ТЕПЛОВЫЕ РАЗМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПРОВОДЯЩИХ КАНАЛАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Г. Гулямов, Ю. Г. Гуревич, Н. Закиров

Институт радиофизики и электроники Академии наук Украины, 310085, Харьков, Украина
(Получено 8 февраля 1993 г. Принято к печати 1 ноября 1993 г.)

Нелинейные явления, возникающие при движении носителей тока в «греющих» электрических полях, изучены в настоящее время достаточно детально как теоретически, так и экспериментально (см. [1–2]).

Типичным представителем этого класса эффектов является разогрев носителей тока в монополярном полупроводнике, приводящий к нелинейности вольт-амперной характеристики [1]. В температурном приближении (когда средняя энергия носителей тока может быть описана эффективной температурой T_e) в слабых, но греющих электрических полях плотность тока $\mathbf{j}$ оказывается связанной с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ соотношением [1, 3]

$$\mathbf{j} = \sigma_0 (1 + \beta E^2)\, \mathbf{E}. \tag{1}$$

При наличии одного механизма релаксации импульса со временем релаксации $\tau(\varepsilon) = \tau_0 (\varepsilon/T_0)^q$ и одного — энергии со временем $\tau_\varepsilon (T_e) = \tau_\varepsilon^{(0)} (T_e/T_0)^{r-1}$ электропроводность электронов с изотопным законом дисперсии равна

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{T_e}{T_0}\right)^q, \quad \sigma_0 = \frac{4\Gamma(5/2 + q)}{3\sqrt{\pi}} \frac{ne^2\tau_0}{m},$$

а β — коэффициент неомичности, отличный от нуля, при $q \neq 0$ [1] равен

$$\beta = \frac{\tau_\varepsilon^{(0)}}{n} \cdot \left.\frac{d\sigma}{dT_e}\right|_{T_e = T_0} = \frac{q\sigma_0\tau_\varepsilon^{(0)}}{nT_0}.$$

Здесь T_0 — температура фононов (совпадающая с температурой окружающего образец термостата), n, ε, m и e — концентрация, энергия, масса и заряд электронов ($e < 0$).

Если учесть, что ширина проводящего канала ограничена ($E_x \equiv E$, $-b \leqslant z \leqslant b$), а на стенках $z = \pm b$ имеются поверхностные механизмы релаксации энергии, характеризующиеся параметрами $\eta_\pm$, то появляется дополнительный (по отношению к объемному, характеризующемуся τ_ε) канал релаксации

[1] Значения r и q для различных механизмов релаксации приведены в работе [1].

энергии носителей тока. Параметры $\eta\pm$ определяются через плотность теплового потока Q, приносимого электронами на стенки $z=\pm b$: [2]

$$Q_z|_{z=\pm b} = \pm\eta_\pm (T_e - T_0)|_{z=\pm b}. \qquad (2)$$

В результате средняя по сечению канала температура T_e уменьшается с уменьшением b и нелинейность вольт-амперной характеристики (ВАХ) ослабевает [1, 4].

$$\bar{j}_x = \frac{1}{2b}\int\limits_{-b}^{b} j_x(z)\,dz = \sigma_0\left[1+\beta\left(1-\frac{F_2}{Q}\frac{\operatorname{sh} kb}{kb}\right)E_x^2\right]E_x. \qquad (3)$$

Здесь (смысл индекса «2» у функции F см. далее)

$$F_2 = [(\xi_+ + \xi_-)\,k + 2\xi_+\xi_- \operatorname{th} kb],$$

$$Q = [2\,(k^2+\xi_+\xi_-)\operatorname{th} kb + k\,(\xi_+ + \xi_-)\,(1+\operatorname{th}^2 kb)]\operatorname{ch} kb, \qquad (3a)$$

$$\xi_\pm = \frac{\eta_\pm}{\varkappa_0}(q+2), \text{ электронная теплопроводность}$$

$$\varkappa = \varkappa_0\left(\frac{T_e}{T_0}\right)^{q+1}, \quad \varkappa_0 = \frac{4\,(q+2)\,\Gamma\,(7/2+q)}{3\sqrt{\pi}}\frac{n\tau_0 T_0}{m},$$

$$k^2 = \frac{P_0}{\varkappa_0}(q+2), \quad P = P_0\left(\frac{T_e}{T_0}\right)^{r-1}, \quad P_0 = n/\tau_e^{(0)}.$$

Параметр P описывает скорость объемной релаксации энергии, а k^{-1} — характерная длина изменения электронной температуры — энергетическая длина релаксации (длина остывания) [1, 4]. Как следует из выражения (3а), при $b \gg k^{-1}$ величина F_2/Q стремится к нулю, а при $b \ll k^{-1}$ (если $\xi_\pm \neq 0$) — к единице, т. е. в проводящих каналах с горячими электронами конечной толщины имеет место тепловой размерный эффект.

