

## ИНЕРЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ КОЛЬЦЕ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ВРАЩЕНИИ

© Н.А.Печин, А.И.Головашкин, Г.М.Гуро

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,  
117924 Москва, Россия  
(Поступила в Редакцию 5 июля 1995 г.  
В окончательной редакции 18 декабря 1995 г.)

Рассмотрено влияние инерции сверхпроводящих электронов на возникновение (изменение) магнитного поля в неравномерно вращавшемся сверхпроводящем кольце. Показано, что в установившемся состоянии вращения (после ускорения или торможения) магнитное поле в кольце определяется кинетической индуктивностью кольца, т. е. инерцией сверхпроводящих электронов.

Инертность изменения тока в металлическом проводнике при приложении переменного напряжения или изменении постоянного напряжения определяется в общем случае не только магнитной (геометрической) индуктивностью, но и кинетической индуктивностью, обусловленной инерцией электронов. В металлическом проводнике с нормальной (несверхпроводящей) проводимостью кинетическая индуктивность обычно не проявляется из-за потери импульса электронами при столкновениях с атомами (ионами) кристаллической решетки металла. Тем не менее в металлах с нормальной проводимостью кинетическая индуктивность становится существенной на высоких частотах  $\omega$ , когда  $\omega\tau \gg 1$ , где  $\tau$  — время свободного пробега электрона. Очевидно, что в сверхпроводнике из-за отсутствия рассеяния сверхпроводящих электронов кинетическая индуктивность может при определенных условиях оказаться сравнимой с магнитной индуктивностью или даже превышать ее. В сверхпроводнике нормальные электроны, так же как и сверхпроводящие, имеют массу и, следовательно, вносят вклад в кинетическую индуктивность, которая, однако, подавляется в результате соударений в кристаллической решетке.

Наиболее наглядно инерция электронов может проявиться при неравномерном вращении (ускорении или замедлении) сверхпроводящего кольца или замкнутого соленоида вокруг геометрической оси. Эффект инерции электронов в металлических проводниках в свое время [1] был использован в экспериментах с торможением вращающегося соленоида для доказательства существования электронов в металлах и определения отношения заряда электрона к его массе  $e/m$ . Возникновение магнитного поля во вращающемся односвязном сверхпроводнике рассматривалось в [2,3]. В [4,5] выполнены измерения магнитного

поля в равномерно вращающихся длинных стержнях и полых цилиндрах из разных сверхпроводящих материалов и подтверждена формула Лондона [3] для магнитного поля, возникающего во вращающемся осесимметричном сверхпроводнике. Однако кинетика возникновения магнитного поля при этом не обсуждалась.

Целью настоящей работы является обсуждение влияния инерции электронов на изменение магнитного потока (или тока) в сверхпроводящем кольце в результате неравномерного вращения кольца. При этом рассматриваются изменения магнитного потока относительно внешнего магнитного потока, захваченного кольцом при переходе в сверхпроводящее состояние.

## 1. Уравнение кинетики токов в кольце

Рассмотрим возникновение тока в сверхпроводящем кольце при изменении скорости вращения кольца вокруг своей геометрической оси. Положим, что радиус провода кольца  $r \ll R$ , где  $R$  — радиус кольца. Поэтому будем учитывать только тангенциальные скорость и ускорение. Будем рассматривать токи в кольце, обусловленные движением электронов и ионов кристаллической решетки в лабораторной системе отсчета. За положительное направление тока в кольце примем направление движения провода кольца. При изменении скорости вращения кольца, естественно, возникает магнитное поле, обусловленное гиромангнитным эффектом в толще провода кольца. Однако очевидно, что вклад гиромангнитного поля в магнитное поле, обусловленное движением электронов вдоль провода кольца, незначителен, так как рассматривается кольцо, у которого  $r \ll R$ .

Пусть  $n^-$  — концентрация сверхпроводящих электронов и  $n^+$  — разность концентраций положительных ионов и нормальных электронов. Будем полагать, что последние из-за малого времени рассеяния движутся практически вместе с ионами решетки. Примем, что ионы имеют заряд  $+e$ . Очевидно, что в силу нейтральности провода  $n^- = n^+$ .

