

## НАСЫЩЕННЫЙ ФЕРРОМАГНЕТИЗМ В МОДЕЛИ ХАББАРДА С БЕСКОНЕЧНЫМ КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© Е. В. Шипицын

Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук,  
 620219 Екатеринбург, Россия  
 (Поступила в Редакцию 5 января 1996 г.)

В рамках модели Хаббарда с бесконечным кулоновским взаимодействием методом диаграммной техники с  $X$ -операторами исследовано состояние насыщенного ферромагнетизма. В приближении типа хаотических фаз вычислены электронная и магنونная функции Грина, из полюсов которых получены соответственно электронный и магнонный спектры. Определены критерии неустойчивости насыщенного ферромагнетизма относительно стонеровских (электронных) и спин-волновых (магнонных) возбуждений. Показано, что учет спин-волновых возбуждений несколько уменьшает область существования насыщенного ферромагнетизма, полученную при рассмотрении стонеровских возбуждений. Таким образом, истинная граница устойчивости фазы насыщенного ферромагнетизма определяется спиновыми волнами.

В связи с поисками нефоновных механизмов высокотемпературной сверхпроводимости в последние годы исключительно возрос интерес к сильно коррелированным электронным системам. Одной из основных моделей теории сильно коррелированных электронных систем является модель Хаббарда [1]. Она содержит всего два энергетических параметра:  $t$  — матричный элемент переноса электрона с узла на ближайший узел и  $U$  — кулоновское отталкивание двух электронов на узле. Еще одним параметром модели является электронная концентрация  $n = N_e/N$ , где  $N$  и  $N_e$  — число узлов и электронов в кристалле соответственно. В представлении вторичного квантования гамильтониан модели Хаббарда имеет вид [1]

$$H = t \sum_{\langle ij \rangle > \sigma} a_{i\sigma}^{\dagger} a_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, \quad (1)$$

где  $a_{i\sigma}$  и  $a_{i\sigma}^{\dagger}$  — операторы уничтожения и рождения электрона со спином  $\sigma$  ( $\sigma = \uparrow, \downarrow = +, -$ ) на узле  $i$ ,  $n_{i\sigma} = a_{i\sigma}^{\dagger} a_{i\sigma}$  — оператор числа электронов со спином  $\sigma$  на узле  $i$ , а  $\langle ij \rangle$  означает суммирование по ближайшим соседям.

Проблеме магнетизма в модели Хаббарда посвящена обширная литература (см., например, обзоры [2–5]). Насыщенный ферромагнетизм

является наиболее простой из всех возможных магнитоупорядоченных фаз, однако до сих пор нет полной ясности в вопросах механизма возникновения и области существования данной фазы. Наиболее надежным в этом плане является точный результат Нагаока [6]: в случае  $T = 0$  и  $U \rightarrow \infty$  при наличии одной дырки в системе с половинным заполнением ( $n = 1$ ) для простой кубической (ПК) решетки основным состоянием является насыщенный ферромагнетизм. Позднее было показано [7,8], что в случае двух дырок такое состояние неустойчиво. Наконец, недавно установлено [9,10], что при наличии макроскопически большого числа дырок (однако при нулевой концентрации их в термодинамическом пределе) насыщенный ферромагнетизм остается основным состоянием системы.

Вопрос же об устойчивости насыщенного ферромагнетизма в случае конечной концентрации дырок (т.е. при  $0 < n < 1$ ) по-прежнему остается открытым. Использование вариационных методов показало [11-13], что в случае  $T = 0$  и  $U \rightarrow \infty$  насыщенный ферромагнетизм существует при  $n > n_s$ , где  $n_s$  — критическая концентрация устойчивости насыщенного ферромагнетизма, которая очень чувствительна к выбранному приближению и типу решетки (например, для ПК- и ОПК-решеток  $n_s = 0.68$  в [11], а для квадратной решетки  $n_s = 0.59$  в [12] и  $n_s = 0.71$  в [13]). Метод расщепления двухвременных функций Грина также часто применяется для изучения насыщенного ферромагнетизма [14-17] и тоже дает большой разброс значений  $n_s$ .

