Письма в ЖТФ, том 19, вып. 10 26 мая 1993 г.
01; 08; 09

ИЗМЕНЕНИЕ ЧАСТОТ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

И.А. Колмаков

Известно, что длины волн различной природы, распространяющихся в движущейся относительно лабораторной системы координат среде, изменяются. Интерференционные волны в подобной ситуации также изменяют длины волн. Приведенные примеры влияния движения среды на распространяющиеся в ней волны очевидны и не вызывают сомнений. Между тем движение среды может вносить изменения в волнах и не столь очевидные, но весьма существенные, а именно – изменения частот волнового поля, генерируемого областью взаимодействия первичных волн. На принципиальную возможность подобных изменений в волнах указывает уже то легко обнаруживаемое обстоятельство, что в „собственных" решениях волнового уравнения для движущихся сред частота комбинационных волн связана с волновым числом множителем, содержащим скорость движения среды.

Для исследования этого вопроса рассмотрим взаимодействие двух плоских первичных волн частот ω_1, ω_2 в движущейся в ламинарном режиме со скоростью U в направлении оси x среде. Схема взаимодействия приведена на рисунке. Волновые векторы первичных волн $\vec{k}_1, \vec{k}_2$ составляют с осью x углы θ_1 и θ_2, а образуемый в результате нелинейного взаимодействия между ними вектор волны, например, суммарной частоты $\vec{k}_c = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ $(\omega_c = \omega_1 + \omega_2)$ – угол β. Воспользуемся уравнениями гидродинамики

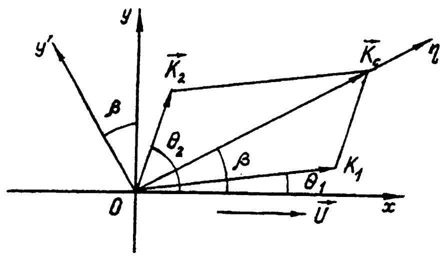
$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla P; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0; \quad P = f(\rho), \tag{1}$$

где ρ, $\vec{v}$, P – плотность, скорость и давление среды.

Из уравнений (1) следует в квадратичном приближении волновое уравнение для движущейся среды:

$$\Delta\rho^{(2)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho^{(2)}}{\partial t^2} - 2\frac{U}{c^2}\frac{\partial^2\rho^{(2)}}{\partial t\partial x} - \frac{U^2}{c^2}\frac{\partial^2\rho^{(2)}}{\partial x^2} = -\frac{\gamma-1}{2\rho_0}\Delta(\rho^{(2)})^2 +$$
$$+\frac{U}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}(\rho^{(1)}\vec{v}^{(1)}) + \frac{1}{c^2}\operatorname{div}\left\{\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial t}\vec{v}^{(1)} - \rho_0(\vec{v}^{(1)}\nabla)\vec{v}^{(1)} - \right. \tag{2}$$
$$\left. -\rho^{(1)}\left[(\vec{U}\nabla)\vec{v}^{(1)}\right]\right\},$$

где c – скорость звука, $\gamma = c_p c_v^{-1}$; c_p, c_v – теплоемкости. Решение



уравнения (2) в линейном приближении:

$$\rho^{(1)}=\rho_0 c^{-1}\Big\{v_{10}\exp\{i[\omega_1 t-(k_1^*\cos\theta_1)x-(k_1^*\sin\theta_1)y]\}+$$
$$+v_{20}\exp\{i[\omega_2 t-(k_2^*\cos\theta_2)x-(k_2^*\sin\theta_2)y]\}\Big\}, \qquad (3)$$

где $k_{1,2}^*=k_{1,2}(1+Uc^{-1}\cos\theta_{1,2})$; v_{10}, v_{20} – амплитуды первичных волн, а звездочка у символа означает зависимость от скорости U. Правую часть уравнения (2) с учетом (3) можно записать в виде:

$$П=A^*(\omega_1,\omega_2,\theta_1,\theta_2,U,\beta)\exp\{i[(\omega_1+\omega_2)t-k_{c_x}^*\cdot x-k_{c_y}^*\cdot y]\}, \qquad (4)$$

где $A^*(\omega_1,\omega_2,\theta_1,\theta_2,U,\beta)=\rho_0 v_{10}v_{20}\{[(\gamma-1)-\cos(\theta_1-\theta_2)][k_1^{*2}+k_2^{*2}+$

$$+2k_1^*k_2^*\cos(\theta_1-\theta_2)]+c^{-1}[\omega_1 k_2^*+\omega_2 k_1^*+(\omega_1 k_1^*+\omega_2 k_2^*)\cos(\theta_1-\theta_2)]-$$

$$-Uc^{-1}[k_1^*k_2^*(\cos\theta_1+\cos\theta_2)+(k_1^{*2}\cos\theta_1+k_2^{*2}\cos\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)]\};$$

$$k_{c_x}^*=k_1^*\cos\theta_1+k_2^*\cos\theta_2;\quad k_{c_y}^*=k_1^*\sin\theta_1+k_2^*\sin\theta_2;\quad k_{1,2}^*=k_{1,2}(1+Uc^{-1}\cos\theta_{1,2}).$$

Общее решение уравнения (2) представим в виде суммы „собственной" и „вынужденной" волн: $\rho^{(2)}=\rho_c^{(2)}+\rho_b^{(2)}$.

