КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

01;07;09 Журнал технической физики, т. 63, в. 4, 1993

ФЛУКТУАЦИИ МОЩНОСТИ ВОЛНОВОГО ПУЧКА В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМ ОСЛАБЛЕНИЕМ

Р.Х.Алмаев, А.А.Суворов

В ряде задач статистической оптики и радиофизики возникает необходимость в информации о случайных изменениях мощности пучка излучения. Как отмечено в [1], такая ситуация имеет место, например, при исследовании эффективных характеристик светового пучка (таких как уширение, смещение энергетического центра, дисперсия "дрожания"), распространяющегося в турбулентной среде, поскольку указанные характеристики выражаются через пространственные моменты нормированной на мощность интенсивности излучения. Существенна роль флуктуаций мощности и в задачах регистрации оптических полей. Как известно (см., например, [2]), вероятность регистрации фотоэлектронов в фотоэлектрических приборах определяется потоком излучения, падающего на заданную поверхность приемника в течение некоторого времени T. Если поток излучения нерегулярен, то при измерениях будут наблюдаться дополнительные к дробовым флуктуации фототока. Нерегулярность потока излучения, падающего на приемник после прохождения слоя турбулентной среды, обусловлена, с одной стороны, взаимодействием волны с пульсациями действительной части $\tilde{\varepsilon}_R$ диэлектрической проницаемости среды (эти изменения потока зависят от соотношения площади S апертуры приемника с эффективной площадью $S_{эф}$ сечения пучка и стремятся к нулю при $S \gg S_{эф}$), с другой стороны, пульсациями мнимой части $\tilde{\varepsilon}_I$ диэлектрической проницаемости (эти изменения потока не стремятся к нулю при $S \gg S_{эф}$). Влияние флуктуаций действительной составляющей $\tilde{\varepsilon}$ в совокупности с ограниченностью волны на величину потока излучения, падающего на приемник, рассматривалось в работе [3].

Настоящая работа посвящена исследованию флуктуаций мощности пучка излучения, обусловленных случайными изменениями мнимой составляющей диэлектрической проницаемости среды.

Пусть волновой пучок распространяется вдоль оси z в турбулентной среде с распределением диэлектрической проницаемости вида

$$\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, z) = \bar{\varepsilon}_R(z) + i \cdot \bar{\varepsilon}_I(z) + \tilde{\varepsilon}_R(\boldsymbol{\rho}, z) + i \cdot \tilde{\varepsilon}_I(\boldsymbol{\rho}, z), \quad (1)$$

где $\bar{\varepsilon}_R(z)$, $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(z)$, $\tilde{\varepsilon}_R(\boldsymbol{\rho}, z)$, $\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\rho}, z)$ — соответственно средние и флуктуационные изменения действительной (ε_R) и мнимой (ε_{I}) составляющих ε; $\boldsymbol{\rho} = \{x, y\}$ — радиус-вектор в плоскости $z = \mathrm{const}$.

Предполагается, что в рассматриваемой задаче выполняется условие δ-коррелированности пульсаций диэлектрической проницаемости и эффективный поперечный размер $a_{\text{эф}}$-пучка имеет значение, существенно меньшее, чем размер R_a апертуры приемника излучения ($R_a \gg a_{\text{эф}}$). Последнее позволяет явно выделить роль случайных неоднородностей $\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}$ в процессе хаотизации потока излучения.

Стохастическое уравнение, описывающее изменение мощности пучка излучения $P(z) = \iint d^2\rho \cdot I(\boldsymbol{\rho}, z)$ (где

$$I = \frac{c}{8\pi} |U|^2$$

— интенсивность излучения, U — комплексная амплитуда поля волны) в среде с ε вида (1), выводится из параболического уравнения для U [4] и может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{d}{dz} P(z) = -k \cdot [\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(z) + \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(0, z)] \cdot P(z) - k \iint d^2\rho \cdot [\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\rho}, z) - \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(0, z)] \cdot I(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (2)$$

с граничным условием $P(z)|_{z=0} = P_0 = \iint d^2\rho \cdot I_0(\boldsymbol{\rho})$. Из (2) видно, что единственным источником флуктуаций мощности в случайно-неоднородной поглощающей среде являются пульсации мнимой части диэлектрической проницаемости. При $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}, \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}} \to 0$ мощность пучка излучения сохраняется и равна начальной P_0.