Целью настоящей работы является изучение влияния на этот эффект конечности длины проводящего канала ($-a \leqslant x \leqslant a$). На первый взгляд может показаться, что при $ka \gg kb$, 1 должны получиться описанные ранее результаты (по крайней мере при $|x| \ll a - b$, $a - k^{-1}$). Между тем, как будет показано далее, предельный переход к описанному выше эффекту при $ka \gg kb$, 1 имеет место только в случае $\xi_\pm = 0$, когда тепловой размерный эффект отсутствует вообще. Если же $\xi_\pm \neq 0$, то одномерная задача [выражение (3)], как это не парадоксально, всегда неверна.

Рассмотрим проводящий канал длиной $2a$ ($-a \leqslant x \leqslant a$) и толщиной $2b$ ($-b \leqslant z \leqslant b$). Для определенности будем считать, что на стенках $y = \pm c$ скорость поверхностной релаксации энергии равна нулю. Пусть к токовому контакту на плоскости $x = -a$ приложен потенциал $\Delta\varphi/2$, а к токовому контакту $x = a$ — потенциал $-\Delta\varphi/2$.

---

[2] Что касается толщины канала $2c$ в направлении оси y, то либо $c \to \infty$, либо c — любое, но $\eta\pm$ на стенках $y = \pm c$ равны нулю. И в том и в другом случае исчезает зависимость ископаемых величин от y.

Система уравнений, описывающих поля электрического потенциала φ (x, z) и электронной температуры T_e (x, z), состоит в этом случае из уравнений непрерывности тока и баланса энергии

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{Q} = -\mathbf{j}\nabla\varphi - P(T_e - T_0), \tag{4}$$

причем

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla\varphi - \alpha\nabla T_e), \quad \mathbf{Q} = -\varkappa\nabla T_e - \gamma\nabla\varphi. \tag{5}$$

Здесь дифференциальный коэффициент термоэдс $\alpha = (q+1)/e$, $\gamma = \gamma_0 \left(\dfrac{T_e}{T_0}\right)^{q+1}$,

$$\gamma_0 = \frac{4\Gamma(7/2+q)}{3\sqrt{\pi}} \frac{ne\tau_0 T_0}{m}.$$

Система уравнений (4) должна быть дополнена граничными условиями. Их естественно выбрать в виде

$$\varphi|_{x=\pm a} = \mp\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad j_z|_{z=\pm b} = 0. \tag{6}$$

Тепловые граничные условия на стенках $z = \pm b$ имеют вид выражения (2). Что касается тепловых граничных условий на токовых контактах, то естественно считать, что $\eta_\pm$ на этих стенках бесконечно велики (хорошая электро- и теплопроводность), т. е.

$$T_e|_{x=\pm a} = T_0. \tag{7}$$

Считая $\Delta\varphi$ достаточно малым (соответствующие критерии будут приведены далее), естественно искать решение поставленной задачи в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2, \quad T_e = T_0 + T_1 + T_2, \tag{8}$$

причем очевидно, что T_0 от $\Delta\varphi$ не зависит, φ_0 пропорционально $\Delta\varphi$, φ_1 и T_1 пропорциональны $(\Delta\varphi)^2$, а T_2 и φ_2 — $(\Delta\varphi)^3$. Необходимость искать решение с точностью до $(\Delta\varphi)^3$ обусловлена тем, что эффект неомичности пропорционален кубу тянущего поля [см. выражения (1) и (3)].