Первое из общего решение имеет вид

$$\rho_c^{(2)}=C_1\exp\{i[\omega_c^* t-(k_c^*\cos\beta)x-(k_0^*\sin\beta)y]\}, \qquad (5)$$

где $C_1 - const$, $\omega_c^* = k_c^*(c + U\cos\beta)$, собственное число $k_c^{*2} = k_{cx}^{*2} + k_{cy}^{*2}$ и получается из условия векторного синхронизма: $\vec{k}_c^* = \vec{k}_1^* + \vec{k}_2^*$, для его x- и y-компонент.

Решение для „вынужденной" волны, создаваемой „источником", выражение для которого дается правой частью уравнения (2), можно представить в виде:

$$\rho_b^{(2)} = \frac{A^*(\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2, U, \beta)}{B^*(\omega_c, k_c^*, U)} \exp\left\{ i\left[(\omega_1 + \omega_2)t - k_{cx}^* \cdot x - k_{cy}^* \cdot y \right] \right\}, \qquad (6)$$

где $B^*(\omega_c, k_c^*, U) = \omega_c^2 - c^2 k_c^{*2} - 2\omega_c U k_{cx}^* + U k_{cx}^{*2}$.

Далее, полагая, что на границе „источника", – области взаимодействия первичных волн, – создаваемое им поле отсутствует: $\rho^{(2)} = 0$, при $x, y = 0$ и, следовательно, на границе возможны лишь колебания с частотой „источника", и используя (5), (6), получим решение задачи:

$$\rho^{(2)} = \frac{2A^*(\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2, U, \beta) \sin\left[\frac{\omega_c^* - \omega_c}{2} t - N_1^* x - M_1^* y \right]}{(1 + U^2 c^{-2} \cos^2\beta)^{-1} \left\{ \omega_c^{*2} - \left[\omega_c + U c^{-1} (\omega_0 \cdot \cos\beta - \omega_c^*) \right] \right\}} \cos\left[\frac{\omega_c^* + \omega_c}{2} t - N_2^* x - M_2^* y \right],$$

где (7)

$$N_1^* = \frac{1}{2}(k_c^* \cos\beta - k_{cx}^*), \quad M_1^* = \frac{1}{2}(k_c^* \sin\beta - k_{cy}^*),$$

$$N_2^* = \frac{1}{2}(k_c^* \cos\beta + k_{cx}^*), \quad M_2^* = \frac{1}{2}(k_c^* \sin\beta + k_{cy}^*).$$

Из решения (7) видно, что взаимодействие волн в условиях движущейся среды существенно изменяет характер вторичных волн, по сравнению со случаем неподвижной среды. Наиболее важное отличие состоит в изменении частоты вторичных волн – появляется зависимость от скорости движения среды в области пересечения и, таким образом, сама эта область становится „источником" информации о скорости движения в ней среды.

Для выяснения характерных особенностей вторичного поля в условиях движущейся среды, рассмотрим более простой случай: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\beta = 0$, т.е. взаимодействие встречных волн. Решение задачи для этого случая, получаемое из (7), в предположении небольших скоростей $U \ll c$, можно представить выражением:

$$\rho^{(2)} = \frac{A^*(\omega_1, \omega_2, U) \sin\left(\frac{\omega_\Omega^* - \omega_\Omega}{2} t \right)}{(\omega_\Omega^* + \omega_\Omega) \cdot (\omega_\Omega^* - \omega_\Omega) 2^{-1}} \cos\left(\frac{\omega_\Omega^* + \omega_\Omega}{2} t - k_\Omega^* x \right), \qquad (8)$$

где

$$\omega_{\Omega}^{*} = \omega_{\Omega}\left(1-\frac{U}{c}\,\frac{\omega_c}{\omega_{\Omega}}\right)\left(1-\frac{U}{c}\right)^{-1}, \quad k_{\Omega}^{*} = (c+U)^{-1}\cdot \omega_{\Omega}^{*}.$$

Из решения (8) следует, что амплитуда распространяющейся вдоль оси x волны частоты $(\omega_c^{*}+\omega_c)2^{-1}$ испытывает биения во времени, величина в период которых определяется непосредственно значением скорости движения среды U в области пересечения. При малых скоростях амплитуда монотонно растет со временем, а при больших значениях осциллирует с периодом, величина которого пропорциональна значению скорости U. Длина области когерентного взаимодействия между волнами частот ω_c^{*} и ω_c :

$$l_{kor}(\omega_{\Omega}^{*}, \omega_{\Omega}) = \frac{\pi}{\omega_{\Omega}^{*}-\omega_{\Omega}} = \frac{\pi}{\omega_{\Omega}}\left(\frac{c}{U}-1\right). \qquad (9)$$

Рассмотренное явление изменения частоты вторичного излучения при взаимодействии двух первичных волн в движущейся среде может найти многочисленные применения, в том числе аналогичные рассмотренным в [1–3]. Впервые предсказание и использование данного явления дано в [4].

Список литературы

[1] Колмаков И.А., Самарцев В.В. // ЖТФ. 1986. Т. 56. В. 2. С. 269–277.

[2] Антонов Н.Н., Колмаков И.И., Самарцев В.В., Шкаликов В.А. // ПМТФ. 1989. В. 6. С. 48–53.

[3] Бражников Н.И. Ультразвуковые методы. М.: Машиностроение, 1963. 153 с.

[4] Колмаков И.А. Способ определения локальной скорости среды. А. с. № 794530 СССР // Б.И. 1978. № 1.

Поступило в Редакцию
17 марта 1993 г.