Таким образом, проблема существования насыщенного ферромагнетизма в модели Хаббарда достаточно сложна и не до конца разрешена. В данной работе мы будем исследовать насыщенный ферромагнетизм в пределе  $U \rightarrow \infty$  при помощи диаграммной техники с  $X$ -операторами, которая была разработана в [18-20]. В [18,19] было осуществлено описание парамагнитной фазы посредством учета электрон-электронного взаимодействия в обобщенном приближении хаотических фаз (GRPA), которое заключается в суммировании всех электронных петель и тем самым является идеологически идентичным хорошо известному из теории Ферми-жидкости приближению хаотических фаз (RPA) [21,22]. В [20] было проведено изучение фазы насыщенного ферромагнетизма путем учета электрон-магнетонного взаимодействия в приближении низкой плотности (LDA), которое состоит в суммировании всех электрон-магнетонных лестниц.

В данной работе мы исследуем насыщенный ферромагнетизм, возникающий за счет электрон-электронного взаимодействия, которое будет учтено нами в приближении RPA-типа. При этом мы рассмотрим неустойчивость состояния насыщенного ферромагнетизма как относительно стонеровских (электронных), так и относительно спин-волновых (магнетонных) возбуждений.

### 1. Диаграммная техника

При рассмотрении сильных электронных корреляций (т.е. в случае  $U \gg t$ ) наиболее удобными динамическими переменными являются  $X$ -операторы Хаббарда [23], описывающие переходы между возможными электронными состояниями на одном узле. В терминах

$X$ -операторов гамильтониан Хаббарда (1) в пределе  $U \rightarrow \infty$  принимает следующий вид [18]:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad (2)$$

$$H_0 = \sum_i (\varepsilon_+ X_i^{++} + \varepsilon_- X_i^{--}), \quad (3)$$

$$H_{\text{int}} = t \sum_{\langle ij \rangle} (X_i^{+0} X_j^{0+} + X_i^{-0} X_j^{0-}), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_\sigma = -\sigma\hbar/2 - \mu$  — энергия атомного уровня во внешнем магнитном поле  $\hbar$  (которое далее будет устремлено к нулю), а  $\mu$  — химический потенциал.

Статистическая механика модели Хаббарда может быть описана при помощи трех температурных одночастичных функций Грина для электронов (со спином  $\uparrow$  и  $\downarrow$ ) и магнонов (поперечных спиновых отклонений)

$$\Psi_\uparrow(i\tau, i'\tau') = -\langle T \tilde{X}_i^{+0}(\tau) \tilde{T}_{i'}^{0+}(\tau') \rangle, \quad (5)$$

$$\Psi_\downarrow(i\tau, i'\tau') = -\langle T \tilde{X}_i^{-0}(\tau) \tilde{T}_{i'}^{0-}(\tau') \rangle, \quad (6)$$

$$\Phi(i\tau, i'\tau') = -\langle T \tilde{X}_i^{+-}(\tau) \tilde{X}_{i'}^{-+}(\tau') \rangle, \quad (7)$$

где все обозначения стандартны [18,24]. Заметим только, что выражения (5) и (6) описывают распространение дырок, а не электронов; дырочное представление более удобно для описания насыщенного ферромагнетизма, поскольку он определенно возникает вблизи половинного заполнения (т. е. при  $n \lesssim 1$ ) [6].

Диаграммная техника для гамильтониана (2)–(4) была подробно описана в [18–20]. Ее составляют следующие элементы: сплошные линии с белой и черной стрелками (электронные пропагаторы  $G_\uparrow$  и  $G_\downarrow$ , описывающие движение дырок со спином  $\uparrow$  и  $\downarrow$ ), штриховая линия со стрелкой (магнонный пропагатор  $D$ , описывающий распространение магнонов), волнистая линия («взаимодействие»  $t$ , отвечающее гамильтониану  $H_{\text{int}}$ ) и стоящие на концах пропагаторных линий жирные точки (шайбы), каждая из которых соответствует статистическому среднему  $\langle \dots \rangle_0$  от одной из трех комбинаций диагональных  $X$ -операторов

$$F_i^{+0} = X_i^{++} + X_i^{00}, \quad F_i^{-0} = X_i^{--} + X_i^{00}, \quad B_i^{+-} = X_i^{++} - X_i^{--}. \quad (8)$$