В линейном по $\Delta\varphi$ приближении находим очевидные выражения

$$\varphi_0 = -\frac{\Delta\varphi}{2a}x, \quad E_x^{(0)} = \frac{\Delta\varphi}{2a}, \quad E_z^{(0)} = 0, \quad j_x^{(0)} = \sigma_0\frac{\Delta\varphi}{2a}, \quad j_z^{(0)} = 0.$$

В квадратичном приближении по $\Delta\varphi$ получаем для φ_1 (x, z) и T_1 (x, z)

$$T_1 = \frac{2}{q+5/2}\frac{ke^2}{kaT_0}\left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(k^2+\alpha_n^2)\,\alpha_n}\left(1 - \frac{F_n(z)}{Q_n}\right)\cos\alpha_n x, \quad \varphi_1 = -\alpha T_1. \tag{9}$$

Здесь

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2a}(2n+1),$$

$$Q_n = [2(\beta_n^2 + \xi_+\xi_-)\,\mathrm{th}\,\beta_n b + \beta_n(\xi_+ + \xi_-)(1 + \mathrm{th}\,\beta_n b)]\,\mathrm{ch}\,\beta_n b,$$

$$F_n(z) = F_1^n\,\mathrm{sh}\,\beta_n z + F_2^n\,\mathrm{ch}\,\beta_n z, \quad \beta_n^2 = k^2 + \alpha_n^2,$$

$$F_1^n = \beta_n(\xi_+ - \xi_-)\,\mathrm{th}\,\beta_n b, \quad F_2^n = (\xi_+ + \xi_-)\beta_n + 2\xi_+\xi_-\,\mathrm{th}\,\beta_n b.$$

Отметим, что асимметрия $T_1(x, z)$ как функции z связана только с $\xi_+ \neq \xi_-$. Как следует из (5), с учетом второго соотношения (9) токи в данном приближении тождественно равны нулю ($j_x^{(1)} = j_z^{(1)} = 0$). В то же время электрические поля $E_x^{(1)} = -\partial\varphi_1/\partial x$ и $E_z^{(1)} = -\partial\varphi_1/\partial z$ отличны от нуля.

При $ka \gg 1$ из выражений (9) получаем в области $|x| \ll a - k^{-1}$

$$T_1 = \frac{e^2}{(q + 5/2)\,k^2 T_0}\left(1 - \frac{F(z)}{Q}\right)\left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^2, \quad \varphi_1 = -\frac{q+1}{e}, \tag{10}$$

где $F(z)$ и Q получаются из $F_n(z)$ и Q_n заменой β_n на k.

Выражение для температуры (10) совпадает с приведенным в [1] для бесконечного проводящего слоя конечной толщины. Однако существенно, что вблизи стенок $x = \pm a$ в слоях $\sim k^{-1}$ существует отличное от нуля электрическое поле $E_x^{(1)}$, четное по $\Delta\varphi$ (в объеме образца $E_x^{(1)} = 0$)

$$E_x^{(1)} = \frac{(q+1)\,e}{(q + 5/2)\,kT_0}\left(1 - \frac{F(z)}{Q}\right)\frac{\mathrm{sh}\,kx}{\mathrm{ch}\,ka}\left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^2.$$

Это поле максимально при $\xi_\pm = 0$ ($F(z) = 0$) и обращается в нуль при $b \ll k^{-1}$. Таким образом, величина продольного электрического поля (а значит, и джоулево тепло, вычисленное с точностью до $(\Delta\varphi)^2$) зависит от толщины проводящего канала и скорости релаксации энергии на его стенках. Из сравнения φ_1 и φ_0 (T_1 и T_0) нетрудно получить критерий малости разности потенциалов $\Delta\varphi$

$$\frac{\Delta\varphi}{2a} \lesssim \frac{kT_0}{|e|}.$$

Переходя к вычислению $\varphi_2(x, z)$ и $T_2(x, z)$,[3] выпишем в явном виде определяющие их уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi_2 + \frac{q+1}{e}T_2\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\varphi_2 + \frac{q+1}{e}T_2\right) = -\frac{q}{T_0}\cdot\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial T_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T_2 + \frac{e}{q+2}\varphi_2\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(T_2 + \frac{e}{q+2}\varphi_2\right) - \frac{k^2}{q+2}T_2 =$$

$$= \frac{q+1}{q+2}\cdot\frac{q + 7/2}{q + 5/2}\cdot\frac{e}{T_0}\cdot\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{2}{(q+2)(q + 5/2)}\cdot\frac{e^2}{T_0}\cdot\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}.$$

[3] Отметим, что при вычислении коэффициента неомичности в проводящем слое бесконечной длины (см. [1, 4]) достаточно было вычислить температуру T_e с точностью до $(\Delta\varphi)^2$ (при этом неявно предполагалось, что $\varphi_2 = 0$).

