

01
©1993

ОБ ЭФФЕКТЕ УСКОРЕНИЯ ВОЛНЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

С.В.Петровский

Волновые свойства нелинейных диссипативных систем впервые исследовались в [1-3]. Современное состояние проблемы изложено в [4,5]. В данной работе показано, что небольшое по сути изменение постановки классической задачи [1,2] приводит к новому явлению — увеличению скорости распространения фронта возмущения.

Рассмотрим некоторую активную среду, описываемую нелинейным уравнением диффузионно-реакционного типа:

$$\partial_t u = D \partial_{xx}^2 u + (1/\tau) f(u), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — функция, описывающая состояние среды, D — коэффициент диффузии, τ — параметр размерности времени, характеризующий мощность источника, а $f(u)$ — нелинейный источник, описывающий кинетику системы.

Уравнение (1) рассмотрено в работах [1,2] для функции источника, удовлетворяющей следующим требованиям:

$$f(0) = f(1) = 0, \quad f(u) > 0, \quad 0 < u < 1, \quad (2)$$

$$f'(0) > 0, \quad f'(u) < f'(0), \quad 0 < u \leq 1, \quad (3)$$

где было показано, что для начального условия типа “ступеньки” ($u(x, 0) = 1, x > 0; u(x, 0) = 0, x < 0$) в системе асимптотически формируется стационарная бегущая волна, распространяющаяся с постоянной скоростью:

$$v = 2(\alpha D/\tau)^{1/2}, \quad \alpha = f'(0). \quad (4)$$

Если кинетика системы описывается функцией вида (2-3), аналогичная ситуация имеет место также, когда начальное условие представляет собой произвольное локализованное возмущение однородного стационарного состояния $u \equiv 0$. Заметим, что именно такая ситуация наиболее интересна с точки зрения практических приложений (см., например, [6]). Динамика системы в этом случае заключается в постепенном расширении границ области с устойчивым состоянием $u \equiv 1$ и "вытеснении" неустойчивого состояния $u \equiv 0$, соответствующая волна называется волной переключения [5] или импактной [6].

Этот результат получен для случая, когда параметры динамической системы, а следовательно, и коэффициенты в уравнении (1), — суть постоянные величины. Для реальных систем это, вообще говоря, не так. Попытаемся учесть неоднородность характеристик системы, предположив, что в уравнении (1) $\tau = \tau_0(1 + \varepsilon\Phi(x))$, где τ_0 — среднее для данной системы значение τ , $\Phi(x)$ — некоторая функция координат, описывающая локальное отклонение τ от его среднего значения, ε — амплитуда этого отклонения. При этом уравнение (1) уже не имеет решения в виде стационарной волны; характер распространения начального возмущения зависит от вида функции $\Phi(x)$. В данной работе ограничимся случаем, когда $\Phi(x)$ — периодическая функция, и будем предполагать, что период пространственной неоднородности $\delta \ll \Delta_{\text{фр}}$, где $\Delta_{\text{фр}} \sim (D\tau_0)^{1/2}$ — ширина фронта стационарной волны.

В безразмерных переменных $t' = t/\tau_0$; $x' = x/(D\tau_0)^{1/2}$ уравнение (1) имеет вид (штрихи опускаем)

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + f(u)/(1 + \varepsilon\Phi(x)). \quad (5)$$

Уравнение (5) решалось численно конечно-разностным способом для $f(u) = u(1 - u)$ и $\Phi(x) = \sin(2\pi x/\delta)$ при различных значениях ε и δ . Размеры расчетной области выбирались достаточно большими, так что за рассматриваемые времена возмущение не достигало границы; при выборе шага сетки Δx соблюдалось условие $\Delta x/\delta \ll 1$. Область неоднородности располагалась таким образом, что волна успевала сформироваться в однородной зоне. Результаты расчетов показывают, что волновой характер распространения сохраняется даже для значений амплитуды $\varepsilon \sim 1$ ($\varepsilon < 1$); влияние неоднородности приводит лишь к небольшим возмущениям фронта волны.

На рис. 1 представлены кривые зависимости от времени координат различных точек фронта (при $\varepsilon = 0.5$, $\delta/\Delta_{\text{фр}} \cong 0.15$). Кривая 1 показывает зависимость $x_{0.9}(t)$ координаты фронта, для которой величина u составляет 0.9 от амплитуды волны, кривая 2 — зависимость $x_{0.5}(t)$, кривая 3 — зависимость $x_{0.1}(t)$. Для однородной среды с некоторого момента времени эти кривые с большой точностью представляют собой отрезки параллельных прямых, что указывает на образование стационарной волны (выход на асимптотику), при этом тангенс угла наклона этих прямых к оси абсцисс есть скорость волны.

