

УДК 538.221

©1994

ТЕМПЕРАТУРНО-ЗАВИСИМОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА

С.И. Денисов

В рамках обобщенной классической модели Гейзенберга с локализованными в узлах кристаллической решетки магнитными моментами, взаимодействующими с термостатом и подчиняющимися стохастическим уравнениям прецессии, получено уравнение Ландау–Лифшица с зависящими от температуры параметрами.

1. В основе феноменологического описания динамики намагниченности ферромагнетиков лежит уравнение Ландау–Лифшица [1]. Обычно предполагается, что с изменением температуры структура этого уравнения сохраняется, а изменяются лишь его параметры, включая саму намагниченность. Однако ни условия сохранения структуры, ни температурная зависимость параметров до сих пор неизвестны. Кроме того, фактически отсутствует теоретическая интерпретация обширного пласта экспериментальных данных по температурной зависимости ряда важных с точки зрения приложений характеристик доменных границ [2,3].

Все это ставит задачу построения регулярной процедуры вывода температурно-зависимого уравнения Ландау–Лифшица. В данной работе ее решение в случае двухосного ферромагнетика получено в рамках обобщенной классической модели Гейзенберга с локализованными в узлах кубической решетки магнитными моментами, взаимодействующими между собой и с термостатом.

2. При описании динамики магнитной подсистемы ферромагнетика будем использовать полуфеноменологический подход [4], согласно которому влияние среды (термостата) учитывается посредством включения в уравнения прецессии магнитных моментов \mathbf{m}_s ($|\mathbf{m}_s| = 1$, трехкомпонентный индекс s нумерует узлы решетки) релаксационного слагаемого и теплового магнитного поля $\mathbf{n}_s = \mathbf{n}_s(\tau)$. Эти уравнения выберем в виде «микроскопических» уравнений Ландау–Лифшица

$$\partial \mathbf{m}_s / \partial \tau = -\mathbf{m}_s \times (\mathbf{h}_s + \mathbf{n}_s) - \lambda \mathbf{m}_s \times \mathbf{m}_s \times \mathbf{h}_s, \quad (1)$$

где $\tau = \gamma t M_0$ — безразмерное время, $\gamma (> 0)$ — гиромагнитное отношение, M_0 — намагниченность ферромагнетика при температуре $T = 0$, λ — параметр релаксации, а нормированное на M_0 эффективное магнитное поле \mathbf{h}_s определяется выражением

$$\mathbf{h}_s = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}_s} = \frac{\alpha}{a^2} \Sigma' \mathbf{m}_{s'} + \mathbf{h}_0 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}_s} w(\mathbf{m}_s). \quad (2)$$

Здесь W — полная энергия ферромагнетика в единицах $a^3 M_0^2$, h_0 — внешнее магнитное поле в единицах M_0 , a — период решетки, α — обменная постоянная,

$$w(\mathbf{m}_s) = -(\beta/2)m_{sz}^2 + (\eta/2)m_{sy}^2 \quad (3)$$

— энергия анизотропии магнитного момента \mathbf{m}_s , β и η — константы анизотропии, штрих у знака суммы означает суммирование по ближайшим к s узлам решетки.

Разделение действия термостата на две части имеет смысл, если характерная частота kT/h теплового поля \mathbf{n}_s значительно превышает характерные частоты макроскопической эволюции магнитной подсистемы. В этом случае термостат можно рассматривать как источник гауссовского белого шума, который определяется соотношениями

$$\langle n_{si} \rangle = 0, \quad \langle n_{si}(\tau) n_{pj}(\tau') \rangle = 2d\delta_{sp}\delta_{ij}\delta(\tau - \tau'), \quad (4)$$

где n_{si} — проекции вектора \mathbf{n}_s на оси координат ($i = x, y, z$), d — интенсивность шума, δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, угловые скобки обозначают усреднение по реализациям теплового поля.