Как следует из приведенных уравнений, если вблизи стенок $x = \pm a$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ или $\partial T_1/\partial x$ отличны от нуля, то с учетом сказанного выше граничные условия при $z = \pm b$ (определяя зависимость от x функций T_1 и φ_1) должны существенно отразиться на поведении функций T_2 и φ_2 (на их зависимости от x) даже при $ka \to \infty$. Действительно, для T_2 и φ_2 в общем случае находим

$$T_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{(q+5/2)^2}\cdot\frac{e^3}{k^3T_0^2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^3\left[ka\frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} ka} - kx\frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} ka} + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^b\frac{k^3}{\gamma_n(k^2+\gamma_n^2)}\frac{f_n(z)}{q_n}\sin\gamma_n x - 2\frac{x}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{k^3}{\alpha_n(k^2+\alpha_n^2)}\frac{F_n(z)}{Q_n}\cos\alpha_n x\right],$$

$$\varphi_2 = -\alpha T_2 + \psi, \tag{11}$$

$$\psi = \frac{q}{q+5/2}\frac{e^2}{k^3T_0^2}\frac{1}{ka}\left[kx \operatorname{th} ka - ka\frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{ch} ka} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{k^2}{k^2+\alpha_n^2}\frac{F_n(z)}{Q_n}\times\right.$$

$$\times\left(\sin\alpha_n x - (-1)^n\frac{\sin\beta_n x}{\sin\beta_n a}\right) + \frac{4}{ka}\sum_{n,m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{k\beta_n}{k^2+\alpha_n^2}\frac{k^4}{(l_m^2-\alpha_n^2)(l_m^2-\beta_n^2)Q_n}\times$$

$$\left.\times\left(F_1^n\frac{\operatorname{ch}\beta_n b}{\operatorname{ch} l_m b}\operatorname{sh} l_m z + F_2^n\frac{\operatorname{sh}\beta_n b}{\operatorname{sh} l_m b}\operatorname{ch} l_m z\right)\sin l_m x\right]\left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^3.$$

Здесь $\gamma_n = \frac{\pi}{a}(n+1)$, $l_m = \frac{\pi}{a}m$, $f_n(z)$ и q_n получаются заменой в $F_n(z)$ и Q_n величины β_n на δ_n, где $\delta_n^2 = k^2 + \gamma_n^2$.

Обратим внимание, что в выражении для потенциала φ_2 (а значит, и для полей $E_x^2 = -\partial\varphi_2/\partial x$, $E_z^2 = -\partial\varphi_2/\partial z$) имеются слагаемые, пропорциональные q (входящие в ψ) и отличные от нуля при $q = 0$ (входящие в T_2). Что касается кубических по $\Delta\varphi$ слагаемых в выражениях для плотности тока

$$j_x^2 = \sigma_0\left\{q\frac{T_1}{T_0}\frac{\Delta\varphi}{2a} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right], \quad j_z^{(2)} = -\sigma_0\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{12}$$

то они при $q = 0$ всегда обращаются в нуль. Последнее связано с тем, что часть φ_2 (пропорциональная T_2) полностью компенсирует в выражении для $\mathrm{j}^{(2)}$ термоток (напомним, что в квадратичном по $\Delta\varphi$ приближении $\varphi_2 = -\alpha T_2$, в результате чего токи отсутствовали).

Приведем еще среднее по сечению значение тока $j_x^{(2)} = (1/2b)\int_{-b}^{b} j_x^{(2)} dz$, которое и определяет нелинейность ВАХ

$$j_x^2 = \frac{q}{q+5/2}\frac{e^2}{k^2T_0^2}\frac{1}{ka}\left[ka - \operatorname{th} ka + \frac{2}{ka}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k}{\beta_n}\frac{k^2}{\alpha_n^2}\frac{k^2}{k^2+\alpha_n^2}\frac{F_2^n}{Q_n}\frac{\operatorname{sh}\beta_n b}{\beta_n b}\right]\sigma_0\left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^3. \tag{13}$$