Отметим одну важную особенность диаграммной техники с  $X$ -операторами. Дело в том, что вследствие наличия среди  $X$ -операторов нескольких недиагональных возникает необходимость задания для них иерархии (системы старшинств), которая фиксировала бы последовательность действий при вычислении статистического среднего  $\langle \dots \rangle_0$  от хронологического произведения  $X$ -операторов (возникающего при переходе в представление взаимодействия и разложении матрицы рассеяния в ряд по  $H_{\text{int}}$ , [18,24]), т. е. указывала бы, с какого

оператора начинать спаривание и какой считать спаривающим (старшим) на каждом шаге. В [18-20] иерархии задавались следующим образом: сначала путем определения старших в каждой паре сопряженных  $X$ -операторов выбиралась «приоритетная тройка» операторов, а затем устанавливалось старшинство среди них; тогда на любом шаге спаривающим считался старший среди имевшихся на данном шаге операторов. В [18,19] использовалась так называемая «парамагнитная» иерархия  $X^{0+} > X^{0-} > X^{+-}$ , а в [20] — «ферромагнитная» иерархия  $X^{+-} > X^{+0} > X^{-0}$ . Главным недостатком установления жесткого старшинства между операторами «приоритетной тройки» являлся тот факт, что при этом не происходит полного «ужирнения» (т.е. замены  $\langle \dots \rangle_0 \rightarrow \langle \dots \rangle$ ) шайбы, отвечающей самому младшему оператору «приоритетной тройки»; например, в «ферромагнитной» иерархии (после суммирования соответствующих диаграммных рядов) на концах пропагаторных линий  $D$  и  $G_{\uparrow}$  появляются «полные» шайбы  $\langle B_i^{+-} \rangle$  и  $\langle F_i^{+0} \rangle$ , а на конце линии  $G_{\downarrow}$  вместо «полной» шайбы  $\langle F_i^{-0} \rangle$  возникает «неполная» шайба  $\langle \bar{F}_i^{-0} \rangle$  [20], точное значение которой неизвестно.

В данной работе мы зададим иерархию с помощью следующего набора правил: 1) спаривающими являются операторы  $X^{+-}$ ,  $X^{+0}$ ,  $X^{-0}$  («приоритетная тройка»); 2) спаривание начинается с принадлежащего «приоритетной тройке» внешнего оператора (т.е. входящего в вычисляемую функцию Грина, а не в  $H_{int}$ ); 3) если появившийся в результате спаривания оператор принадлежит «приоритетной тройке», то на следующем шаге он является спаривающим; 4) в противном случае спаривающим является его партнер по  $H_{int}$ , если, конечно, он существует (т.е. не был спарен ранее) и принадлежит «приоритетной тройке»; 5) в противном случае спаривающим является оператор, принадлежащий «приоритетной тройке» и входящий в тот  $H_{int}$ , который ранее уже участвовал в спаривании.

Легко убедиться, что в заданной иерархии (благодаря пункту 2) происходит полное «ужирнение» всех трех шайб, т.е. жирным точкам на концах пропагаторных линий  $D$ ,  $G_{\uparrow}$ ,  $G_{\downarrow}$  в результате отвечают соответственно величины

$$\langle B_i^{+-} \rangle = n_{\uparrow} - n_{\downarrow}, \quad \langle E_i^{+0} \rangle = 1 - n_{\downarrow}, \quad \langle E_i^{-0} \rangle = 1 - n_{\uparrow}, \quad (9)$$

где  $n_{\sigma} = \langle X_i^{\sigma\sigma} \rangle = \langle n_{i\sigma} \rangle$  — электронные концентрации с фиксированным спином ( $n_{\uparrow} + n_{\downarrow} = n$ ).

Заданную нами иерархию будем далее называть «шайбовой». Заметим, что в рамках «шайбовой» иерархии диаграммная техника с  $X$ -операторами, по-видимому, наиболее близка к популярному в модели Хаббарда методу расцепления двухвременных функций Грина, при использовании которого всегда возникают только «полные» шайбы (9) [16,17].

