01; 10

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ДИНАМИКУ ПОТОКА ЧАСТИЦ II

Н.Д. Н а у м о в

В работе [1] был сформулирован метод учета влияния пространственного заряда на движение потока частиц. Этот метод заключается в построении приближенного решения уравнения Власова при условии малости создаваемого частицами поля. Область применимости получаемых в рамках метода возмущений результатов определяется, в основном, тем, насколько удачно выбрано основное приближение. Характерной особенностью методов анализа динамики нелинейных колебательных систем является включение в основное приближение членов, содержащих параметр разложения. Это позволяет получить асимптотическое приближение для решения динамических уравнений [2]. Как будет показано ниже, аналогичная ситуация возникает и в случае рассматриваемой задачи – для получения приемлемого решения необходимо учесть воздействие собственного поля на движение частиц в основном приближении.

Сформулируем более удобную для практических расчетов схему приближенного решения уравнения Власова (для краткости через χ обозначается совокупность переменных $\vec{x}, \vec{p}$):

$$\hat{N}F(\chi,t)=0, \quad \hat{N}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}+e\left(\vec{E}+\vec{E}_{ext}+\frac{1}{c}\left[\vec{v}(\vec{B}+\vec{B}_{ext})\right]\right)\frac{\partial}{\partial \vec{p}}. \tag{1}$$

Пусть начальное состояние задано функцией распределения $G(\chi)$. Выберем некоторый „пробный" закон движения $\vec{r}(t,\chi_0)$, $\vec{s}(t,\chi_0)$, причем

$$\vec{r}(0,\chi_0)=\vec{x}_0, \quad \vec{s}(0,\chi_0)=\vec{p}_0. \tag{2}$$

Тогда функция распределения основного приближения $F_0(\chi,t)$ при $t>0$ запишется в виде

$$F_0(\chi,t)=\int\delta(\vec{x}-\vec{r}(t,\chi_0))\,\delta(\vec{p}-\vec{s}(t,\chi_0))\,G(\chi_0)\,d\chi_0. \tag{3}$$

Определяя далее с помощью (5) плотности частиц и тока

$$\rho_0(\vec{x},t)=e\int F_0(\chi,t)\,d^3p, \quad \vec{j}_0(\vec{x},t)=e\int \vec{v}F_0(\chi,t)\,d^3p,$$

найдем из уравнений Максвелла поля $\vec{E}, \vec{B}$. Теперь на основе $\vec{x}(t,\chi_0)$, $\vec{p}(t,\chi_0)$ – решений уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}, \qquad \dot{\vec{p}} = e\left(\vec{E} + \vec{E}_{ext} + \left[\vec{v}(\vec{B} + \vec{B}_{ext})\right]/c\right) \tag{4}$$

с начальными условиями (2) – можно получить аналогичное (3) уточненное выражение для функции распределения $F_1(\chi, t)$.

Очевидно, что F_1 будет приближенным решением кинетического уравнения в той области, где она остается близкой к функции (3). Отметим также, что построение решения уравнения Власова посредством нахождения нужного закона движения фактически соответствует переходу от „шредингеровского" описания эволюции потока к „гейзенберговскому".

Проиллюстрируем изложенную схему на примере движения потока в фокусирующей системе, в качестве простой модели которой можно взять электрическое поле

$$\vec{E}_{ext} = \left(-kxE_0 \cos kz, \ 0, \ E_0 \sin kz\right). \tag{5}$$

Подобные поля используются для изучения движения пучков заряженных частиц в параксиальном приближении [3]. Частицы будем считать нерелятивистскими и пренебрежем воздействием собственного магнитного поля.

Движение одиночной частицы в поле (5) заключается в быстрых осцилляциях с частотой $\Omega = kp_{0z}/m$ около плавной траектории, которая, в свою очередь, представляет собой колебания с частотой $\omega = \mathcal{E}\Omega$; амплитуда осцилляций мала и пропорциональна $\mathcal{E} = emE_0 \sqrt{2kp_{0z}^2}$. Чтобы показать это, перейдем, исходя из быстроосциллирующего характера действия поля (5), от t, x, z, p_x, p_z к новым переменным $\tau, \xi_x, \xi_z, \lambda_x, \lambda_z$:

$$x = a\left[\Lambda(1+\sqrt{2}\,\varepsilon\cos\varphi) + \xi_x\right], \quad p_x = ma\omega\left(\dot{\Lambda}/\varepsilon - \sqrt{2}\Lambda\sin\varphi + \lambda_x\right), \tag{6}$$

$$\tau = \Omega t, \quad \xi_z = kz - \tau, \quad p_z = p_{0z}\lambda_z, \quad \varphi = kz_0 + \tau,$$

где a – постоянная размерности длины, Λ – некоторая функция τ.