В дальнейшем нам понадобится также система стохастических уравнений для полярных $\theta_s \equiv \psi_{s1}$ и азимутальных $\varphi_s \equiv \psi_{s2}$ углов векторов \mathbf{m}_s

$$\partial\psi_{sk}/\partial\tau = F_k\{\psi_s\} + g_{ki}\{\psi_s\}n_{si} \quad (k = 1, 2), \quad (5)$$

следующая из (1). Здесь и далее по дважды повторяющимся скалярным индексам подразумевается суммирование,

$$\begin{aligned} F_1\{\psi_s\} &= -\frac{1}{\sin\psi_{s1}} \left[\frac{\partial}{\partial\psi_{s2}} + \lambda \sin\psi_{s1} \frac{\partial}{\partial\psi_{s1}} \right] W, \\ F_2\{\psi_s\} &= \frac{1}{\sin^2\psi_{s1}} \left[\sin\psi_{s1} \frac{\partial}{\partial\psi_{s1}} - \lambda \frac{\partial}{\partial\psi_{s2}} \right] W, \\ g_{1i}\{\psi_s\} &= \frac{1}{\sin\psi_{s1}} \frac{\partial m_{si}}{\partial\psi_{s2}}, \quad g_{2i}\{\psi_s\} = -\frac{1}{\sin\psi_{s1}} \frac{\partial m_{si}}{\partial\psi_{s1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Известно [5], что система стохастических уравнений (5) описывает многомерный диффузионный марковский процесс, компонентами которого являются все углы ψ_{sk} . Это означает, что их совместная функция распределения P должна удовлетворять уравнению Фоккера–Планда. Однако белый шум в (5) является мультипликативным, поэтому уравнение для P определено неоднозначно [6]. Чтобы найти его общий вид, будем интерпретировать уравнения (5) как результат среднеквадратичного предельного перехода $\delta\tau = \tau_n - \tau_{n-1} \rightarrow 0$ в неявной разностной схеме

$$\delta\psi_{sk}(\tau_n) = F_k\{\psi_s(\tau_{n-1})\}\delta\tau + g_{ki}\{\tilde{\psi}_s\}\delta V_{si}(\tau_n), \quad (7)$$

где

$$\delta\psi_{sk}(\tau_n) = \psi_{sk}(\tau_n) - \psi_{sk}(\tau_{n-1}), \quad \tilde{\psi}_{sk} = \zeta\psi_{sk}(\tau_n) + (1 - \zeta)\psi_{sk}(\tau_{n-1}), \quad (8)$$

$0 \leq \zeta \leq 1$, а приращения винеровских процессов $V_{si}(\tau)$ удовлетворяют условиям

$$\langle \delta V_{si}(\tau_n) \rangle = 0, \quad \langle \delta V_{si}(\tau_n) \delta V_{pj}(\tau_m) \rangle = 2d \delta_{sp} \delta_{ij} \delta_{nm} \delta \tau, \quad (9)$$

которые можно трактовать как дискретный аналог соотношений (4).

Пусть $u(\tau) = u(\dots, \psi_{s,k}(\tau), \dots)$ — дважды дифференцируемая функция своих аргументов, не зависящая явно от времени. В соответствии с (5) ее приращение $\delta u(\tau_n)$ в линейном по $\delta \tau$ приближении может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \delta u(\tau_n) = & \sum_s \frac{\partial u(\tau_{n-1})}{\partial \psi_{sk}(\tau_{n-1})} \left[F_k \{ \psi_s(\tau_{n-1}) \} + g_{ki} \{ \psi_s(\tau_{n-1}) \} \delta V_{si} + \right. \\ & \left. + \zeta g_{lj} \{ \psi_s(\tau_{n-1}) \} \frac{\partial g_{ki} \{ \psi_s(\tau_{n-1}) \}}{\partial \psi_{si}(\tau_{n-1})} \delta V_{si} \delta V_{sj} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s,p} \frac{\partial^2 u(\tau_{n-1})}{\partial \psi_{sk}(\tau_{n-1}) \partial \psi_{pl}(\tau_{n-1})} g_{lj} \{ \psi_p(\tau_{n-1}) \} g_{ki} \{ \psi_s(\tau_{n-1}) \} \delta V_{si} \delta_{pj}. \end{aligned} \quad (10)$$

