

01;07  
©1993

## ФАЗОВЫЕ ФОРМИРОВАТЕЛИ ЭРМИТОВЫХ МОД В ДИФРАКЦИОННЫХ ПОРЯДКАХ

*В.В.Котляр, И.В.Никольский, В.А.Сойфер*

В [1] подробно рассматривались новые дифракционные оптические элементы, названные моданами, которые, в частности, предназначены для разветвления освещающего пучка на несколько пучков (каналов), позволяющих возбуждать или анализировать несколько мод или групп мод параллельно и одновременно. Такие моданы названы многоканальными. Они могут быть использованы для параллельного ввода излучения в набор волокон.

Однако функция пропускания такого многоканального модана, разветвление мод в котором достигается путем голографической записи каждой моды со своей несущей пространственной частотой, в общем случае является амплитудно-фазовой функцией и для записи ее на чисто фазовый носитель (среду) используется метод кодирования [2], который приводит к появлению дополнительных (неинформативных) дифракционных порядков, снижающих энергетическую эффективность.

В данной работе предлагается итеративный метод расчета высокоэффективных фазовых многоканальных моданов, которые формируют эрмитовы пучки в заданных дифракционных порядках с требуемым распределением энергии по порядкам.

Требуется найти фазовую функцию  $\varphi(x)$ , которую можно с заданной точностью представить в виде суммы

$$A_0(x)e^{i\varphi(x)} = \sum_{n=0}^N C_n P_n(x) e^{-i\alpha_n x}, \quad (1)$$

где  $A_0(x)$  — амплитуда освещающего пучка,  $C_n$  — коэффициенты, модули которых выбираются из условия требуемого распределения энергии по модам,  $P_n(x)$  — функция Эрмита:

$$P_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{2\pi}\right)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad (2)$$

$H_n(x)$  — полиномы Эрмита,  $\alpha_n$  — несущая пространственная частота. Свободными параметрами в (1) являются значения аргументов комплексных коэффициентов  $C_n$ .

## Функции Эрмита ортогональны

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{nm} \quad (3)$$

(где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера) и являются собственными для оператора преобразования Фурье (см. стр. 180 в [3]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)e^{-i\alpha x}dx = (-i)^n \sqrt{2\pi} P_n(\alpha). \quad (4)$$

Используя (4), можно получить следующее равенство:

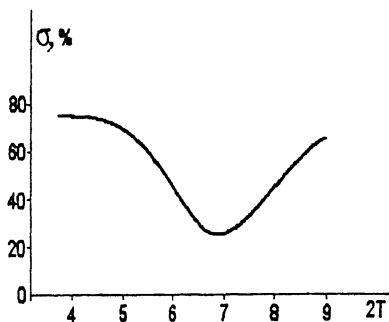
$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-i(\alpha_n - \alpha_m)x}dx = i^{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\beta)P_m(\alpha_m - \alpha_n - \beta)d\beta. \quad (5)$$

Функция в правой части равенства (5) является сверткой функций Эрмита и имеет эффективную ширину, определенную по заданному значению спада этой функции, в два раза превышающую эффективную ширину функции Эрмита большего порядка. Поэтому, выбирая разность между двумя последующими несущими пространственными частотами  $|\alpha_{n+1} - \alpha_n|$  больше удвоенной ширины функции Эрмита, можно приближенно считать функции  $P_n(x) \exp(-i\alpha_n x)$  ортогональными и искать коэффициенты в (1) в виде:

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x)e^{i\varphi(x)}e^{i\alpha_n x}P_n(x)dx, \quad n = \overline{0, N}. \quad (6)$$

Итак, алгоритм поиска фазовой функции оптического элемента, формирующего эрмитовы пучки в заданных порядках дифракции, сводится к следующему. Задаваясь начальной оценкой фазы  $\varphi(x)$ , вычисляются по формулам (6) коэффициенты  $C_n$ . Модули этих коэффициентов заменяются на заданные числа  $B_n$ , а фазы (аргументы) оставляются без изменения. Далее вычисляется сумма (1) и результирующая функция  $F_k(x)$  ( $k$  — номер итерации) подвергается аналогичному изменению: ее модуль заменяется на функцию амплитуды освещающего пучка  $A_0(x)$ , а фаза остается без изменения и является новой оценкой искомой фазы —  $\varphi_k(x)$ . Так продолжается до тех пор, пока ошибка

$$\delta = \left[ \sum_{n=0}^N (|C_{n,k}| - B_n)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{n=0}^N B_n^2 \right]^{-1/2} \quad (7)$$



**Рис. 1.** Значения среднеквадратичной ошибки отклонения рассчитанных мод от истинных для различных радиусов освещающего пучка.