## 2. Приближение RPA-типа

Анализ возникающих в низших порядках теории возмущений по  $H_{int}$  диаграмм показывает, что в «шайбовой» иерархии можно сразу же произвести элементарное суммирование диаграмм, которое приводит к отвечающему приближению «Хаббард-1» [1] (переписанному в ды-

рочном представлении) «ужирнению» электронных пропагаторов  $G_\uparrow$  и  $G_\downarrow$

$$G_\sigma^0(k) = \frac{1}{i\omega_k + E_\sigma^0(k)}, \quad (10)$$

где

$$E_\sigma^0(k) = (1 - n_{-\sigma})\varepsilon(k) + \varepsilon_\sigma, \quad (11)$$

$$\varepsilon(k) = t \sum_\delta \exp(ik\delta) \quad (12)$$

затравочный электронный спектр ( $\delta$  нумерует ближайших соседей в кристаллической решетке),  $k = (k, i\omega_k)$  — четырехимпульс,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\omega_k$  — дискретная частота [18,24].

Дальнейший анализ бесконечных диаграммных рядов для функций Грина (5)–(7) позволяет сделать вывод о том, что все они имеют дайсоновский вид и описываются следующими общими выражениями:

$$\Psi_\sigma(k) = \frac{(1 - n_{-\sigma}) + \Lambda_\sigma(k)}{i\omega_k + E_\sigma^0(k) - \Sigma_\sigma(k)}, \quad (13)$$

$$\Phi(k) = \frac{(n_\uparrow - n_\downarrow) + \Lambda(k)}{i\omega_k - \hbar - \Sigma(k)}, \quad (14)$$

где  $\Sigma$  и  $\Lambda$  — собственно энергетическая и концевая части; первая из них определяет полюс функции Грина, а вторая — вычет в этом полюсе. В данной работе нас интересуют лишь квазичастичные спектры (электронный и магنونный), которые получаются из полюсов соответствующих функций Грина; поэтому концевые части мы далее рассматривать не будем.

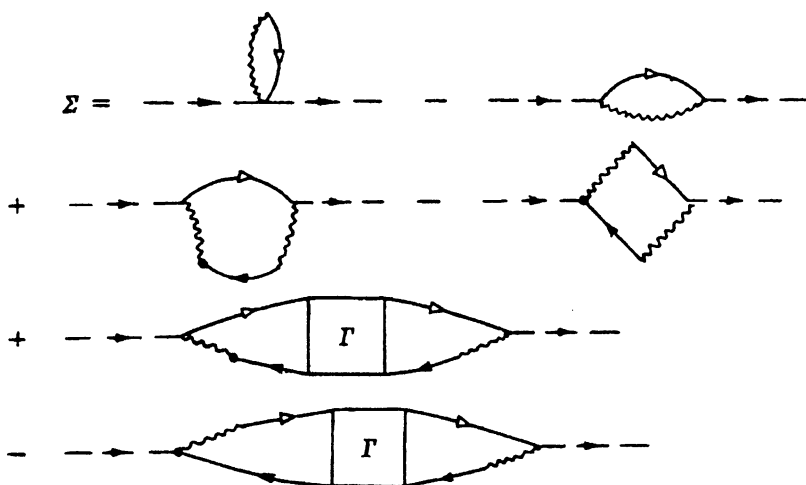


Рис. 1. Графическое представление магنونной собственно энергетической части  $\Sigma$  в приближении RPA-типа в рамках «шайбовой» иерархии.

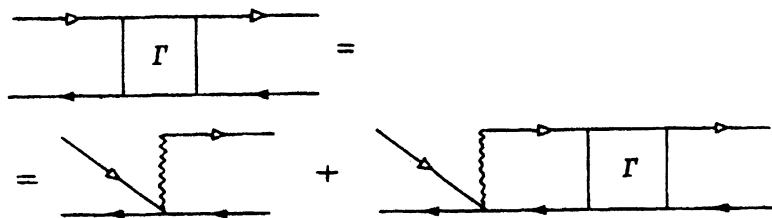


Рис. 2. Графическое уравнение Бете-Солпитера для электрон-электронной вершинной части  $\Gamma$ .

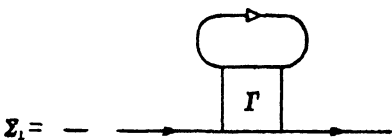


Рис. 3. Графическое представление электронной собственно энергетической части  $\Sigma_1$  в приближении RPA-типа в рамках «шайбовой» иерархии.