Обозначая через $\hat{N}_0$ выражение для оператора (1) при $\vec{E} = \vec{B} = \vec{B}_{ext} = 0$, получим, опуская члены $\sim\mathcal{E}^2$ и обозначая $\psi = \xi_z + \tau$:

$$\frac{1}{\Omega}\hat{N}_0 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \varepsilon\lambda_x\frac{\partial}{\partial\xi_x} + (\lambda_z - 1)\frac{\partial}{\partial\xi_z} + \sqrt{2}\,\varepsilon\sin\psi\frac{\partial}{\partial\lambda_z} +$$
$$+ \left(\sqrt{2}\left[\dot{\Lambda}\sin\varphi + \Lambda\cos\varphi - (\Lambda + \sqrt{2}\,\varepsilon\Lambda\cos\varphi + \xi_x)\cos\psi\right] - \ddot{\Lambda}/\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial\lambda_x}. \tag{7}$$

Удобно выбрать функцию Λ в виде

$$\Lambda = x_0\left(A\cos\varepsilon\tau + B\sin\varepsilon\tau\right)/a\,,$$
$$A = 1/\left(1+\sqrt{2}\varepsilon\cos kz_0\right), \quad B = p_{0x}/m\omega x_0 + \sqrt{2}A\sin kz_0. \tag{8}$$

Такой выбор Λ обусловлен тем, что в этом случае при приближенном решении вытекающих из (7) дифференциальных уравнений для закона движения в новых переменных не возникнет секулярных членов.

Действительно, учитывая, что новые переменные имеют нулевые начальные значения, возьмем в основном приближении

$$\xi_x = \lambda_x = 0, \quad \xi_z = kz_0, \quad \lambda_z = 1.$$

Тогда в первом приближении итерационной процедуры из (7) найдем:

$$\xi_x = 0, \; \lambda_x = \int\limits_0^{\tau}\left[\sqrt{2}\dot{\Lambda}\sin\varphi' - \varepsilon\Lambda\cos 2\varphi'\right]d\tau', \quad \varphi' = \tau' + kz_0\,, \tag{9}$$

$$\xi_z = 0, \quad \lambda_z = 1 + \sqrt{2}\varepsilon\left(\cos kz_0 - \cos\varphi\right). \tag{10}$$

Таким образом, включив в основное приближение (6) члены, пропорциональные параметру разложения, нам удалось исключить появление быстрорастущих со временем слагаемых в приближенном (с точностью до членов $\sim\varepsilon$) законе движения частицы в поле (5).

Переходя к рассмотрению движения потока, выберем начальное состояние в виде однородного слоя, т.е. положим

$$G(\chi) = n_p C(x,a)\delta(p_x - b_x)\delta(p_y)\delta(p_z - b_z),$$

так как в этом случае собственное поле имеет простой вид. Здесь $C(x,a)$ – единичная внутри круга радиуса a функция. Поскольку создаваемое частицами электрическое поле мало, то в качестве исходного можно было бы взять закон движения (6), (8) в нулевом приближении по ε. Однако в этом случае выражение (3) при $b_x = -m\omega x\sqrt{2}\sin kz$ приводит к функции распределения для однородного слоя, размер которого может принимать нулевое значение.

Более продуктивным является следующее выражение для Λ:

$$\Lambda = x_0\left[(A-\alpha)\cos\varepsilon\tau + \alpha + B\sin\varepsilon\tau\right]/a\,, \tag{11}$$

где α – некоторая константа. Тогда для функции распределения имеем

$$F_0(x,t)=\frac{n_p}{R}C\left(\frac{x}{R},a\right)\delta\left[p_x+mx\left(\omega\sqrt{2}\sin kz-\dot{R}/R\right)\right]\delta(p_y)\delta(p_z-b_z). \qquad (12)$$

Здесь введено обозначение $R=(1-\alpha)\cos\omega t+\alpha$. Выражение (12) соответствует слою, размер которого колеблется около значения αa.

Решение уравнений (4) будем проводить по той же схеме (6)-(10). Считая собственное поле малым, т.е. $\omega_p/\Omega\sim\mathcal{E}$, где $\omega_p=(4\pi n_p e^2/m)^{1/2}$ – плазменная частота, для оператора $\hat{N}$ с принятой точностью находим

$$\frac{1}{\Omega}\hat{N}=\frac{1}{\Omega}\hat{N}_0+\mathcal{E}\frac{x_0}{a}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left[1+\left(\xi_x+B\sin\mathcal{E}\tau\right)/R\right]\frac{\partial}{\partial\lambda_x}. \qquad (13)$$

Так как при выборе Λ в виде (11) переменные ξ_x, λ_x по-прежнему имеют нулевые начальные значения и Λ удовлетворяет уравнению $\ddot{\Lambda}+\varepsilon^2(\Lambda-\alpha x_0/a)=0$, то быстрорастущие члены не появяться при получении аналогичных (9), (10) выражений для закона движения, если $\alpha=(\omega_p/\omega)^2$.

В итоге можно найти уточненную функцию распределения F_1; для краткости приведем выражение для плотности частиц

$$n_1(\vec{x},t)=\int F_1(x,t)\,d^3p=n_p C(x/S,a)/S,\quad S=\left(1+\sqrt{2}\,\varepsilon\cos kz\right)R_1,$$

$$R_1=(A_1-\alpha)\cos\omega t+\alpha,\quad A_1=1/\left[1+\sqrt{2}\,\varepsilon\cos k(z-b_z t/m)\right]. \qquad (14)$$

В отличие от (12), где слой имеет плоскую границу, (14) соответствует слою, граница которого „промодулирована" с амплитудой $\sim\mathcal{E}$, т.е. различие между n_0 и n_1 остается порядка $\mathcal{E}$ с течением времени, тогда как полученное в [1] решение применимо лишь для ограниченного промежутка времени.

Автор благодарит проф. Ю.Г. Павленко за стимулирующие замечания и обсуждение результатов.

Список литературы

[1] Наумов Н.Д. // Письма в ЖТФ. 1992. Б. 10. С. 1-5

[2] Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М.: МГУ, 1985. 335 с.

[3] Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991. 303 с.

Поступило в Редакцию
21 декабря 1992 г.