

01
©1993

АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ТЕПЛОВОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ОБЛАСТИ СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

А.С.Рудый, И.А.Сомова

В схемотехнике известен способ температурной стабилизации тока покоя транзистора при помощи эмиттерного терморезистора, находящегося в тепловом контакте с транзистором. Такое устройство является примером простейшей системы с отрицательной тепловой обратной связью. При высокой степени интеграции элементов современных приборов близкое соседство источника тепла и термочувствительного элемента может стать причиной образования паразитной тепловой обратной связи. Когда коэффициент усиления A по полной петле такой обратной связи превышает некоторую критическую величину A_c , система теряет устойчивость и в ней могут возникнуть автоколебания. Аналитические методы позволяют исследовать процесс возбуждения автоколебаний, но область их применения ограничена требованиями малой нелинейности или малой нелокальности начальных условий. В настоящей работе показана возможность численного анализа динамики системы с распределенной тепловой обратной связью во всей области изменения параметров системы при нулевых начальных условиях.

Общие закономерности возбуждения автоколебаний в системах с внешней тепловой обратной связью удобно исследовать на простейшей модели, показанной на рис. 1. Система состоит из теплопроводящей среды, термостата (так как всякая реальная система диссипативна), термоэлектрического преобразователя, регулятора, источника опорного напряжения и резистивного источника тепла, соединенных в указанной последовательности. Математическая модель системы имеет вид краевой задачи

$$\dot{T}(x, t) = aT''(x, t), \quad T(0, t) = 0 \quad (1)$$

с нелинейным граничным условием обратной связи

$$T'(x, t)|_{x=\delta} = f[u(t) - \alpha T(x_0, t)]\sigma[u(t) - \alpha T(x_0, t)], \quad (2)$$

где a — температуропроводность, $u(t)$ — опорное напряжение, α — коэффициент преобразования температуры в напряжение, δ — функция Хевисайда. Исследуя систему (1) аналитическими методами, можно определить критические параметры, при которых система теряет устойчивость. Если при этом возбуждаются автоколебания, то исследуется режим их возбуждения и зависимость частоты автоколебаний от степени нелинейности системы.

Рассмотрим случай, когда существует стационарное решение $\bar{T}(x)$. Тогда при небольшом отклонении $\tilde{T}(x, t)$ температуры от стационара $\bar{T}(x)$ управляющее воздействие $f[u(t) - \alpha\bar{T}(x_0, t) - \alpha\tilde{T}(x_0, t)]$

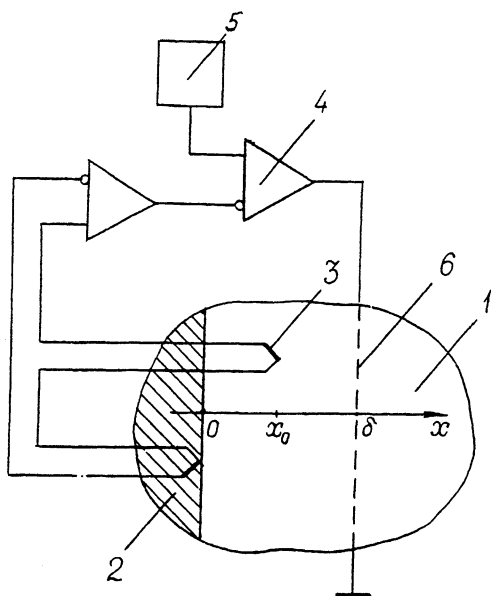


Рис. 1. Система с обратной связью через плоский теплопроводящий слой. 1 — теплопроводящая среда, 2 — термостат, 3 — термоэлектрический преобразователь, 4 — регулятор, 5 — источник опорного напряжения, 6 — источник тепла.

можно разложить в ряд Тейлора по степеням $\tilde{T}(x, t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}'(x, t) \Big|_{x=\delta} &= f' [u(t) - \alpha \bar{T}(x_0)] \tilde{T}(x_0, t) + \\ &+ f'' [u(t) - \alpha \bar{T}(x_0)] \tilde{T}^2(x_0, t) / 2 + \dots \end{aligned} \quad (2a)$$

В работах [1,2] задача (1) исследовалась для случая $u(t) = u_0$, $f^{(n)} = 0$ при $n > 2$, для которого $\bar{T}(x) = \beta \frac{A}{A-2} x/x_0$ и условие (2) может быть представлено в виде

$$\tilde{T}'(x_0, t) \Big|_{x=\delta} = \frac{A}{x_0} \cdot \tilde{T}(x_0, t) + \frac{A(A-2)}{4\beta x_0} \tilde{T}_0^2(x_0, t). \quad (3)$$

Здесь $\beta = u_0/\alpha$, A — обобщенный коэффициент усиления системы. Как было показано в [2], при $A = A_c$ от нулевого состояния равновесия бифуркирует устойчивое периодическое решение вида $T(x, t) = \text{Re} \xi \text{sh}(1+i)kx \exp(i\omega t)$. Волновое число k находится как корень уравнения

$$\frac{\text{ch}(k\delta) \cos(k\delta) + \text{sh}(k\delta) \sin(k\delta)}{\text{ch}(\eta k\delta) \sin(\eta k\delta)} = \frac{\text{ch}(k\delta) \cos(k\delta) - \text{sh}(k\delta) \sin(k\delta)}{\text{sh}(\eta k\delta) \cos(\eta k\delta)}, \quad (4)$$

