), функции  $T_{\{1,N\}}(E)$  и  $\tau_{\{1,N\}}(E)$  имеют локальные минимумы в точках  $E_0$ , где выполняется условие  $\cos(N\varphi) = 0$ . Легко показать, что

$$T_{\{1,\infty\}}(E_0) = C^{-2}(E_0), \quad \tau_{\{1,\infty\}}(E_0) = C^{-1}(E_0)\tau(E_0).$$



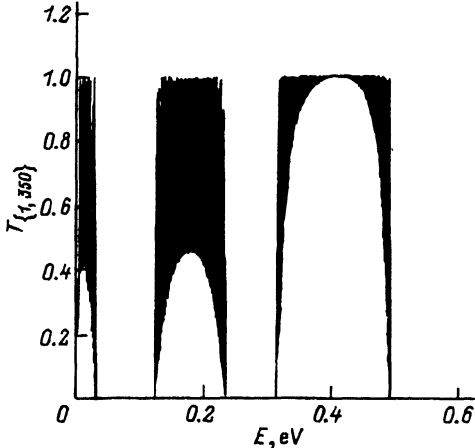


Рис. 4. Коэффициент прохождения  $T_{\{1,350\}}$ .

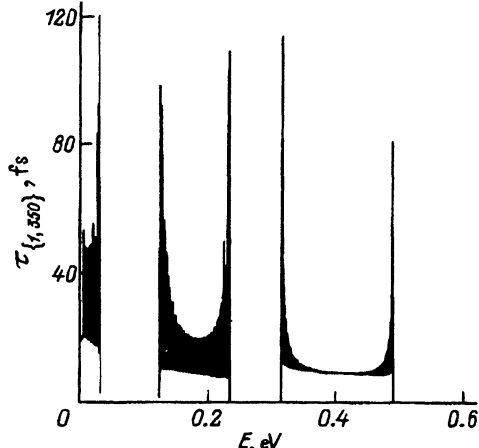


Рис. 5. Фазовое время прохождения одного периода  $\tau_{\{1,350\}}$ .

Таким образом, график функции  $T_{\{1,\infty\}}(E)$  в ОП расположен между огибающими  $T_{\min}(E)$  и  $T_{\max}(E)$ , где  $T_{\min}(E) \equiv C^{-2}(E)$ ,  $T_{\max}(E) \equiv 1$ . График функции  $\tau_{\{1,\infty\}}(E)$  расположен между огибающими  $\tau_{\min}(E)$  и  $\tau_{\max}(E)$ , где  $\tau_{\min}(E) \equiv C^{-1}(E)\tau(E)$ ,  $\tau_{\max} \equiv C(E)\tau(E)$  (отсюда, в частности, следует, что  $\tau_{\{1,\infty\}} > 0$  во всей ОП). Вне экстремальных точек обе функции имеют неограниченные производные по энергии, поскольку при больших  $N$   $T'_{\{1,N\}}(E)$  пропорциональны  $N$ . Зависимость коэффициента прохождения и времени прохождения одного периода от энергии для исследуемой структуры при  $N = 350$  показана на рис. 4 и 5. Из рисунков, в частности, видно, что в ОП 2-го типа огибающие  $T_{\min}(E)$  и  $\tau_{\min}(E)$  совпадают в однобарьерном резонансе соответственно с функциями  $T_{\max}(E)$  и  $\tau_{\max}(E)$ .

Итак, коэффициент отражения электронной волны от ПС остается неопределенным. Теория предсказывает лишь верхнюю и нижнюю границы изменения  $R_{\{1,\infty\}}$  в ОП. По отношению к волновому пакету (электрону) предсказание теории более однозначно. Волновой пакет в ОП не может отражаться от ПС, поскольку фазовое время прохождения (отражения) в этом случае бесконечно большое.