Уравнение (2) с точностью до членов первого порядка по $\Delta\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}} = \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\rho}, z) - \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(0, z)$ можно переписать в следующей форме:

$$\delta P(z) = -k \left[\bar{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(z)\delta z + \delta\zeta(z)\right] \cdot P(z) - k \cdot \delta\eta(z), \quad (3)$$

где $\delta\zeta = \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(z, 0)\delta z$, $\delta\eta(z) = \iint d^2\rho \cdot [\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\rho}, z) - \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}(0, z)] \cdot \langle I(\boldsymbol{\rho}, z)\rangle \cdot \delta z$ — винеровские случайные процессы с нулевыми средними значениями $\overline{\delta\zeta} = \overline{\delta\eta} = 0$, квадратичные и корреляционные функции которых определяются соотношениями

$$\overline{(\delta\zeta)^2} = A_{\mathrm{II}}(0) \cdot \delta z, \quad \overline{(\delta\eta)^2} = g^2(z) \cdot \delta z, \quad \overline{\delta\zeta \cdot \delta\eta} = f(z) \cdot \delta z. \quad (4)$$

Использованные выше обозначения $\langle \ldots \rangle$ и $\overline{(\ldots)}$ означают одно и то же усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $\tilde{\varepsilon}$. Входящие в (4) величины $A_{\mathrm{II}}(0)$, $g^2(z)$, $f(z)$ выражаются через спектральную плотность $\Phi_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\varkappa}, 0)$ флуктуаций $\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{I}}$ и фурье-трансформанту $\langle I(\boldsymbol{\varkappa}, z)\rangle$ средней интенсивности излучения

$$A_{\mathrm{II}}(0) = 2\pi \iint d^2\varkappa \cdot \Phi_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\varkappa}, 0),$$

$$f(z) = -2\pi \cdot \overline{P(z)} \iint d^2\varkappa \cdot \Phi_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\varkappa}, 0) \cdot \left(1 - \frac{\langle I(\boldsymbol{\varkappa}, z)\rangle}{\langle I(0, z)\rangle}\right),$$

$$g^2(z) = 2\pi \cdot \left(\overline{P(z)}\right)^2 \int\int d^2\varkappa \cdot \Phi_{\text{II}}(\varkappa, 0) \cdot \left| 1 - \frac{\langle I(\varkappa, z)\rangle}{\langle I(0, z)\rangle} \right|^2 . \tag{5}$$

Из выражений (5) следует, что величина $A_{\text{II}}(0)$ определяется крупномасштабной, а величины $f(z)$, $g^2(z)$ — мелкомасштабной областями спектра пульсаций $\tilde{\varepsilon}$.

Запишем соответствующее (3) уравнение для распределения плотности вероятностей $W(P)$, с помощью которой можно получить исчерпывающую информацию о статистических одноточечных моментах мощности. Используя стандартную процедуру (см., например, [5]) нетрудно показать, что функция $W(P)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial z} W(P) = \left\{ \left[k \cdot \bar{\varepsilon}_{\text{I}} - \frac{\sigma^2}{2 \cdot z} \right] \frac{\partial}{\partial P} (P \cdot W(P)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma^2}{2 \cdot z} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \left(P^2 \cdot W(P) \right) \right\} + k^2 \cdot f(z) \frac{\partial^2}{\partial P^2} \cdot (P \cdot W(P)) + \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot g^2(z) \frac{\partial^2}{\partial P^2} W(P) \tag{6}$$

с граничным условием $W(P)|_{z=0} = \delta(P - P_0)$. В уравнении (6) комбинация $k^2 \cdot A_{\text{II}}(0) \cdot z$ обозначена через σ^2 и предполагается, что мощность источника излучения P_0 детерминирована.

Анализ (6) показывает, что при $f \to 0$, $g^2 \to 0$ (вклад мелкомасштабных флуктуаций $\tilde{\varepsilon}_{\text{I}}$ пренебрежимо мал) решением уравнения Фоккера–Планка является функция $W(P)$ в виде логарифмически нормального распределения

$$W(P)|_{f, g^2 \to 0} = W_{\text{лн}}(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot P} \exp \left\{ - \frac{\left[\ln \frac{P}{\langle P \rangle} + \frac{1}{2}\sigma^2 \right]^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}, \tag{7}$$

где

$$\langle P \rangle = P_0 \cdot \exp \left\{ -k \int\limits_0^z d\xi \cdot \bar{\varepsilon}_{\text{I}}(\xi) + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right\}.$$