При линейной скорости движения провода  $v$  мгновенное значение тока, протекающего через сечение провода, обусловленное движением положительных зарядов  $n^+$ , будет  $I^+ = Sen^+v$ , где  $S = \pi r^2$  — сечение провода кольца. Ток связанных зарядов  $I^+$  создает магнитное поле, поток которого сквозь кольцо есть  $\Phi = (1/c)L_m I^+$ , где коэффициент  $L_m$  имеет размерность индуктивности. При ускорении вращения, т. е. при увеличении скорости  $v$ , изменение магнитного потока через кольцо

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} L_m \frac{dI^+}{dt} = \frac{1}{c} L_m S e n^+ \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Поскольку магнитный поток, создаваемый ускорением связанных зарядов, пронизывает то же кольцо, в котором находятся и сверхпроводящие электроны, в кольце возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ . Под действием этой ЭДС сверхпроводящие электроны придут в движение и создадут ток электронов  $I^-$ . Изменение электронного тока вызовет в свою очередь изменение собственного магнитного потока, компенсирующее, согласно правилу Ленца, изменение внешнего магнитного потока, вызванное ускорением вращения кольца, и как следствие возникновение

ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ . При этом изменение движения электрона будет иметь вид

$$\frac{m}{e} \frac{du}{dt} = -E_c, \quad (2)$$

где  $u$  — скорость движения электрона в неподвижной системе,  $E_c$  — электрическое поле, создаваемое изменением магнитных потоков при изменении скорости движения провода кольца.

Введем ток электронов через поперечное сечение провода  $I^- = -Sen^-u$ , тогда для (2) получим

$$\frac{m}{Se^2n^-} \frac{dI^-}{dt} = E_c. \quad (3)$$

Для замкнутого контура (кольца) уравнение (3) необходимо проинтегрировать по контуру, чтобы связать ток в кольце с ЭДС, действующей в контуре. Умножая на  $dl$  и интегрируя, получим

$$\frac{ml}{Se^2n^-} \frac{dI^-}{dt} = \oint E_c dl = \mathcal{E}_c, \quad (4)$$

где  $l = 2\pi R$  — длина окружности кольца. Полная ЭДС в кольце складывается, как было отмечено выше, из двух компонент: ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ , вызванной изменением тока связанных зарядов, и ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ , возникшей вследствие тока сверхпроводящих электронов. Полную ЭДС, ускоряющую электроны, можно представить в виде

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} \left( L_s \frac{dI^-}{dt} + L_m \frac{dI^+}{dt} \right). \quad (5)$$

Тогда уравнение для тока электронов в ускоренно вращающемся кольце примет вид

$$\left( \frac{mc^2l}{Se^2n^-} + L_s \right) \frac{dI^-}{dt} = -L_m Sen^+ \frac{dv}{dt}, \quad (6)$$

где  $L_s$  — магнитная индуктивность кольца. Первый член в скобках имеет размерность индуктивности и представляет собой кинетическую индуктивность

$$L_k = \frac{mc^2l}{Se^2n^-}. \quad (7)$$

## 2. Ускорение вращения кольца до стационарной скорости

Допустим, что при заданной температуре неподвижное сверхпроводящее кольцо ( $v = 0$ ) приводится внешней силой во вращение и ускоряется до стационарной скорости  $v_0$ . При этом начальный ток электронов  $I^- = 0$ , а конечный равен  $I_k^-$ . Интегрирование уравнения (6) в указанных пределах дает

$$(L_k + L_s)I_k^- = -L_m Sen^+ v_0 = -L_m I_k^+,$$

где  $I^+$  — конечный ток связанных зарядов. Индуктивности  $L_m$  и  $L_s$  могут отличаться вследствие различного распределения плотностей токов сверхпроводящих электронов и связанных зарядов по сечению провода. Однако для достаточно тонкого провода и большого радиуса кольца можно положить  $L_m = L_s$ , поэтому

$$I_k^- = -\frac{L_s}{L_k + L_s} I_k^+. \quad (8)$$

Кинетическая индуктивность  $L_k$  зависит от концентрации сверхпроводящих электронов  $n^-$ . Поскольку  $n^-$  зависит от температуры сверхпроводника, то при  $T \rightarrow T_c$  снизу  $L_k$  возрастает и может стать больше  $L_s$ . Так, например, у квадратной ниобиевой петли со стороной 1 мм при  $T \simeq 0.93T_c$  кинетическая индуктивность  $L_k \simeq 4L_s$  [6].