## 7. Связь со спектральной задачей для бесконечной сверхрешетки

Чтобы установить связь задачи рассеяния с задачей для бесконечной сверхрешетки в рамках данного подхода, обратим внимание на следующее обстоятельство. Представление (15) для решений  $B_{1,2}(x)$  в области периодичности не зависит ни от числа периодов, ни от вида потенциала вне интервала  $(a_1, b_N)$ . Таким образом, достаточно распространить представление (15) на всю вещественную ось  $OX$ , чтобы получить волновую (блоховскую) функцию для электрона в бесконечной сверхрешетке. Параметр  $\varphi$  и периодические функции  $U_{1,2}(x)$ , которые определяются через характеристики одного периода (см. (12)–(15)),

описывают также и бесконечную сверхрешетку. Причем ОП (ОНП) в задаче рассеяния являются, очевидно, разрешенными (запрещенными) энергетическими зонами для блоховского электрона в бесконечной сверхрешетке (в задаче рассеяния все состояния с  $E > 0$  разрешены).

В заключение отметим три важных различия между обеими задачами. Во-первых, в рамках задачи рассеяния недоступна для исследования область энергии, где  $\min(v(x)) < E < 0$ . Это приводит, например, к тому, что разрешенная зона  $(E_1, E_2)$  для бесконечной сверхрешетки, для которой  $E_1 < 0, E_2 > 0$ , переходит в усеченную ОП  $(0, E_2)$  в задаче рассеяния. Это именно тот случай (см. выше), когда число резонансов в ОП может быть меньше  $N - 1$  или  $N$  в зависимости от типа ОП. Во-вторых, динамика блоховского электрона отличается от поведения электрона, попавшего в сверхрешетку извне. При одной и той же (резонансной) для туннелирующего электрона энергии блоховский электрон движется в бесконечной сверхрешетке в  $C$  раз быстрее (см. (28)), чем туннелирующий электрон. На наш взгляд, экспериментальная проверка аналитического выражения (28) для фазового времени прохождения была бы полезной, чтобы подтвердить или неподтвердить статус этой характеристики как временного параметра туннелирования. Это важно, поскольку до сих пор нет единого мнения (см. [14]) о том, как правильно определять время туннелирования. В-третьих, нужно иметь в виду, что волновая функция, описывающая транспорт электронов через ограниченную сверхрешетку, удовлетворяет вполне определенным граничным условиям (амплитуда падающей слева волны равна единице; справа от системы барьеров есть только прошедшая волна). Эта функция зависит от числа барьеров, и в пределе при  $N \rightarrow \infty$  она имеет почти всюду в ОП (за исключением счетного множества экстремальных точек), как и параметры туннелирования, неограниченную производную по энергии. В то же время решения  $B_{1,2}(x; E)$  и, следовательно, получаемые из них блоховские функции не зависят от числа периодов. Гладкость этих решений, как функций параметра  $E$ , определяется гладкостью функций  $T_1(E)$  и  $\bar{J}_1(E)$ .

В заключение автор благодарит Г.Ф. Караваева и С.Н. Гриняева за полезное обсуждение данной статьи.

Приложение

### Матрица переноса

Матрица переноса  $Y_{\{1,j\}}$  для одномерной системы  $j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) потенциальных барьеров может быть представлена (см. [9,10]) в виде

$$Y_{\{1,j\}} = \begin{pmatrix} q_{\{1,j\}} & p_{\{1,j\}} \\ p_{\{1,j\}}^* & q_{\{1,j\}}^* \end{pmatrix},$$

где

$$q_{\{1,j\}} = T_{\{1,j\}}^{-1/2} \exp [i(\kappa_0 d_{\{1,j\}} - J_{\{1,j\}})];$$

$$p_{\{1,j\}} = (R_{\{1,j\}}/T_{\{1,j\}})^{1/2} \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{2} - \kappa_0 s_{\{1,j\}} + F_{\{1,j\}} \right) \right],$$

$a_{\{1,j\}} = b_j - a_1$ ,  $s_{\{1,j\}} = b_j + a_1$ ,  $R_{\{1,j\}} = 1 - T_{\{1,j\}}$ . Предполагается, что в интервале  $(a_k, b_k)$ , где  $k = 1, \dots, N$  ( $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_N < b_N$ ), потенциал и эффективная масса — заданные функции пространственной переменной  $x$ . Вещественные параметры  $T_{\{1,j\}}$  (коэффициент прохождения),  $J_{\{1,j\}}$  и  $F_{\{1,j\}}$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$T_{\{1,j+1\}}^{-1} = 1 + \left\{ \left( \sqrt{R_{\{1,j\}}} - \sqrt{R_{j+1}} \right)^2 + 4\sqrt{R_{\{1,j\}}R_{j+1}} \cos^2(\chi_{\{1,j\}}) \right\} T_{\{1,j\}}^{-1} T_{j+1}^{-1}, \quad (\text{П.1})$$

