Письма в ЖТФ, том 19, вып. 12 26 июня 1993 г.

01;05.1;08

УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

А.В.Порубов, А.М.Самсонов

Недавно была разработана аналитическая теория распространения продольной волны деформации в нелинейно-упругом стержне цилиндрической формы, основанная на нелинейном уравнении с двумя дисперсиями (УДД) [1,2]. Оценки парметров начального импульса, сделанные на базе этой теории, позволили определить условия для генерации солитонов деформации [2], при выполнении которых было осуществлено экспериментальное возбуждение солитона сжатия при помощи слабой ударной волны [3]. Известно, что в отсутствие взаимодействия с внешней средой на поверхности стрежня $r = R$ должны быть равны нулю компоненты T_{rr} и T_{rx} (ось x направлена вдоль оси стержня) тензора напряжений Коши T [4]. Как было показано в [5], ненулевые нелинейные составляющие этих напряжений на границе, предсказываемые в рамках теории, могут считаться пренебрежимо малыми, однако требует уточнения оценка величины линейной составляющей касательного напряжения на границе $\sigma_{rx} = \mu(w_x + u_r)$, которая в рамках модели [1] оказывается равной $\sigma_{rx} = -R\nu\mu U_{xx}$ (ν — коэффициент Пуассона, μ — коэффициент Ламе, $u = U(x,t)$ — продольное смещение, w — смещение вдоль радиуса стержня, нижние индексы при компонентах смещения означают дифференцирование).

Данная работа посвящена уточнению гипотез, положеных в основу теории [1], с целью уменьшения значения величины σ_{rx} в пределах заданной точности. Такое развитие теории [1] представляется полезным с точки зрения дальнейшей разработки экспериментов по возбуждению и исследованию распространения солитонов деформации в нелинейно-упругом стержне.

Предположим, что для компонент смещения u и w соответственно вдоль осей x и r справедливы следующие выражения:

$$u = U(x,t) + r^2 V(x,t), \qquad w = -r\nu U_x + r^3 W(x,t), \tag{1}$$

где U, V и W — функции, подлежащие определению. При $V = W = 0$ выражения (1) представляют собой запись гипотез Лява и плоских сечений, использованных для вывода УДД в [1]. Подставим соотношения (1) в выражения для линейных составляющих напряжений из [4] при $r = R$: $\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)w_r + \lambda w/R + \lambda u_x$ и $\sigma_{rx} = \mu(w_x + u_r)$, получим, что $\sigma_{rr} = 0$ при $V = \nu U_{xx}/2$, $W = -\nu^2 U_{xxx}/(2(3-2\nu))$. При этом на границе стержня остается не равная нулю линейная составляющая касательного напряжения $\sigma_{rx} = \nu^2 R^3 \mu U_{xxxx}/(2(3-2\nu))$.

Используя стандартную процедуру вывода уравнения продольных волн деформации [1], получим для составляющей продольной деформации $v = u_x$ в размерных переменных нелинейное гиперболическое уравнение вида

$$v_{tt} - c_0^2 v_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\rho}v^2 + \nu R^2(\nu - 1)v_{tt} + \nu R^2 c_0^2 v_{xx}\right)_{xx}, \tag{2}$$

где $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ — скорость линейных продольных волн в стержне, E — модуль Юнга, а коэффициент нелинейности $\beta = 3E + 2l(1-2\nu)^3 + 6n\nu^2 + 4m(1-2\nu)(1+\nu)^2$ есть функция от модулей Мурнагана l, m, n. Нетрудно убедиться в том, что дальнейшее добавление слагаемых в выражении (1) для u и w в попытке еще большего уменьшения значения касательного напряжения σ_{rx} на границе стержня уже не скажется на коэффициентах уравнения (2) и, следовательно, в пределах заданной точности дальнейшее усовершенствование модели в этом направлении, по-видимому, невозможно. Таким образом, единственное уточнение в уравнении (2) по сравнению с УДД из [1] состоит в значениях коэффициентов при дисперсионных слагаемых v_{xxxx} и v_{xxtt}.