Из (8) следует, что при установившейся скорости вращения кольца ток, обусловленный сверхпроводящими электронами, отличается от тока связанных зарядов из-за наличия кинетической индуктивности, т.е. из-за инерции сверхпроводящих электронов. Полный ток через сечение провода кольца при установившейся скорости вращения и заданной температуре равен

$$I = I_k^- + I_k^+ = I_k^+ \frac{L_k}{L_k + L_s}. \quad (9)$$

Рассмотрим два предельных случая:  $L_k \ll L_s$  и  $L_k \gg L_s$ , что можно достигнуть путем изменения задаваемой температуры сверхпроводника. Допустим, что ток  $I_k^+$  задан и остается неизменным.

а) Пусть  $L_k \ll L_s$ , тогда  $I_k^- = -I_k^+$ , и, следовательно, полный ток через сечение провода  $I = I_k^- + I_k^+ = 0$ . Поэтому при установившейся скорости  $v_0$  магнитное поле в кольце практически будет отсутствовать. Это означает, что электроны увлекаются ЭДС индукции, наведенной изменением тока  $I^+$ , и движутся вместе с ионами кристаллической решетки. В этом случае выполняется закон постоянства магнитного потока в сверхпроводящем кольце.

б) Пусть, далее,  $L_k \gg L_s$ , например, в результате повышения задаваемой температуры сверхпроводящего кольца. Тогда полный ток при  $v = v_0$  в силу малости отношения  $L_s/L_k$  равен  $I = I_k^+$ . Это означает, что из-за инерции и отсутствия столкновений (рассеяния) электроны в кольце остаются неподвижными относительно лабораторной системы отсчета, и полный ток в кольце определяется только движением ионов и нормальных электронов, т.е. током  $I^+ = Sen^+v_0$ . Следовательно, если  $L_k \gg L_s$ , то при достижении постоянной скорости  $v_0$  в кольце возникнет магнитное поле.

Однако при изменении температуры меняется концентрация сверхпроводящих электронов, и как следствие изменяется не только кинетическая индуктивность, но и токи сверхпроводящих электронов и связанных зарядов. Поэтому оба предельных случая строго не реализуются. Поскольку  $n^- = n^+$ , полный ток  $I$  в (9) можно представить в виде

$$I = Sev_0 \frac{n^-}{1 + L_s/L_k} = Sev_0 \frac{n^-}{1 + L_s(Se^2n^-/mc^2l)}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что при  $n^- \Rightarrow 0$  полный ток  $I \Rightarrow 0$ . Следовательно, при  $T$ , близкой к  $T_c$ , ток при установившейся скорости  $v_0$  практически будет отсутствовать. При увеличении  $n^-$ , т. е. при понижении задаваемой температуры ниже  $T_c$ , полный ток сначала увеличивается пропорционально  $n^-$  и затем принимает конечное значение, зависящее от соотношения между  $L_k$  и  $L_s$ . Вследствие того, что при  $T \Rightarrow 0$   $n^- \Rightarrow n$ , кинетическая индуктивность при понижении температуры стремится к конечному значению.

Магнитный поток, возникший в результате ускорения вращения сверхпроводящего кольца до стационарной скорости  $v_0$  равен

$$\Phi = \frac{1}{c} (L_k + L_s) I = \frac{1}{c} L_k S e n^- v_0. \quad (11)$$

Индуктивность  $L_s$  из выражения (11) выпала; следовательно, магнитный поток зависит только от кинетической индуктивности  $L_k$  и определяется инерцией сверхпроводящих электронов. Подставляя в (11) выражение для  $L_k$  из (7), получим для магнитного потока через кольцо

$$\Phi = 2 \frac{mc}{e} A \omega_0, \quad (12)$$

где  $\omega_0 = v_0/R$ ,  $A = \pi R^2$  — площадь, охватываемая кольцом.

### 3. Торможение и остановка вращающегося кольца после перехода в сверхпроводящее состояние

Рассмотрим изменение магнитного потока через кольцо в случае, когда вращающееся металлическое кольцо с нормальной проводимостью охлаждается до некоторой температуры  $T < T_c$  и затем затормаживается до остановки. В этом случае перед началом торможения сверхпроводящие электроны движутся вместе с ионами решетки в одном направлении со скоростью  $v_0$ , так что полный ток в кольце равен нулю. Поэтому в начальном состоянии  $I_a^- = -I_a^+ = -S e n^+ v_0$ . После остановки кольца очевидно, что  $v = 0$  и  $I_k^+ = 0$ . Интегрируя (6) в этих пределах, получим

$$(L_k + L_s)(I_k^- - I_a^-) = L_s I_a^+,$$

и, следовательно, установившийся электронный ток

$$I_k^- = -I_a^+ \frac{L_k}{L_k + L_s}. \quad (13)$$

Поскольку  $I_k^+ = 0$ , то полный ток  $I = I_k^-$ .