$$J_{\{1,j+1\}} = \frac{1}{2} \left( J_{\{1,j+1\}} + J_{j+1} - F_{\{1,j\}} + F_{j+1} \right) + \arctg \left( \frac{1 - \sqrt{R_{\{1,j\}}R_{j+1}}}{1 + \sqrt{R_{\{1,j\}}R_{j+1}}} \operatorname{tg}(\chi_{\{1,j\}}) \right) + m\pi; \quad (\text{П.2})$$

$$F_{\{1,j+1\}} = \frac{1}{2} \left( F_{\{1,j\}} + F_{j+1} - J_{\{1,j\}} + J_{j+1} \right) + \operatorname{sign}(\omega_{\{1,j\}}) \arctg \left( |\omega_{\{1,j\}}| \operatorname{tg}(\chi_{\{1,j\}}) \right) + m\pi, \quad (\text{П.3})$$

$$\chi_{\{1,j\}} = \frac{1}{2} \left( J_{\{1,j\}} + J_{j+1} + F_{\{1,j\}} - F_{j+1} \right) + \kappa_0 l_{j,j+1}, \quad (\text{П.4})$$

$$\omega_{\{1,j\}} = \frac{\sqrt{R_{\{1,j\}}} - \sqrt{R_{j+1}}}{\sqrt{R_{\{1,j\}}} + \sqrt{R_{j+1}}}, \quad (\text{П.5})$$

$l_{j,j+1} = a_{j+1} - b_j$ ;  $j = 1, \dots, N$ ;  $m = 0$ , если  $\cos(\chi_{\{1,j\}}) \geq 0$ ; иначе  $m = 1$ . Однобарьерная МП  $Y_j$  в выражениях (П.1)–(П.5) соответствует интервалу  $(a_j, b_j)$ ;  $j = 1, \dots, N$ .

### Список литературы

- [1] L. Esaki. J. Quant. Electron., **QE-22**, 1611 (1986).
- [2] В.М. Гаспарян. ФТТ, **31**, 162 (1989).
- [3] H. Yamamoto, Y. Kanie, K. Taniguchi. Phys. St. Sol. (b), **154**, 195 (1989).
- [4] М.Д. Носков, А.В. Шаповалов. Изв. вузов. Физика, **36**, N7, 120 (1993).
- [5] Хун-Вен Лиу, А.Р. Stamp. Phys. Rev. B., **50**, 1588 (1994).
- [6] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики (М., Наука, 1973) с. 719.
- [7] В.А. Кособукин. ФТТ, **34**, 3107 (1992).
- [8] F. Abeles. Ann. de Physique, **5**, 596 (1950).
- [9] Н.Л. Чуприков. Деп. в ВИНТИИ. М. (1991). N 492-B91.
- [10] Н.Л. Чуприков. ФТП, **26**, 2040 (1992).
- [11] Н.Л. Чуприков. Изв. вузов. Физика, **36**, N 6, 48 (1993).
- [12] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (М., Наука, 1976) с. 576.
- [13] Н.Л. Чуприков. ФТП, **27**, 799 (1993).
- [14] E.H. Nauge, J.A. Stovngeng. Rev. Mod. Phys., **61**, 917 (1989).
- [15] А.И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников (М., Наука, 1978) с. 615.
- [16] Г. Джонс. Теория зон Бриллюэна и электронные состояния в кристаллах (М., Мир, 1968) с. 264.

# Tunneling in a 1D system of $N$ identical potential barriers

*N.L. Chuprikov*

Siberian Physicotechnical Institute at Tomsk State University, 634050 Tomsk, Russia

In the framework of the transfer matrix method proposed earlier by the author, analytical expressions for the transmission coefficient and the time parameters, which describe the electron scattering by 1D finite superlattices, are obtained and analyzed. The relation between the tunneling problem and the problem of the energy spectrum for an infinite superlattice is investigated. It is shown that all resonances are concentrated in the transparency domains which are also the allowed minibands for an infinite superlattice. Three types of the transparency domains are selected, which are distinguishable by the number of resonances. It is shown that the tunneling parameters of semifinite superlattices have an unlimited first derivative on the energy.

---