Если $ka \gg 1$, то, как следует из (11), T_2 всюду (за исключением слоев $\sim k^{-1}$ вблизи $x = \pm a$) обращается в нуль, в то время как φ_2 в объеме равно

$$\varphi_2 = \psi = \frac{q}{q + 5/2} \frac{e^2}{k^3 T_0^2} \left(1 - 2ka \frac{F_2}{Q} \frac{\operatorname{sh} kb}{kb}\right) \frac{x}{a}. \tag{14}$$

Из выражения (14) следует, что при $\xi_+ = \xi_- = 0$ ($F_2 = 0$, отсутствуют тепловые размерные эффекты) φ_2 отлично от нуля и положительно при $q > 0$. Если же $\xi_\pm \neq 0$, то φ_2 имеет противоположный знак и в ka раз больше. При этом $E_z^{(2)} = 0$, а

$$E_x^{(2)} = \frac{q}{q + 5/2} \frac{e^2}{k^2 T_0^2} \left(2 \frac{F_2}{Q} \frac{\operatorname{sh} kb}{kb} - \frac{1}{ka}\right) \left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^3. \tag{15}$$

Здесь, так же как и для φ_2, величина и знак однородного в объеме поля $E_x^{(2)}$ зависят от толщины проводящего канала и значений $\xi_\pm$. Подчеркнем, что при конечных значениях kb и при $ka \to \infty$ $\xi_\pm$ не стремится к нулю. Поэтому обычное допущение теории тепловых размерных эффектов [1, 4, 5] о постоянстве (при изменении kb и $\xi_\pm$) поля E_x в каналах бесконечной длины не соответствует истине. Только при $kb \to \infty$ или $\xi^+ = \xi_- = 0$ поле $E_x^{(2)}$ обращается в нуль, при $ka \to \infty$ и можно говорить о каналах бесконечной длины.

Сказанное выше полностью соответствует значению $j_x^{(2)}$ при $ka \to \infty$ [см. (13)]

$$j_x^{(2)} = \frac{q}{q + 5/2} \frac{e^2}{k^2 T_0^2} \left(1 + \frac{F_2}{Q} \frac{\operatorname{sh} kb}{kb}\right) \sigma_0 \left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^3. \tag{16}$$

Из выражения для $j_x^{(0)}$ и из (16) имеем

$$\bar{j}_x = \sigma_0 \left[1 + \frac{q}{q + 5/2} \frac{e^2}{k^2 T_0^2} \left(1 + \frac{F_2}{Q} \frac{\operatorname{sh} kb}{kb}\right) \left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^2\right] \frac{\Delta\varphi}{2a}. \tag{17}$$

Из выражения (17) следует, что в отличие от выражения (3) нелинейность ВАХ при $kb \to 0$ не ослабевает, а усиливается.

Последнее связано с вкладом в поля $E_x^{(2)}$ в $j_x^{(2)}$, который игнорировался при построении теории в [1, 4, 5]. Последнее наглядно проявляется в выражении для $j_x^{(2)}$ до усреднения по сечению. Из выражения (12) при $ka \gg 1$ имеем

$$j_x^{(2)} = \frac{q}{q + 5/2} \frac{e^2}{k^2 T_0^2} \left[1 - \frac{F(z)}{Q} + 2 \frac{F_2}{Q} \frac{\operatorname{sh} kb}{kb}\right] \sigma_0 \left(\frac{\Delta\varphi}{2a}\right)^3,$$

причем два первых слагаемых отвечают обычно учитываемому выражению T_1, а третье — $\partial\psi/\partial x$ [см. (12)].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ф. Г. Басс, В. С. Бочков, Ю. Г. Гуревич. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках, 287. М. (1984).
[2] М. Аше, З. С. Грибников, В. В. Митин, О. Г. Сарбей. Горячие электроны в многодолинных полупроводниках, 325. Киев (1982).
[3] J. Jamashita, M. Watanabe. J. Phys. Soc. Japan, 7, 334 (1952).
[4] З. С. Грибников, В. И. Мельников, Т. С. Сорокина. ФТТ, 8, 3379 (1966).
[5] Э. И. Рашба, З. С. Грибников, В. Я. Кравченко. УФН, 119, 3 (1976).

Редактор Т. А. Полянская