Усредним обе части соотношения (10). Усреднение правой части проведем в два этапа. Сначала на основании (9) усредним ее по реализациям $\delta V_{si} = \delta V_{si}(\tau_n)$, а затем полученный результат усредним, используя совместную функцию распределения $P(\tau_{n-1})$ величин $\psi_{sk}(\tau_{n-1})$. Усреднение же $u(\tau_{n-1})$ и $u(\tau_n)$ в левой части (10) проведем с функциями распределения $P(\tau_{n-1})$ и $P(\tau_n)$ соответственно. В результате, воспользовавшись произвольностью функции $u(\tau)$, после некоторых преобразований получаем уравнение Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \sum_s \frac{\partial}{\partial \psi_{sk}} \left[- \left(F_k + 2\zeta d g_{li} \frac{\partial g_{ki}}{\partial \psi_{sl}} \right) P + d \frac{\partial}{\partial \psi_{sl}} \left(g_{li} g_{ki} P \right) \right], \quad (11)$$

отвечающее системе уравнений (5). Воспользовавшись, наконец, соотношениями

$$g_{li} \frac{\partial g_{ki}}{\partial \psi_{sl}} = \delta_{kl} \operatorname{ctg} \psi_{s1}, \quad g_{li} g_{ki} = \operatorname{diag}(1, \sin^{-2} \psi_{s1}), \quad (12)$$

уравнение (11) представим в виде

$$\partial P / \partial \tau = \sum_s \hat{L}_s(W, d, \zeta) P, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_s(W, d, \zeta) P = & \frac{\partial}{\partial \theta_s} \left[\frac{\partial W}{\partial \varphi_s} + \lambda \sin \theta_s \frac{\partial W}{\partial \theta_s} - 2\zeta d \cos \theta_s \right] \frac{P}{\sin \theta_s} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \left[\lambda \frac{\partial W}{\partial \varphi_s} - \sin \theta_s \frac{\partial W}{\partial \theta_s} \right] \frac{P}{\sin^2 \theta_s} + d \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_s^2} + \frac{d}{\sin^2 \theta_s} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi_s^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что случай $\zeta = 0$ отвечает интерпретации Ито, а $\zeta = 1/2$ — интерпретации Стратоновича системы стохастических уравнений (5).

Параметр ζ и интенсивность шума d могут быть определены из условия эквивалентности стационарного решения уравнения (13) и распределения Гиббса

$$P_G = C \exp[-W a^3 M_0^2 / kT] \prod_s \sin \theta_s \quad (15)$$

(C — нормировочный множитель). Легко проверить, что это условие будет выполнено, если

$$\zeta = 1/2, \quad d = \lambda kT / a^3 M_0^2. \quad (16)$$

Строго говоря, соотношения (16) имеют место лишь в состоянии термодинамического равновесия, однако, как это принято, мы будем полагать, что они справедливы и для слабонервновесных состояний.

4. Для нахождения температурно-зависимого уравнения движения намагниченности необходимо определить функцию распределения p отдельного магнитного момента. Поскольку рассматриваемая магнитная система неэргодична [7], обычный метод интегрирования P для этой цели не подходит. Поэтому мы найдем сначала уравнение, которому удовлетворяет p . В приближении среднего поля (когда \mathbf{m}_s в (2) заменяются на $\langle \mathbf{m}_s \rangle$) это можно сделать методом Новикова-Кляцкина-Татарского [5] прямо из стохастического уравнения прецессии отдельного магнитного момента. В результате получаем уравнение Фоккера-Планка [8]

$$\partial p / \partial \tau = \hat{L}(w, d, 1/2)p \quad (17)$$

с правой частью, определяемой выражением (14), в котором следует опустить индекс s и заменить W на

$$w = -(\alpha/a^2)\Sigma' \mathbf{m} \langle \mathbf{m}_s \rangle - \mathbf{m} \mathbf{h}_0 + w(\mathbf{m}). \quad (18)$$

