Письма в ЖТФ, том 19, вып. 14 26 июля 1993 г.

01;03;04

К МЕХАНИЗМУ ЭРОЗИИ ЭЛЕКТРОДОВ СИЛЬНОТОЧНОЙ ДУГИ

С.О.Ширяева, А.И.Григорьев

Явление эрозии металлических электродов в экспериментах по вакуумному электрическому пробою, при плавлении металла интенсивным электронным лучом или в устройствах для искровой масс-спектрометрии уже несколько десятков лет привлекает к себе внимание исследователей [1–3]. И хотя первоначальный интерес к нему был основан на паразитной роли этого феномена в вышеперечисленных устройствах, в последние годы созданы установки по целенаправленному использованию этого явления для получения порошков тугоплавких металлов [4]. Физическая подоплека этого феномена сводится к плавлению поверхности электродов в местах интенсивного джоулевого тепловыделения и реализации неустойчивости поверхности жидкого металла по отношению к индуцированному электрическому заряду, теоретически исследованной для безграничной плоской границы в работах [5,6] и получившей название неустойчивости Тонкса–Френкеля (НТФ). В [7] теория, развитая в [5,6] для безграничной поверхности, была применима и для анализа неустойчивости заряженной поверхности жидкого металла в круглом бассейне конечной глубины с целью анализа закономерностей реализации вакуумного пробоя. Однако за пределами рассмотрения, проведенного в [7], осталось влияние геометрических размеров бассейна на закономерности развития НТФ. А это влияние может оказаться существенным, если учесть, что в явлении эрозии электродов приходится иметь дело с "бассейнами" радиусами ~ 100 мкм и глубиной порядка единиц мкм [1–3].

1. Рассмотрим идеальную несжимаемую электропроводную жидкость, заполняющую цилиндрическую выемку радиусом R и глубиной h на одном из электродов плоского конденсатора с напряженностью электрического поля между электродами E. В цилиндрических координатах с началом в центре поверхности жидкости, поверхность которой возмущена капиллярным волновым движением $(z = \xi(r, \varphi, t), |\xi| \ll h)$, математическая формулировка задачи об устойчивости жидкости по отношению к поверхностному заряду имеет вид [7,8]:

$$\Delta\psi = 0, \qquad \Delta\Phi = 0; \tag{1}$$

$$z = 0: \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} \approx \frac{\partial\xi}{\partial t}, \qquad \Phi = \text{const}; \tag{2}$$

$$\rho \cdot g \cdot \xi + \rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - \sigma \cdot \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{E_0}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0; \tag{3}$$

$$z \to \infty: \qquad \Phi \to 0; \tag{4}$$

$$z = -h: \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0; \tag{5}$$

$$r = R: \qquad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

где ϕ — потенциал волнового движения жидкости, Φ — добавка к потенциалу электрического поля, происходящая из-за искажения поверхности жидкости от волнового движения $\xi = \xi(r, \varphi, t)$, g — ускорение силы тяжести, σ и ρ — коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости.

Отыскивая решение задачи (1)–(6) в виде разложения по цилиндрическим функциям (по кольцевым капиллярным волнам), несложно получить дисперсионное уравнение, принимающее в безразмерной форме вид

$$\alpha_{np}^2 = \left[-\frac{\mu_{np}}{X} W + \frac{\mu_{np}^2}{X^2} + 1 \right] \cdot \operatorname{th} \beta \tag{7}$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \cdot R}{g}; \quad X = \frac{R}{a}; a^2 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}}; W = \frac{E^2 \cdot a}{4 \cdot \pi \cdot \sigma}; \beta = k \cdot h.$$

Здесь ω — частота капиллярных волн, k — волновое число, a — капиллярная постоянная жидкости; $\mu_{np} = k_{np} \cdot R$ — корни уравнения

$$r = R: \qquad \frac{dJ_n(\mu)}{dr} = 0, \tag{8}$$

$J_n(\mu)$ — цилиндрическая функция первого рода порядка n. Следует отметить, что с целью приближения к реальному имеющему место явлению в рамках использованной модели идеальной жидкости можно условие (6) заменить на условие закрепления жидкости на торце капилляра: $\xi = 0$ при $z = 0$; $r = R$. Это приведет к некоторому изменению спектра собственных значений μ [8].

2. Приравнивая нулю выражение в квадратных скобках уравнения (7), несложно получить критические условия реализации НТФ в анализируемой ситуации. Так, при $X = 1$ (т.е. когда радиус бассейна равен капиллярной постоянной жидкости) критическое условие НТФ в бассейне совпадает с таковым для безграничной поверхности жидкости и имеет вид $W \geqslant 2$. Это условие определяет минимальное значение напряженности поля у поверхности жидкости, при котором имеет место НТФ. При уменьшении поперечных размеров бассейна по сравнению с $r = R$ (при уменьшении X) критическое условие НТФ становится более жестким. Область же значений физических параметров задачи, в которой имеет место НТФ, при фиксированном W определится неравенствами

$$W - \sqrt{W^2 - 4} \leqslant 2 \cdot \frac{\mu_{np}}{X} \leqslant W + \sqrt{W^2 - 4}. \tag{9}$$

В условиях уменьшения размеров бассейна левое из неравенств (9) не имеет физического смысла, так как соответствует увеличению размеров бассейна с увеличением W, и его можно не принимать во внимание.