Приближение хаотических фаз (RPA) заключается в суммировании всех возникающих электронных петель (или, иначе говоря, всех антипараллельных электрон-электронных лестниц). Диаграммный вид магной собственно энергетической части в приближении RPA-типа представлен на рис. 1, а графическое уравнение Бете-Солпитера, которому удовлетворяет электрон-электронная вершинная часть  $\Gamma$ , приведено на рис. 2. Электронным пропагаторным линиям на рис. 1 и 2 соответствуют величины

$$G_\sigma(k) = \frac{1}{i\omega_k + E_\sigma^0(k) - \Sigma_\sigma(k)}, \quad (15)$$

где электронные собственно энергетические части  $\Sigma_\sigma$  тоже берутся в приближении RPA-типа. Диаграммный вид величины  $\Sigma_1$  представлен на рис. 3.

После решения изображенного на рис. 2 уравнения Бете-Солпитера получаем, что представленным на рис. 1 и 3 графическим выражениям отвечают следующие аналитические соотношения:

$$\Sigma(k) = [Q_1(k) - Q_2(k)] + (1 - n_\uparrow) \left\{ S_2(k) - \frac{1 - R_2(k)}{1 - R_1(k)} S_1(k) \right\}, \quad (16)$$

$$\Sigma_1(k) = -\frac{T}{N} \sum_p \frac{\varepsilon(\mathbf{p}) G_\uparrow(p)}{1 - R_1(p - k)}, \quad (17)$$

где видны обозначения, соответствующие электронным петлям

$$\begin{pmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{pmatrix} = \frac{T}{N} \sum_p \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{p}) \\ \varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \end{pmatrix} G_\uparrow(p), \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} R_1(k) \\ R_2(k) \\ S_1(k) \\ S_2(k) \end{pmatrix} = \frac{T}{N} \sum_p \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{p}) \\ \varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \\ \varepsilon(\mathbf{p})\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \\ \varepsilon^2(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \end{pmatrix} G_\uparrow(p) G_1(p - k). \quad (19)$$

### 3. Насыщенный ферромагнетизм

Рассмотрим теперь состояние насыщенного ферромагнетизма при  $T = 0$ . В этом случае справедливы соотношения

$$n_{\uparrow} = n, \quad n_{\downarrow} = 0, \quad (20)$$

т.е. все электроны имеют спин  $\uparrow$  и являются эффективно свободными, вследствие чего  $\uparrow$ -электронный пропагатор принимает вид

$$G_{\uparrow}(k) = \frac{1}{i\omega_k + \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu}, \quad (21)$$

а уравнение для химического потенциала записывается в виде

$$n = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} f[\varepsilon(\mathbf{k})], \quad (22)$$

где  $f[\varepsilon]$  — функция Ферми.

Если теперь  $\downarrow$ -электронный пропагатор взять в приближении «Хаббард-1» (10), а  $\uparrow$ -электронный — в своем точном виде (21), то из (19) с учетом (11) и (20) после суммирования по частотам получим

$$R_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\varepsilon(\mathbf{p})f[\varepsilon(\mathbf{p})]}{i\omega_k + \varepsilon(\mathbf{p}) - (1-n)\varepsilon(\mathbf{p}-\mathbf{k})}. \quad (23)$$

В статическом приближении ( $i\omega_k = 0$ ) вблизи половинного заполнения ( $1-n \ll 1$ ) соотношение (23) с учетом (22) принимает вид

$$R_1(k) = n. \quad (24)$$

Подставляя (17), (21) и (24) в (15), с учетом (11) и (20) после суммирования по частотам получаем

$$G_{\downarrow}(k) = \frac{1}{i\omega_k + E_1(\mathbf{k}) - \mu}, \quad (25)$$

где

$$E_1(\mathbf{k}) = (1-n)\varepsilon(\mathbf{k}) + \Delta, \quad (26)$$

$$\Delta = -\frac{I(\mu)}{1-n}, \quad (27)$$

$$I(\varepsilon) = \int_{-W}^{\varepsilon} \varepsilon' \rho(\varepsilon') d\varepsilon', \quad (28)$$

$W = zt$  — полуширина определяемой спектром  $\varepsilon(\mathbf{k})$  затравочной электронной энергетической зоны ( $z$  — число ближайших соседей в кристаллической решетке), а  $\rho(\varepsilon)$  — электронная плотность состояний в этой зоне.