Точным следствием уравнения (17) является уравнение

$$\frac{\partial \langle \mathbf{m} \rangle}{\partial \tau} = \langle \mathbf{m} \times \frac{\partial w}{\partial \mathbf{m}} \rangle + \lambda \langle \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \frac{\partial w}{\partial \mathbf{m}} \rangle - 2d \langle \mathbf{m} \rangle. \quad (19)$$

Чтобы оно стало замкнутым относительно $\langle \mathbf{m} \rangle$, необходимо выразить средние значения векторных произведений через $\langle \mathbf{m} \rangle$. В общем случае для этого следует решить уравнение (17). Однако если временной масштаб τ_0 изменения $\langle \mathbf{m} \rangle$ удовлетворяет условию $\tau_0 \gg \tau_1 = (2d)^{-1}$ (τ_1 — время продольной релаксации $\langle \mathbf{m} \rangle$), то усреднение в (19) может быть проведено со стационарной функцией распределения p_0 , которая является решением уравнения

$$\hat{L}(w, d, 1/2)p_0 = 0.$$

Для упрощения вычислений будем предполагать, что однородное обменное взаимодействие, энергия которого $w_0 = -(6\alpha/a^2)\mathbf{m}\langle\mathbf{m}\rangle$, превалирует над всеми остальными взаимодействиями в магнитной системе и выполняется условие $\varepsilon = (\lambda/d) \max|w_1| \ll 1$ ($w_1 = w - w_0$). Тогда усреднение в (19) (кроме последнего члена уравнения) может быть проведено с функцией распределения

$$p_0 = \frac{(\bar{m}/r) \sin \theta}{4\pi \operatorname{sh}(\bar{m}/r)} \exp(\mathbf{m}\langle\mathbf{m}\rangle/r), \quad (20)$$

($\bar{m} = |\langle\mathbf{m}\rangle|$, $r = a^2 d/6\alpha\lambda$), записанной в главном по параметру ε приближении. Чтобы в уравнении (19) учесть все величины, пропорциональные λ , последний член должен быть усреднен с функцией распределения $(1 - \lambda w_1/d)p_0$.

5. Используя при вычислении средних значений в (19) формулы

$$\langle m_i m_j \rangle = \langle m_i \rangle \langle m_j \rangle f_1 + r \delta_{ij},$$

$$\langle m_i m_j m_k \rangle = \langle m_i \rangle \langle m_j \rangle \langle m_k \rangle (1 - 5r f_1) / \bar{m}^2 + (\langle m_i \rangle \delta_{jk} + \langle m_j \rangle \delta_{ki} + \langle m_k \rangle \delta_{ij}) r f_1 \quad (21)$$

и переходя к непрерывному приближению и размерным переменным, из (19) получаем температурно-зависимое уравнение Ландау-Лифшица с релаксационным слагаемым в форме Гильберта

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \frac{\lambda^*}{M} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (22)$$

Здесь $\mathbf{M} = M_0 \langle \mathbf{m} \rangle$ — намагниченность ферромагнетика,

$$\mathbf{H} = -\frac{\delta}{\delta \mathbf{M}} \int \bar{W} dV = \alpha \Delta \mathbf{M} + \mathbf{H}_0 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \bar{w}(\mathbf{M}),$$

$$\bar{W} = (\alpha/2)(\nabla \mathbf{M})^2 - \mathbf{M} \mathbf{H}_0 + \bar{w}(\mathbf{M}),$$

$$\bar{w}(\mathbf{M}) = M_0^2 \langle w(\mathbf{m}) \rangle = -(\beta^*/2) M_z^2 + (\eta^*/2) M_y^2 \quad (23)$$