Снова рассмотрим два предельных случая:

а) Пусть  $L_k \ll L_s$ , тогда в силу малости отношения  $L_s/L_k$  полный ток  $I = 0$ . Это означает, что после остановки вращения магнитное поле в кольце практически отсутствует, т. е. имеет место закон постоянства магнитного потока через сверхпроводящее кольцо. Это достигается в результате увлечения (торможения) электронов ЭДС индукции, вызванной изменением тока связанных зарядов.

б) Пусть, далее,  $L_k \gg L_s$ , тогда полный ток  $I = -I_a^+$ . При этом условии в результате остановки кольца возникают ток, определяемый движением электронов по инерции с первоначальной скоростью  $v_0$ , и, следовательно, соответствующее магнитное поле.

Однако с изменением температуры сверхпроводника, как было отмечено выше, меняется концентрация сверхпроводящих электронов и, следовательно, кинетическая индуктивность. Поэтому оба предельных случая, так же как и при ускорении, строго не выполняются. Поскольку  $n^- = n^+$ , полный ток в заторможенном сверхпроводящем кольце при заданной температуре равен

$$I = -Sen^-v_0 \frac{L_k}{L_k + L_s} = -Sev_0 \frac{n^-}{1 + L_s(Se^2n^-/mc^2l)}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что с понижением задаваемой температуры ниже  $T_c$  ток в заторможенном кольце возрастает сначала пропорционально  $n^-$  и затем стремится к постоянному значению, зависящему от соотношения между индуктивностями  $L_s$  и  $L_k$ .

Магнитный поток, возникший в результате остановки вращающегося сверхпроводящего кольца, выражается формулой

$$\Phi = -2 \frac{mc}{e} A\omega_0 \quad (15)$$

и отличается от потока в случае ускорения только знаком.

Возможность измерения магнитного потока, возникающего в результате изменения скорости вращения сверхпроводящего кольца, была продемонстрирована в работе [6], посвященной измерению массы куперовских пар в сверхпроводящем ниобие.

#### 4. Гиромагнитное отношение

Вычислим отношение магнитного момента к механическому для заторможенного сверхпроводящего кольца. Магнитный момент кольца с током  $M = AI/c$ . Подставляя  $I$  из (15), получим

$$M = -\frac{\pi}{c} \frac{L_k}{L_k + L_s} Sen^-R^3\omega_0.$$

Механический момент, создаваемый движением электронов по инерции, определяется выражением

$$L = 2\pi Sn^-mR^3\omega_0.$$

Следовательно, для гиромагнитного отношения получим

$$\frac{M}{L} = \frac{e}{2mc} \frac{L_k}{L_k + L_s}.$$

Отсюда следует, что при преобладании кинетической индуктивности, т.е. при  $L_k \gg L_s$ , гиромагнитное отношение приобретает известный вид

$$\frac{L}{M} = -\frac{e}{2mc}. \quad (16)$$

В заключение отметим, что возникновение тока и соответствующего магнитного потока в неравномерно вращавшемся (после ускорения или торможения) сверхпроводящем кольце определяется инерцией сверхпроводящих электронов, проявляющейся при ускорении или торможении кольца. Гиромагнитное отношение в установившемся состоянии движения принимает известное выражение, если кинетическая индуктивность кольца существенно превышает магнитную.

Работа поддержана Российской научно-технической программой «Высокотемпературная сверхпроводимость» (проект № 93016).

#### Список литературы

- [1] Tolman R.G., Stewart T.D. Phys. Rev. **9**, 164 (1917).
- [2] Becker R., Heller G., Sauter F. Z. Phys. **85**, 772 (1933).
- [3] London F. Superfluids. Wiley. N.Y. (1950). V. 1. P. 78.
- [4] Hildebrandt A.F. Phys. Rev. Lett. **12**, 190 (1964).
- [5] Bricman N.F. Phys. Rev. **184**, 460 (1969).
- [6] Cabrera B. In: Superconducting Devices and Their Applications / Ed. H. Koch, H. Lubbig. Springer Proc. in Phys. Springer-Verlag. Berlin (1992). V. 64. P. 326.