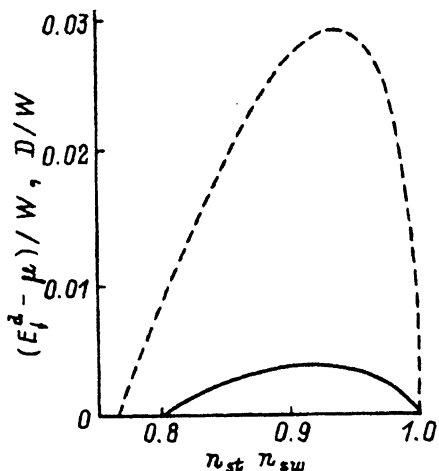


Рис. 4. Зависимость величин  $(E_1^d - \mu)/W$  (штриховая линия) и  $D/W$  (сплошная линия) от электронной концентрации  $n$  в случае насыщенного ферромагнетизма при  $T = 0$  для эллиптической плотности состояний (39).

Как видно из (14), спектр спиновых волн  $\omega(\mathbf{k})$  определяется уравнением

$$\omega(\mathbf{k}) = \Sigma(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})). \quad (29)$$

Подставляя (16) в (29), с учетом (18)–(22) и (25)–(28) после суммирования по частотам и разложения по малым  $\mathbf{k}$  ( $|\mathbf{k}| \ll 1$ ), получаем

$$\omega(\mathbf{k}) = Dk^2, \quad (30)$$

где

$$D = \frac{1-n}{6} \left\{ \Delta + 2Z - 2(1-n)Y + \frac{L_2}{1+L_1} [1 + 2(1-n)X] \right\}, \quad (31)$$

$$L_\nu = \int_{-W}^{\mu} \frac{\varepsilon^\nu \rho(\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon)} d\varepsilon, \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \int_{-W}^{\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} \frac{I(\varepsilon)}{\zeta^2(\varepsilon)} d\varepsilon, \quad (33)$$

$$\zeta(\varepsilon) = \Delta - n\varepsilon, \quad (34)$$

а химический потенциал  $\mu$  находится из уравнения

$$n = \int_{-W}^{\mu} \rho(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (35)$$

Таким образом, мы вычислили  $\downarrow$ -электронный (26) и магнонный (30) спектры. В терминах этих спектров критерии устойчивости насыщенного ферромагнетизма относительно стонеровских (электронных)



и спин-волновых (магнонных) возбуждений имеют соответственно следующий вид:

$$E_1^d - \mu > 0, \quad (36)$$

$$D > 0, \quad (37)$$

где

$$E_1^d = -(1 - n)W + \Delta \quad (38)$$

— нижняя граница определяемой спектром  $E_1(\mathbf{k})$   $\downarrow$ -электронной энергетической зоны.

Результаты численного расчета по формулам (27), (28), (38) и (31)–(35) в случае эллиптической плотности состояний

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{W^2} [W^2 - \varepsilon^2]^{1/2}, \quad -W < \varepsilon < W \quad (39)$$

представлены на рис. 4. Критерии (36) и (37) вместе с рис. 4 позволяют сделать вывод о том, что относительно стонеровских возбуждений насыщенный ферромагнетизм устойчив при  $n_{st} < n < 1$ , а относительно спин-волновых возбуждений — при  $n_{sw} < n < 1$ , причем  $n_{st} \approx 0.77$  и  $n_{sw} \approx 0.80$ .