— эффективное магнитное поле, плотность полной энергии ферромагнетика и плотность энергии анизотропии соответственно. Температурные зависимости параметров $\beta^* = \beta f_1$, $\eta^* = \eta f_1$ и $\lambda^* = \lambda f_2$ определяются соотношениями

$$f_1 = (1 - 3r)/\bar{m}^2, \quad f_2 = (1 - r)/\bar{m}, \quad (24)$$

где величина \bar{m} удовлетворяет хорошо известному уравнению теории среднего поля

$$\bar{m} = \operatorname{ctg}(\bar{m}/r) - r/\bar{m}, \quad (25)$$

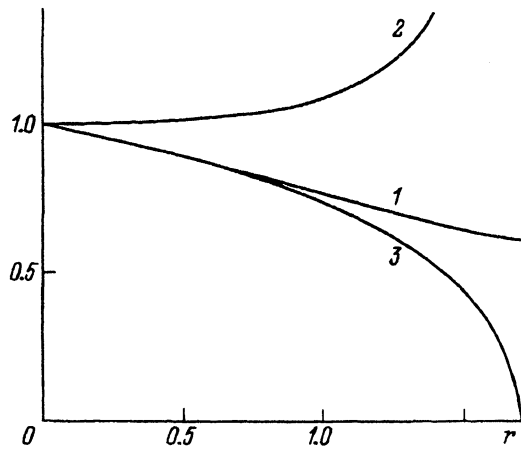


Рис. 1. Графики зависимостей $f_1(1)$, $f_2(2)$ и $\bar{m}(3)$ от r .

которое имеет ненулевое решение при $0 \leq r < 1/3$ (условие $r = 1/3$ определяет температуру Кюри ферромагнетика T_c). Графики зависимостей f_1 , f_2 и \bar{m} от $r = T/3T_c$ показаны на рис. 1.

На основании полученных выше результатов может быть рассчитана температурная зависимость любой магнитной характеристики двухосного ферромагнетика. В качестве примера на рис. 2 приведены температурные зависимости таких характеристик блоховской доменной границы (нормированных на их значения при $T = 0$), как подвижность μ , ширина Δ и поверхностная энергия σ , определяемые соотношениями

$$\mu = (f_1 f_2^2)^{-1/2}, \quad \Delta = f_1^{-1/2}, \quad \sigma = \bar{m}^2 f_1^{1/2}. \quad (26)$$

Соответствующие экспериментальные зависимости [3], полученные на гранатах в области температур, превышающих температуру магнитной компенсации, качественно подтверждают расчетные.

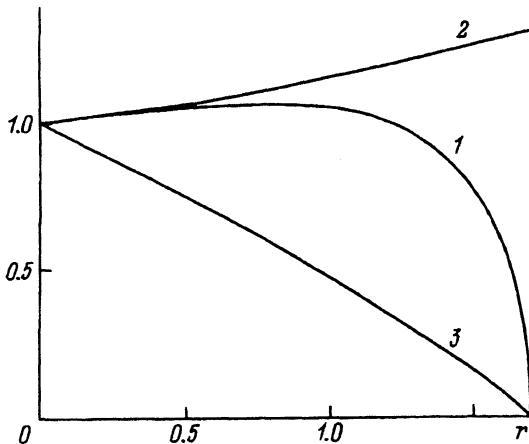


Рис. 2. Графики зависимостей $\mu(1)$, $\Delta(2)$ и $\sigma(3)$ от r .

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Ландау Л.Д. Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 128-143.
- [2] Малоземов А., Слозуски Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. М.: Мир, 1982. 384 с.
- [3] Рандошкин В.В., Червоненкис А.Я. Прикладная магнитооптика. М.: Энергоатомиздат, 1990. 320 с.
- [4] Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. 368 с.
- [5] Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
- [6] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 400 с.
- [7] Гинзбург С.Л. Необратимые явления в спиновых стеклах. М.: Наука, 1989. 152 с.
- [8] Барьяхтар В.Г., Денисов С.И. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 5. С. 5-7.

Сумский государственный университет

Поступило в Редакцию
12 апреля 1994 г.