Письма в ЖТФ, том 19, вып. 7 12 апреля 1993 г.
01

ФОРМУЛА ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДНИКА, НАГРЕВАЕМОГО СТУПЕНЧАТЫМ ИМПУЛЬСОМ ТОКА

В.С. Юферев, С.В. Юферев

Для коротких импульсов тока задача расчета джоулева нагрева в системах длинных параллельных проводников с помощью BIE–BLA модели [1] сводится к решению одномерной системы уравнений диффузии электромагнитного поля и теплопроводности, граничным условием к которой является распределение векторного потенциала магнитного поля вдоль поверхности проводников, описываемое посредством метода граничных интегральных уравнений. В работе [2] учитывались зависимости проводимости и теплопроводности проводника от температуры и получаемая задача нелинейной диффузии была решена численно для произвольной формы импульса тока. Во многих реальных технических приложениях форма импульса может быть аппроксимирована „ступенькой" [3]. В этом случае, для постоянных характеристик материала проводника, выражение для температуры его поверхности может быть получено аналитически.

В приближении пограничного слоя (приближение скин-эффекта [4]) изменение температуры проводников вследствие Джоулева нагрева описывается уравнением теплопроводности:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\frac{J^2}{\sigma}, \tag{1}$$

где J – плотность тока в проводнике, σ, c, ρ, λ – его проводимость, теплоемкость, плотность и теплопроводность соответственно (будем их считать постоянными), а координата η направлена вглубь проводника нормально его поверхности. В качестве начальных и граничных условий выбираем следующие:

$$\eta=0,\quad \partial T/\partial\eta=0,\quad \eta\to\infty,\quad T\to T_\infty,\quad t=0,\quad T=T_\infty. \tag{2}$$

Из уравнений Максвелла в приближении пограничного слоя следует

$$J=-\partial^2A/\partial\eta^2, \tag{3}$$

где A – векторный потенциал магнитного поля, распределение которого в скин-слое проводника описывается одномерной задачей диффузии:

$$\partial A/\partial t = (\sigma\mu_0)^{-1}\partial^2 A/\partial \eta^2;$$

$$\eta = 0,\ \ A = A^0,\ \ \eta\to\infty,\ \ A\to 0,\ \ t=0,\ \ A=0. \tag{4}$$

Решение (4) может быть записано в виде

$$A = (\sigma\mu_0)^{-1}\int_0^t \frac{\partial A^0}{\partial t'}\, erfc\left(\frac{\eta}{2(t-t')}\right)dt'. \tag{5}$$

Перейдем к безразмерному виду, полагая:

$$\tilde{T} = T\,\frac{c\rho D^2}{\mu_0 I_*^2} = \frac{T}{T_*},\ \ \tilde{t} = \frac{t}{\sigma\mu_0 D^2},\ \ y = \eta\left(\frac{\sigma\mu_0}{2t}\right)^{1/2},\ \ \tilde{A} = \frac{A}{I_*}, \tag{6}$$

где I_* – масштаб полного тока, D – характерный размер поперечного сечения проводника (знак " $\sim$ " над символами в дальнейшем опускается). В новых переменных задача (1)–(2) примет вид

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + y\frac{\partial T}{\partial y} - 2t\,\frac{\partial T}{\partial t} + 2J^2 t = 0,$$

$$y=0,\ \ \partial T/\partial y = 0,\ \ y\to\infty,\ \ T\to T_\infty/T_*,\ \ t=0,\ \ T = T_\infty/T_*, \tag{7}$$

$$J = -(2\pi)^{-1/2}\,\frac{y}{t}\int_0^t \frac{\partial A^0}{\partial t'}\left(1-\frac{t'}{t}\right)^{-3/2} exp\left(-\frac{y^2}{2(1-t'/t)}\right)dt', \tag{8}$$

где параметр $\varepsilon_\infty = \left(\frac{\lambda_\infty\sigma_\infty\mu_0}{c\rho}\right)^{1/2}$ выражает отношение длин тепловой и магнитной диффузий в проводнике. Как правило, $\varepsilon \ll 1$ (для меди $\varepsilon \approx 0.08$), поэтому обычно влияние теплопроводности в подобных задачах пренебрегается. Однако для импульсов с очень крутым нарастанием тока теплопроводность оказывается весьма существенным фактором, ограничивающим максимальную температуру нагрева поверхности проводника.