не перестанет заметно уменьшаться. Здесь  $C_{n,k}$  — коэффициенты, рассчитанные на  $k$ -й итерации. Сходимость данного алгоритма может быть доказана (с учетом замечаний на выбор несущих пространственных частот) из условия типа равенства Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_k(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^N |C_{n,k}|^2. \quad (8)$$

Предложенный алгоритм апробировался численно. Дискретность по переменной  $x$  равнялась 0.02, отрезок интегрирования был равен  $[-10, 10]$ , при этом увеличение величины отрезка приводило к изменению значений коэффициентов в третьем знаке после запятой. Число коэффициентов выбиралось равным  $N = 20$ . Амплитуда освещающего пучка была равна  $A_0(x) = \text{rect}(x/2T)$ . Причем диаметр освещающего пучка  $2T$  выбирался оптимальным образом. На рис. 1 показана зависимость среднеквадратичной ошибки отклонения сформированных мод с номерами 3, 4, 5 от истинных. Минимальные искажения мод достигались при  $T = 3.5$ .

Распределение энергии по модам задавалось числами  $B_n$ , которые были равны 1 при  $n = 3, 4, 5$  и равны нулю при остальных  $n$ . На рис. 2,а показана рассчитанная за 10 итераций фаза многоканального модана, ограниченная отрезком  $[-3.5-3.5]$ . Освещение такого оптического элемента плоским пучком света приводит к формированию в фокальной плоскости линзы распределения интенсивности, показанного на рис. 2,б, где нулевой порядок дифракции соответствует эрмитовой функции  $P_4(x)$ , минус первый порядок —  $P_3(x)$ , плюс первый порядок —  $P_5(x)$ . Равенство энергии в этих

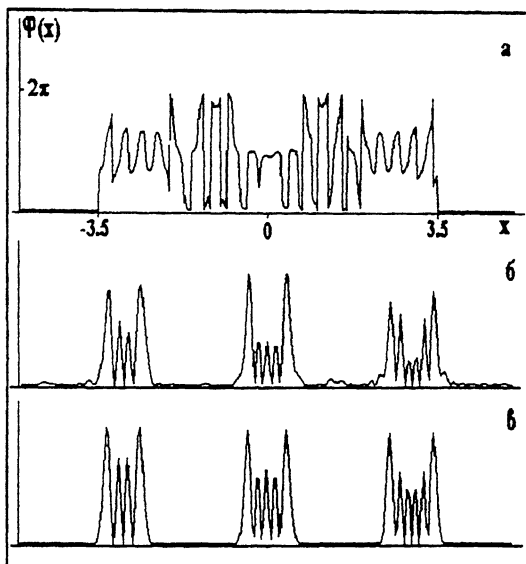


Рис. 2. Рассчитанная за 10 итераций фаза трехканального модана (а), распределения интенсивности эрмитовых мод в фокальной плоскости линзы: сформированных моданом (б) и истинных (в).

трех порядках соблюдается с точностью  $\delta = 8\%$ . На формирование их идет около 98% световой энергии освещающего пучка. Среднее отклонение распределения интенсивности сформированных мод (рис. 2,б) от распределения интенсивности для истинных мод (рис. 2,в) составило 25%.

#### Список литературы

- [1] Голуб М.А., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. // Компьютерная оптика. 1990. В. 8. С. 3-64.
- [2] Голуб М.А., Карпеев С.В. и др. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. В. 3. С. 617-618.
- [3] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 1. М.: Наука, 1974.

Институт систем  
обработки изображений РАН  
Самара

Поступило в Редакцию  
5 июля 1993 г.