Известно, что солитонное решение уравнения (1) имеет вид

$$v = A\,\mathrm{ch}^{-2}\,\theta, \tag{3}$$

где $\theta = (x \pm Vt)/\lambda$, а скорость волны V и ширина импульса λ связаны с амплитудой A соотношениями

$$V^2 = c_0^2 + \beta A/(3\rho), \qquad \lambda = \nu R\left(2 - \frac{2}{\nu} + \frac{6E}{|\beta A|}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Таким образом, уединенная волна деформации, удовлетворяющая уравнению (2), распространяется с той же скоростью, что и волна УДД [1], в то время как ширина солитона УДД Λ отличается от λ из (4). Для оценки отличий в решениях Λ и λ удобно перейти к безразмерным переменным, воспользовавшись введенными в [1] масштабами, в частности, определением малого параметра $\varepsilon = |\beta A|/E$. Тогда, с точностью до членов порядка ε^2, имеем:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda - \Lambda}{\lambda} = 1 - \left(\frac{1+2\nu}{2(1+\nu)}\right)^{1/2} - \frac{\varepsilon}{6}\left(\frac{1+\nu}{1+2\nu}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{(\nu-1)(1+2\nu)}{2\nu(1+\nu)}\right). \tag{5}$$

Сравним теперь величины касательных напряжений на границе стержня при проходжении по нему уединенной волны. Подстановка (2) в выражение для σ_{rx} и стандартное исследование на максимум правых частей получившихся выражений позволяет для σ_{rx} в рамках теории [1] получить оценку $\sigma_{rx} < 0.77 R\mu\nu A/\Lambda$, тогда как из формул (1) следует другое выражение: $\sigma_{rx} < 3.95 R^3\mu\nu^2 A/(3-2\nu)\lambda^3$. Переходя к безразмерным переменным, получаем, что значение максимального напряжения σ_{rx} на границе уменьшается в ε^{-1} раз по сравнению с его максимальным значением в рамках теории [1].

Для численных оценок воспользуемся в качестве примера данными экспериментов из [3] по наблюдению уединенной волны в стержне из полистирола: $A = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $R = 5$ мм, и в стальном стержне при тех же значениях A и R. Тогда для полистирола и для стали получаем, что длина волны увеличивается на $\delta\lambda = 0.21$. В рамках оценок, следующих из теории [1,2], для полистирола имеем $\sigma_{rx} < 1.7 \cdot 10^4 H/M^2$, а для стали — $\sigma_{rx} < 3.6 \cdot 10^5 H/M^2$. В рамках предложенного уточнения теории оказывается, что для полистирола $\sigma_{rx} < 1.1 \cdot 10^2 H/M^2$, а для стали — $\sigma_{rx} < 3.2 \cdot 10^2 H/M^2$. Таким образом, предсказываемое уточненной моделью максимально возможное напряжение на границе стержня из полистирола оказывается меньше примерно в 10^2 раз, для стали — в 10^3 раз. Отметим, что речь идет об уменьшении исходно малых величин.

Наконец, оценим отклонение h поперечного сечения стержня от плоского по максимуму отношения второго слагаемого к первому в выражении (1) для смещения u:

$$h < |A| \Bigg/ \left(3\sqrt{3}\,\nu - \frac{1}{\nu} - \left(\frac{3E}{|\beta A|}\right)\right). \tag{6}$$

В безразмерных переменных $h = o(\varepsilon\,|A|)$. Рассчитанные по формуле (6) как для полистирола, так и для стали максимальные отклонения поперечного сечения от плоского оказываются пренебрежимо малыми величинами: $h = 6.2 \cdot 10^{-7} M$, $h = 6.5 \cdot 10^{-8} M$ соответственно.

Таким образом, уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне позволяет существенно уменьшить теоретически предсказываемые на границе величины касательных напряжений. В то же время только оценка ширины начального импульса λ в (4), необходимого для возбуждения солитона деформации, должна быть поправлена по сравнению с оценками в [2]. Численные оценки по данным экспериментов для стержня из полистирола в [3] показывают, что предыдущая теория адекватно описывала процесс, поскольку отклонение сечения стержня от плоского оказалось и по нашим уточненным оценкам пренебрежимо малой величиной. Однако для стержня из оргстекла отклонение h может достигать величины 0.5 мм при амплитуде солитона $A = 5 \cdot 10^{-3}$ (при пороге пластичности материала $\acute{e}_0 = 3 \cdot 10^{-2}$). Такие отклонения уже могут быть зафиксированы при помощи измерительной аппаратуры, использованной в экспериментах [3]. Поэтому для последующих экспериментов представляется полезным использовать оценки по формулам (4), (6) для определения параметров начального импульса, необходимого для возбуждения солитона продольной деформации в стержне.

Список литературы

[1] *Самсонов А.М.* // ДАН. 1988. Т. 299. В. 5. С. 1083–1086.
[2] *Самсонов А.М., Сокуринская Е.В.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. В. 8. С. 1632–1634.
[3] *Дрейден Г.В., Островский Ю.И., Самсонов А.М., Семенова И.В., Сокуринская Е.В.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 13. В. 10. С. 1237–1241.
[4] *Лурье А.И.* // Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
[5] *Самсонов А.М., Сокуринская Е.В.* // Препринт ФТИ № 973. 1985. 44 с.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе РАН
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
12 мая 1993 г.