Пусть далее изменение полного тока по времени задается в виде формального степенного ряда:

$$I(t) = I_0 + I_1 t^{1/2} + I_2 t + \ldots \tag{9}$$

Тогда функции A и J будем искать в следующем виде

$$A^0(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\pi^{n/2} A_n^0\, t^{n/2}, \tag{10}$$

$$J(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(y) t^{n/2}, \tag{11}$$

где коэффициенты J_n получены подстановкой разложения (10) в (8):

$$J_0 = -\frac{\pi^{1/2}}{2} A_1^0 exp(-y^2/2), \quad J_1 = -\pi A_2^0 erfc(y/\sqrt{2}), \ldots \tag{12}$$

Решение задачи (7) естественно искать в виде

$$T(y,t) = -T_\infty/T_* + T_0(y) A_1^{o2} + t^{1/2} T_1(y) A_1^0 A_2^0 + \ldots \tag{13}$$

Подставляя (13) в (7) и учитывая (12), получим для первых двух коэффициентов T_0 и T_1 следующие уравнения:

$$\varepsilon^2 (T_0)''_{yy} + y(T_0)'_y + \frac{\pi}{2} exp(-y^2) = 0, \tag{14}$$

$$\varepsilon^2 (T_1)''_{yy} + y(T_1)'_y - T_1 + 2\pi^{3/2} exp(-y^2)\, erfc(y/\sqrt{2}) = 0, \tag{15}$$

при $y = 0 \qquad T_0' = T_1' = 0,$

при $y \to \infty \qquad T_0 = T_1 = 0.$

Уравнения (14), (15), содержащие малый параметр ε, решались методом сращиваемых асимптотических разложений [5]. В результате были получены следующие выражения для функций T_0 и T_1 при $y = 0$:

$$T_0\Big|_{y=0} = \frac{\pi}{2} \ln\varepsilon + \frac{\pi}{4}(b - C), \quad T_1\Big|_{y=0} = 2\pi^{3/2}(1 + (2/\pi)\varepsilon \ln\varepsilon), \tag{16}$$

где C = 0.5772 – постоянная Эйлера, b = 1.962. Подставляя (16) в (13) и переходя к размерным величинам, получим выражение для нагрева поверхности проводника:

$$\Delta T = \frac{\mu_0}{c\rho D^2} I_*^2 \left(\frac{2}{\pi}\left(-\ln\varepsilon + \frac{b-C}{2}\right) Y_0^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left(1 + (2/\pi)\varepsilon \ln\varepsilon\right) Y_0 Y_1 \frac{t^{1/2}}{D(\sigma\mu_0)^{1/2}} + \cdots \right). \tag{17}$$

Здесь вместо коэффициентов разложения векторного потенциала A_n^0 используются более удобные с практической точки зрения коэффициенты ряда поверхностной плотности тока Y_n, определяемые как

$$Y = \int_0^\infty J\, d\eta = \left.\frac{\partial A}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n t^{n/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{n/2} \frac{n+1}{2} B\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) A_{1\,n+1}^{0} t^{n/2},$$

где $B(i,k)$ – бета-функция. Отметим высокую степень совпадения аналитического решения (17) с результатами, получаемыми посредством численного метода, описанного в работе [2] (отличия не превышают 4%). Приведем для сравнения выражение для нагрева поверхности, полученное в работе [6]:

$$\Delta T = \frac{\mu_0}{c\rho D^2} I^2 \frac{2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\varepsilon^{-1}\right). \qquad (18)$$

Легко показать, что приведенное выражение практически совпадает с первым членом в (17). При этом второй член в (17) описывает неучитываемое в [6] изменение температуры со временем, что на рассматриваемых малых временах нагрева позволяет уточнить результат на 15–20% [2].

Таким образом, если в результате решения электромагнитной задачи известно распределение параметров поля вдоль поверхности проводника, то для определения Джоулева нагрева его поверхности в течение импульса тока нет необходимости решать численно тепловую задачу, а достаточно воспользоваться формулой (17).

Список литературы

[1] Юферев С.В., Юферев В.С. // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 11. С. 21–27.

[2] Юферев С.В. // Математическое моделирование. 1992. Т. 4. В. 4. С. 27–34.

[3] Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / Под ред. Ф. Херлаха. М.: Мир, 1988. 456 с.

[4] Mestel A.J. // IMA J. of Appl. Mathematics. 1990. V. 45. P. 49–80.

[5] Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: ЛГУ, 1978. 224 с.

[6] Hawke R.S., Brooks A.L. et al. // AIAA 1982. V. 20. P. 978–985.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе
РАН, С.-Петербург

Поступило в Редакцию
5 марта 1993 г.