Представляется интересным, что в неоднородной среде скорость фронта больше, чем соответствующая скорость волны в од-

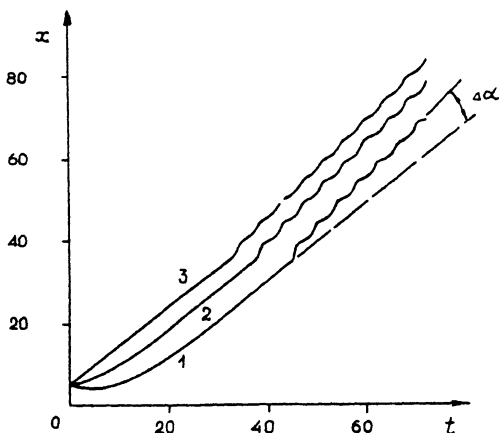


Рис. 1. Зависимость от времени координат различных точек фронта волны в среде с периодической неоднородностью: кривая 1 — $x_{0.9}(t)$, 2 — $x_{0.5}(t)$, 3 — $x_{0.1}(t)$; штриховой линией показана зависимость $x_{0.9}(t)$ для однородной среды. Приращению угла наклона $\Delta\alpha$ отвечает увеличение скорости волны.

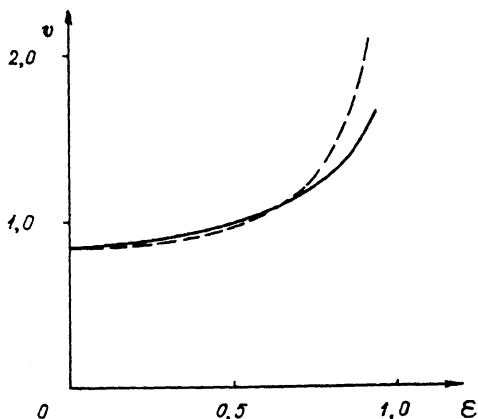


Рис. 2. Зависимость скорости волны от амплитуды неоднородности: сплошная линия — численный эксперимент, пунктирная линия — формула (10).

в однородной среде, определяемая выражением (4) (см. рис. 2, штриховая линия показывает положение кривой $x_{0.9}(t)$ для однородной среды). Для ускорения волны в среде с периодической неоднородностью может быть предложено следующее объяснение. Рассмотрим сначала однородную среду ($\Phi(x) \equiv 0$). Проинтегрировав уравнение (5) по всей области, получаем

$$(dM/dt)_{\text{одн}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u(x, t)) dx, \quad (6)$$

где $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$. В однородной среде волна стационарна, поэтому имеем

$$(dM/dt)_{\text{одн}} \sim v_0. \quad (7)$$

Пусть теперь $\Phi(x) \neq 0$ — функция, осциллирующая с пространственным периодом δ около среднего значения, равного нулю. Тогда, очевидно, можно записать:

$$1/(1 + \Phi(x)) = 1 + \psi(x), \quad (8)$$

где $\psi(x)$ — осциллирует с тем же периодом, но для функции ψ среднее значение отлично от нуля. Проинтегрировав уравнение (5), получим

$$(dM/dt)_{\text{неодн}} = (dM/dt)_{\text{одн}} + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f(u(x, t)) dx. \quad (9)$$

Представим $\psi(x)$ в виде $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1(x)$, где $\psi_0 = \langle \psi(x) \rangle$, а $\psi_1(x)$ осциллирует около среднего значения, равного нулю: $\int \psi_1(x) dx = 0$. Интеграл в (9) распадается на сумму двух интегралов, причем для быстро осциллирующей функции ($\delta/\Delta_{\text{фр}} \ll 1$) вторым из них можно пренебречь. Учитывая, что, как показывают результаты численного моделирования, неоднородность в $\tau(x)$ приводит (для не слишком большой амплитуды) лишь к небольшим возмущениям профиля волны, положим $(dM/dt)_{\text{неодн}} \sim v^{(\text{неодн})}$. Тогда, с учетом (6), (7), имеем

$$v^{(\text{неодн})} \cong v_0(1 + \psi_0). \quad (10)$$

Для $\phi(x) = \sin(2\pi x/\delta)$ имеем $\psi_0 = ((1 - \epsilon^2)^{-1/2}) - 1$.

Зависимость скорости волны от амплитуды неоднородности представлена на рис. 2; сплошная линия — результат, полученный при численном решении уравнения (5), пунктирная кривая соответствует формуле (10).

Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1. Вып. 6. С. 1-26.
- [2] Fischer R. // Ann. of Eugenics. 1937. V. 7. P. 355-369.
- [3] Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А. // Журнал физической химии. 1938. Т. 12. Вып. 1. С. 100-105.
- [4] Васильев В.А., Романовский Ю.М., Язго В.Г. // УФН. 1979. Т. 128. С. 625-666.
- [5] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [6] Виноградов М.Е., Баренблатт Г.И., Горбунов А.Е., Петровский С.В. // Докл. РАН. 1993. Т. 328. С. 509-512.

Институт океанологии
им. П.П.Ширшова РАН,
Москва

Поступило в Редакцию
21 мая 1993 г.