

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ СТРАННОГО АТТРАКТОРА ДЛЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В КОНТУРЕ С СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОМ

© А. М. Солoduха, Л. П. Нестеренко

Воронежский государственный университет,
394693 Воронеж, Россия
(Поступила в Редакцию 26 апреля 1995 г.
В окончательной редакции 22 января 1996 г.)

Как было показано в [1], нелинейное поведение последовательного колебательного контура, где роль нелинейного элемента играет конденсатор из сегнетоэлектрического кристалла, может быть описано с помощью одномерного отображения вида $x_{n+1} = f(x_n)$, связывающего значения величин тока в моменты времени nT и $(n+1)T$, где T — период колебаний генератора. Данное отображение является отображением первого возвращения, или отображением процесса следования [2], и определяется функцией f , которая для нашего случая имела вид полинома четвертой степени

$$x_{n+1} = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + a_4 x_n^4. \quad (1)$$

Однако полученные коэффициенты требовали уточнения, так как расчеты с ними не в полной мере отвечали экспериментальным фактам.

В данной работе был проведен анализ поведения функции отображения первого возвращения при изменении значений коэффициентов и свободного члена. Как оказалось, даже незначительные изменения коэффициентов приводят к качественно новым колебательным процессам и позволяют моделировать все наблюдаемые в эксперименте режимы: от субгармоник с $2T$, $3T$, $4T$, $6T$, $8T$ и т. д. (где T — период задающего генератора) до перемежаемости и хаоса.

На рис. 1 приведены данные, полученные при изменении значений только свободного члена a_0 для исходной функции

$$x_{n+1} = -0.41 + 10.64x_n - 12.79x_n^2 + 5.03x_n^3 - 0.59x_n^4. \quad (2)$$

Общее число итераций достигало пяти тысяч. Начальное значение для x_0 выбиралось всегда равным 0.9. Следует отметить, что на графиках субгармоник наблюдается большее число точек, чем кратность