Итак, в рамках модели Хаббарда с бесконечным кулоновским взаимодействием мы рассмотрели насыщенный ферромагнетизм, возникающий за счет учтенного в приближении RPA-типа электрон-электронного взаимодействия, и получили критерии его неустойчивости относительно стонеровских (электронных) и спин-волновых (магнонных) возбуждений. Значения найденных из этих двух критериев критических электронных концентраций  $n_{st}$  и  $n_{sw}$  весьма близки друг к другу, что свидетельствует об удовлетворительности приближений, сделанных нами в данной работе (так как при точном решении задачи эти величины, по-видимому, должны совпадать). Вместе с тем оказалось, что критическая концентрация устойчивости насыщенного ферромагнетизма относительно спин-волновых возбуждений  $n_{sw}$  несколько превосходит критическую концентрацию его устойчивости относительно стонеровских возбуждений  $n_{st}$ . Следовательно, истинной критической концентрацией устойчивости насыщенного ферромагнетизма  $n_s$  нужно считать величину  $n_{sw}$ . Таким образом, в случае эллиптической плотности состояний имеем  $n_s \approx 0.80$ . Данный результат находится в хорошем качественном согласии с [15,20,25,26].

Авторы выражают благодарность Ю.А. Изюмову, М.В. Медведеву и М.В. Садовскому.

Данная работа выполнена при поддержке INTAS (грант 93-2492) в рамках программы Международного центра фундаментальной физики в Москве.

#### Список литературы

- [1] J. Hubbard. Proc. Roy. Soc. A276, 1365, 238 (1963).
- [2] Л.И. Хомский. ФММ 29, 1, 31 (1970).
- [3] Ю.А. Изюмов, Н.М. Плакида, Ю.Н. Скрыбин. УФН 159, 4, 621 (1989).
- [4] Ю.А. Изюмов. УФН 161, 11, 1 (1991).

- [5] Ю.А. Изюмов. УФН **165**, 4, 403 (1995).
- [6] Y. Nagaoka. Phys. Rev. **147**, 1, 392 (1966).
- [7] B. Doucot, X.G.Wen. Phys. Rev. **B40**, 4, 2719 (1989).
- [8] Y. Fang, A.E. Reckenstein, E. Dagotto, S. Schmitt-Rink. Phys. Rev. **B40**, 10, 7406 (1989).
- [9] A. Barbieri, J.A. Riera, A.P. Young. Phys. Rev. **B41**, 16, 11697 (1990).
- [10] G.S. Tian. Phys. Rev. **B44**, 9, 4444 (1991).
- [11] B.S. Shastry, H.R. Krishnamurthy, P.W. Anderson. Phys. Rev. **B41**, 4, 2375 (1990).
- [12] A.G. Basile, V. Elser. Phys. Rev. **B41**, 7, 4842 (1990).
- [13] W. Linden, D.M. Edwards. J.Phys.: Cond. Matter **3**, 26, 4917 (1991).
- [14] L.M. Roth. Phys. Rev. **184**, 2, 451 (1969).
- [15] W. Nolting, W. Borgiel. Phys. Rev. **B39**, 10, 6962 (1989).
- [16] Ю.А. Изюмов, Б.М. Летфулов, Е.В. Шипицын. ФТТ **32**, 5, 1561 (1990).
- [17] Ю.А. Изюмов, Б.М. Летфулов, Е.В. Шипицын. ФММ **7**, 90 (1991).
- [18] Yu.A. Izyumov, B.M. Letfulov. J. Phys.: Cond. Matter **2**, 45, 8905 (1990).
- [19] Yu.A. Izyumov, B.M. Letfulov, E.V. Shipitsyn, M. Bartkowiak, K.A. Chao. Phys. Rev. **B46**, 24, 15697 (1992).
- [20] Yu.A. Izyumov, B.M. Letfulov, E.V. Shipitsyn, K.A. Chao. Int. J.Mod. Phys. **B6**, 21, 3479 (1992).
- [21] T. Izuuama, D. Kim, R. Kubo. J. Phys. Soc. Jap. **18**, 7, 1025 (1963).
- [22] Т. Мория. Спиновые флуктуации в магнетиках с коллективизированными электронами. М. (1988). 288 с.
- [23] J. Hubbard. Proc. Roy. Soc. **A285**, 1403, 542 (1965).
- [24] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М. (1962). 444 с.
- [25] M.Yu. Nikolaev, N.V. Ryzhanova, A.V. Vedyayev, S.M. Zubritskii. Phys. Stat. Sol. (b) **128**, 2, 513 (1985).
- [26] Ю.А. Изюмов, Б.М. Летфулов, Е.В. Шипицын. ФММ **79**, 4, 3 (1995).