При фиксированном размере бассейна X (при $X < a$) минимально возможное критическое значение параметра W, при котором реализуется НТФ, можно найти из правого неравенства условия (9) в виде

$$W = W_* = \frac{\mu_{11}}{X} + \frac{X}{\mu_{11}}. \tag{10}$$

Согласно экспериментальным данным [1–3] в реальной ситуации $R \leqslant 0.01$ см, тогда как капиллярная постоянная обычно имеет величину порядка нескольких миллиметров (для меди, например, $a \approx 0.39$ см). Поэтому для рассматриваемой задачи $X \ll 1$. Если еще учесть, что минимальное значение корней μ_{np} уравнения (8) измеряются единицами, то ясно, что в (10) критическое значение параметра $W = W_*$ изменяется с уменьшением X по примерно гиперболическому закону, так как второе слагаемое в (10) представляет собой лишь малую добавку к первому.

Используя выражение (10), можно оценить минимальный размер бассейна, в котором поле заданной величины может вызвать НТФ и эрозию электродов. Так, например, согласно (10), поле $E = 600$ кВ/см может вызвать НТФ на поверхности жидкой меди, если радиус бассейна R не меньше 100 мкм. Полученные значения R вполне согласуются с наблюдаемыми в экспериментах [1–3,7]. Интересно отметить, что при размере бассейна $R \sim 100$ мкм размеры капель жидкого металла, эмитированных на финальной нелинейной стадии НТФ, составляют лишь единицы мкм, что свидетельствует о существенной заостренности вершины неустойчивой капиллярной волны на стадии эмиссии капелек (см., например, фотографии, приведенные в [9]). Следует также учесть вклад в формирование функции распределения капель по размерам явления дробления эмиттированных капелек вследствие их неустойчивости по отношению к собственному заряду, который в описанных условиях эмиссии в соответствии с результатами работы [10] будет превышать критический по Рэлею [10]. Согласно данным экспериментов [3], максимум функции распределения капель по размерам приходится на десятые доли мкм, тогда как капли с радиусами бо́льшими 5 мкм, попадаются весьма редко. Именно такая функция распределения должна получиться в модели эмиссии поверхностью жидкого металла неустойчивых, по Рэлею, капель с радиусами $\approx 4 - \;\; 5$ мкм, распадающихся на более мелкие по закону, описанному в [10].

3. В электрическом поле заданной величины, превышающей критическую для бассейна фиксированного размера, можно найти моду капиллярных волн с наибольшей величиной инкремента неустойчивости, которая и должна определять феноменологию НТФ. Для этого продифференцируем (7) по μ (отвлекаясь от дискретного изменения μ), приравняем получившееся выражение нулю и найдем, что при $W \gg 1$ наибольшим инкрементом будет обладать

мода с $\mu = \mu_0 = 0.75 \cdot W \cdot X$ или, точнее говоря, с тем из решений μ_{np} уравнения (8), которое наиболее близко к μ_0. В экспериментах по вакуумному пробою обычно используют поля с напряженностью порядка единиц МВ/см. При этом параметр действительно $W \gg 1$ (например, при $E = 600$ кВ/см для меди $W \approx 100$).

Подставляя $\mu = \mu_0$ в дисперсионное уравнение (7), несложно найти величину максимального инкремента нарастания неустойчивости. Однако такое упражнение будет иметь лишь методическую ценность, так как в проведенном рассмотрении не была учтена вязкость жидкости, которая в анализируемой ситуации мелкого бассейна с характерным поперечным размером, много меньшим капиллярной постоянной жидкости, должна играть существенную роль во всех динамических процессах. Провести же корректный теоретический учет демпфирующего влияния вязкости в рассматриваемой задаче на основе решения уравнения Навье–Стокса нельзя из-за невозможности удовлетворения всем граничным условиям на твердых стенках.

Следует отметить, что вполне реальна ситуация, когда размер бассейна настолько мал, что при имеющемся поле E, удовлетворяющем (10), изначально неустойчива лишь одна мода капиллярных волн. В этом случае именно ее неустойчивость и приведет к эмиссии капель и эрозии электрода. Здесь следует отметить, что сам процесс развития НТФ связан с перераспределением электрического заряда по поверхности бассейна, увеличением его концентрации в окрестности вершины растущей моды и соответственным возбуждением в окрестности вершины неустойчивости высоких мод с большими инкрементами неустойчивости [11]. Суперпозиция амплитуд всех мод, неустойчивость которых была сгенерирована неустойчивостью исходной моды, как раз и объясняет закономерности временной эволюции НТФ. Ограничение на максимальный номер моды, которая может быть возбуждена в подобном механизме, накладывается вязкостью жидкости [11] или релаксацией вязкости [12].

Список литературы

[1] *Van Straaten M., Gijbels R.//* Intern. J. Mass Spectr. Ion Proc. 1989. V. 92. P. 125–140.
[2] *Liu X.D., Raeymaekers B., Van Espen P., Adams F.* // Analytica Chim. Acta. 1987. V. 195. P. 181–192.
[3] *Swenters K., Verlinden J., Bernard P., Gijbels R.* // Intern. J. Mass Spectr. Ion. Proc. 1986. V. 71. P. 85–112.
[4] *Mahoney J.F., Taylor S., Perel J.* // IEEE Trans. Ind. Appl. 1987. V. IA 23. N 2. P. 197–204.
[5] *Tonks L.* //Phys. Rev. 1935. V. 48. N 6. P. 562–568.
[6] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 348–350.
[7] *Невровский В.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. Вып. 4. С. 20–28.
[8] *Григорьев А.И., Земсков А.А., Лазарянц А.Э.* // ЭОМ. 1991. Вып. 5. С. 35–38.
[9] *Габович М.Д., Порицкий В.Я.* // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 6. С. 320–324.

[10] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
[11] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // ЖВММФ. 1992. Т. 32. Вып. 6. С. 929–938.
[12] *Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П.* и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 10. С. 2211–2213.

Ярославский государственный
университет

Поступило в Редакцию
18 апреля 1993 г.