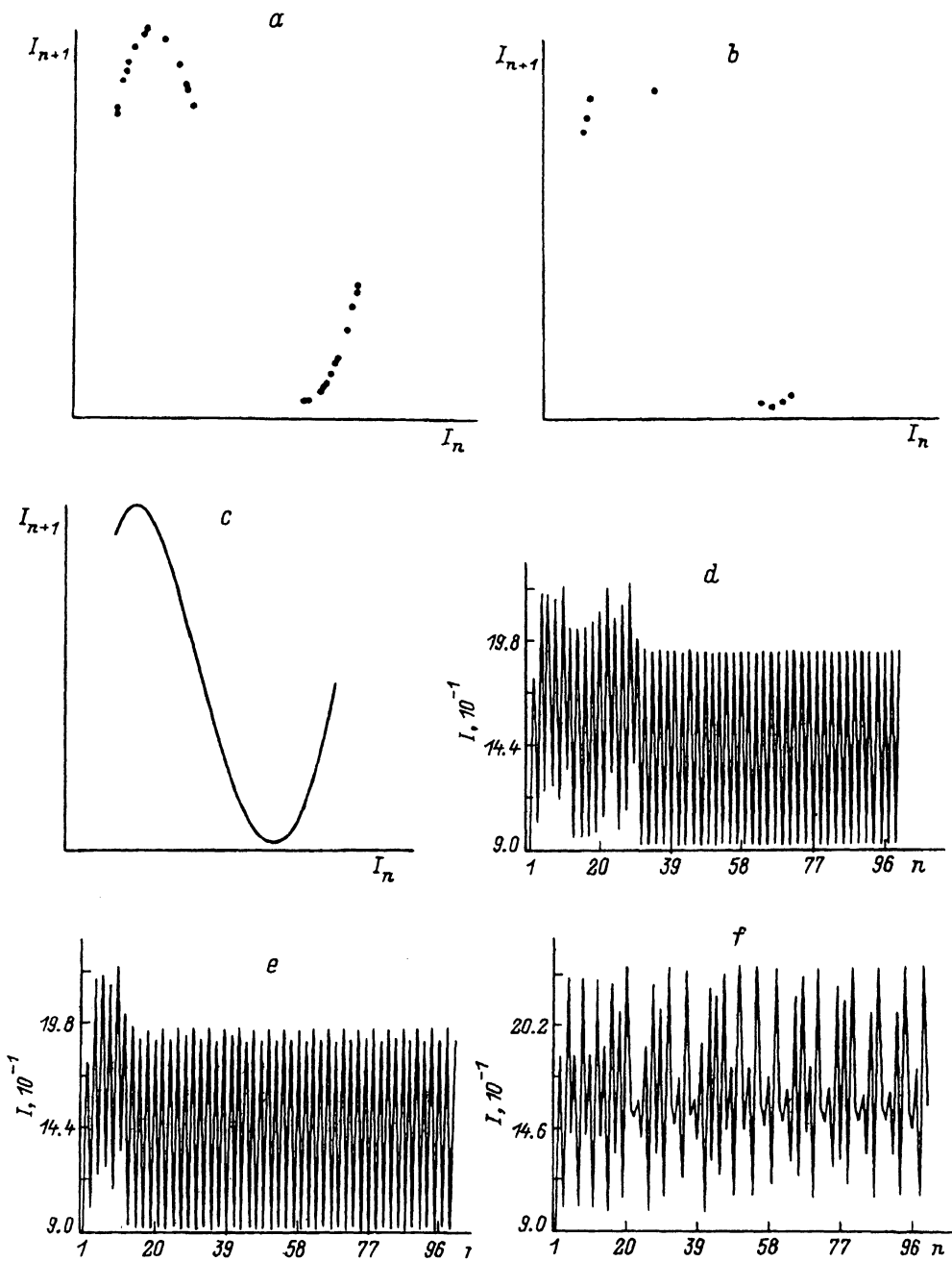


Рис. 1. Графики функции первого возвращения (а-с) и соответствующие им итерационные зависимости (d-f) для полинома согласно формуле (2) при различных значениях a_0 .

a_0 : а, d — 0.5 (удвоение), б, е — 0.52 (учетверение), с, f — 0.41 (хаос).

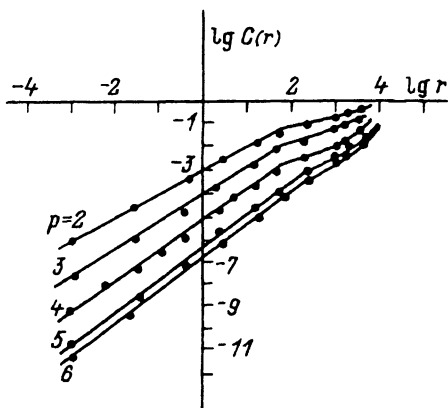


Рис. 2. График зависимости $\lg(C(r))$ от $\lg(r)$ для различных значений p для определения фрактальной размерности странного аттрактора.

периода. Это объясняется тем, что выход на основной режим осуществляется не сразу, а после приблизительно десяти итераций переходного периода.

Для хаотического режима нами была проведена оценка геометрической характеристики странного аттрактора. Как показано в [2], исходя из одной зависящей от времени переменной $x(t)$, можно восстановить траекторию в p -мерном фазовом пространстве, выбирая в качестве координат величины $x(t)$, $x(t + \tau)$, $x(t + 2\tau)$, ..., $x(t + (p - 1)\tau)$, где τ — надлежащим образом выбранная временная задержка, т. е. в данном случае время дискретизируется. Для точек, лежащих на аттракторе, существует пространственная корреляция, которую можно охарактеризовать с помощью функции $C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/m^2) \sum_{i,j=1}^m H(r - |x_i - x_j|)$, где

H — функция Хэвисайда, r — радиус гиперсферы. Можно показать, что $C(r) \sim r^\nu$, где ν — фрактальная (корреляционная) размерность.

Если исходить из дискретных значений x_n , полученных по итерационной процедуре, то можно построить зависимость $\lg C(r)$ от $\lg r$ для различных значений p , а по наклону графика (рис. 2) найти значение ν . Как видно из рис. 2, наклон графиков перестает возрастать при $p \geq 5$, что подтверждает наше предположение о детерминированности хаоса и позволяет определить фрактальную размерность странного аттрактора, т. е. значение $\nu = 1.43 \pm 0.05$ для одной из комбинаций коэффициентов исходного полинома.

Для других комбинаций коэффициентов, которые позволяют моделировать «развитый» хаос, т. е. прерывающийся на протяжении пяти тысяч итераций хаотический режим, значения в пределах погрешности расчета не изменяются.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку при проведении данных исследований (грант № 95-02-04548-а).

Список литературы

- [1] Солодуха А.М., Губанова Ж.А. ФТТ **36**, 4, 1177 (1994).
- [2] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М. (1991). 368 с.