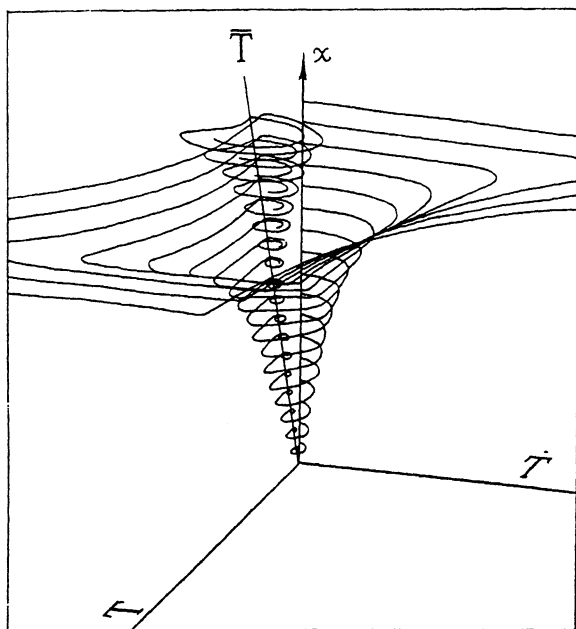


Рис. 2. Траектории изображающих точек системы в фазовом пространстве T, \dot{T}, x .

где $\eta = x_0/\delta$. Например, при $x_0 = \delta/2$, $k\delta = 4.694105$; $A_c = -34.6415$. Зависимость частоты ω и амплитуды ξ от $\varepsilon = (A - A_c)/A_c$ — относительного отклонения A от его критического значения A_c — исследовались в работе [2]. Методом малого параметра ($\varepsilon \ll 1$) были получены следующие соотношения:

$$\omega(\varepsilon) = (1 + 0.15915\varepsilon)\omega_c; \quad (5)$$

$$\xi = \sqrt{\varepsilon/b_2}, \quad b_2 = 0.06641x_0^2W_0^2, \quad W_0 = 1 \text{ м}^{-1}. \quad (6)$$

Поскольку асимптотические методы дают неполную информацию, т.е. не позволяют исследовать поведение системы при большой нелинейности или нелокальности начальных условий, для анализа решений системы (1) при начальном условии $T(x, 0) = 0$ и в области $0 \leq \varepsilon < 1$ использовались численные методы. Как оказалось, применение явной или неявной разностных схем невозможно, так как в первом случае автоколебания возбуждались в докритической, а во втором — в закритической области. Поэтому система (1) аппроксимировалась симметричной шеститочечной неявной схемой:

$$\begin{aligned} T(i, j+1) - 2(1 + 1/Fo)T(i, j+1) - T(i-1, j+1) &= \\ = 2(1 - 1/Fo)T(i, j) - T(i+1, j) - T(i-1, j); \\ T(i, 0) = 0, T(0, j) &= 0; \end{aligned}$$

$$T(N, j) = \frac{A(A-2)}{4\beta n} [\beta - T(n, j)]^2 \sigma [\beta - T(n, j)] + T(N-1, j), \quad (7)$$

где $Fo = a\tau/h^2$ — критерий Фурье, $j\tau = t$; $ih = x$; $hN = \delta$; $hn = x_0$. Схема (7) имеет второй порядок аппроксимации как по h , так и по τ , абсолютно устойчива и решалась методом прогонки. Ее использование позволило наилучшим образом “сшить” аналитические результаты с численными.

Наиболее наглядно динамику системы иллюстрирует ее фазовый портрет, представленный на рис. 2. Так как система является распределенной, то фазовый портрет — это семейство траекторий изображающих точек в пространстве T, \dot{T}, x . Фазовые траектории на рис. 2 соответствуют параметрам $Fo = 0.4$; $n = N/2$; $A = -35$. При включении регулятора изображающие точки, первоначально расположенные на оси x , выходят в фазовое пространство и в системе устанавливается предельный цикл: фазовые траектории наматываются на “экспоненциальную трубу” с осью $T(x) = \beta Ax / (A-2)x_0$. В реальной системе управляющее воздействие всегда ограничено, например напряжением питания. Поэтому при большой амплитуде на определенной фазе колебаний может включаться более сильная нелинейность, изменяющая частоту и искажающая форму колебаний. В рассматриваемой модели предполагалось, что ограничено напряжение питания резистивного источника тепла и удельный тепловой поток не может превышать некоторой величины $\lambda[T(N, j) - T(N-1, j)]/h \leq q$. Влияние этой нелинейности наиболее заметно на первых циклах колебаний вблизи источника тепла. Сравнительно небольшие нелинейные искажения колебаний температуры в точке $x = x_0$ обусловлены интенсивным поглощением температурных волн высоких гармоник в теплопроводящей среде, играющей роль фильтра низкой частоты.

В заключение отметим хорошее согласие между численными результатами настоящей работы и данными работы [2], полученными аналитическими методами. В первую очередь это относится к зависимости $A_c(\eta)$ и режиму возбуждения автоколебаний. В полном соответствии с выводами [2] режим возбуждения автоколебаний — мягкий, т.е. $\xi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В области малой надкритичности ($\varepsilon \ll 1$) амплитуда колебаний температуры изменяется как корень из ε (5), а частота — согласно формуле (6). Таким образом, полученные результаты дополняют разработанный ранее алгоритм анализа систем с тепловой обратной связью и позволяют распространить его на область сильной нелинейности системы.

Список литературы

- [1] Алексеев В.П., Биркган С.Е., Бурцев Ю.Н., Рудый А.С., Шехтман С.Н. // ИФЖ. 1987. Т. 52. Вып. 2. С. 255–260.
 [2] Rudyi A.S. // Int. J. Thermophys. 1993. V. 14. N 1. P. 159–172.

Ярославский государственный
университет

Поступило в Редакцию
4 мая 1993 г.