Соответствующие распределению (7) моменты мощности подчиняются следующим соотношениям:

$$\langle P_{\text{лн}}^n(z) \rangle = \langle P_{\text{лн}} \rangle^n \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \cdot n(n-1)\sigma^2 \right\} \quad (n > 1),$$

$$\langle P_{\text{лн}}(z) \rangle = P_0 \exp \left\{ -k \int\limits_0^z d\xi \cdot \bar{\varepsilon}_{\text{I}}(\xi) + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right\} \quad (n = 1). \tag{8}$$

Укажем на интересную особенность рассмотренного приближения "крупномасштабных" ($f \to 0$, $g^2 \to 0$) флуктуаций диэлектрической проницаемости. В этом случае флуктуирующая мощность пучка, распространяющегося в случайно-неоднородной поглощающей среде, изменяется по следующему закону (аналогичному закону Бугера для интенсивности излучения):

$$P(z) = P_0 \cdot \exp\left\{-k \int_0^z d\xi \cdot [\bar{\varepsilon}_{\rm I}(\xi) + \tilde{\varepsilon}_{\rm I}(0, \xi)]\right\}. \tag{9}$$

Заметим, что в случае, когда роль "мелкомасштабных" флуктуаций существенна, изменения мощности в отдельных реализациях уже не будут подчиняться такой относительно простой закономерности.

Для определения условий применимости приближения "крупномасштабных" флуктуаций $\tilde{\varepsilon}_{\rm I}$ при расчете статистических характеристик мощности оценим значения параметров $f(z)$, $g^2(z)$. Исходя из (5) для довольно распространенных в оптике задач переноса гауссова пучка

$$I(\boldsymbol{\rho}, z)|_{z=0} = I_0 \cdot \exp\left\{-\frac{\rho^2}{a_0^2}\right\}$$

(где a_0 — начальный радиус пучка) в турбулентной среде с колмогоровским спектром флуктуаций $\tilde{\varepsilon}_{\rm I}$ ($\Phi_{\rm II}(\boldsymbol{\varkappa}, 0) = 0.033 \cdot C_{\rm II}^2 \cdot (\varkappa^2 + \varkappa_0^2)^{-11/6}$), $C_{\rm II}^2$ — структурная характеристика пульсаций $\tilde{\varepsilon}_{\rm I}$, $\varkappa_0 = 2\pi/L_0$) получим

$$f(z) \simeq -A_{\rm II}(0) \cdot \bar{P}(z) \cdot \left(\frac{a_{\text{эф}}(z)}{L_0}\right)^{5/3},$$

$$g^2(z) \simeq 0.2 \cdot A_{\rm II}(0) \cdot \overline{P(z)^2} \cdot \left(\frac{a_{\text{эф}}(z)}{2 \cdot L_0}\right)^{5/3}. \tag{10}$$

В соотношениях (10) через L_0 обозначен внешний масштаб турбулентности, а через $a_{\text{эф}}(z)$ — эффективный радиус пучка по прошествии трассы протяженностью z. Из (10) видно, что величины параметров f, g^2 сильно зависят от соотношения эффективного радиуса пучка и внешнего масштаба турбулентности $\delta = a_{\text{эф}}/L_0$. При распространении волновых пучков в естественных турбулентных средах, как правило, выполняется условие $\delta \ll 1$.

Проанализируем вклад "мелкомасштабной" фракции флуктуаций $\tilde{\varepsilon}_{\rm I}$ в изменение статистических моментов $\overline{P^n}$ мощности. "Динамические" уравнения для $\overline{P^n}$, соответствующие уравнению (6) для $W(P)$, имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dz}\overline{P^n(z)} = -n \cdot \left[k \cdot \bar{\varepsilon}_{\rm I}(z) - \frac{n}{2}\frac{\sigma^2}{z}\right] \cdot \overline{P^n(z)} + n(n-1) \cdot k^2 \times$$

$$\times \left[f(z) \cdot \overline{P^{n-1}} + \frac{1}{2} g^2(z) \cdot (1 - \delta_{2n}) \cdot \overline{P^{n-2}}\right]$$

с граничным условием $\left.\overline{P^n(z)}\right|_{z=0} = P_0^n$. В (11) через δ_{2n} обозначен символ Кронекера.

Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$\overline{P^n(z)} = \overline{P^n_{\text{лн}}(z)} \cdot e^{\Psi_n},$$

учитывающем отличие плотности вероятности $W(P)$ от логарифмически нормального распределения, что обусловлено влиянием "мелкомасштабных" пульсаций $\tilde{\varepsilon}_{\text{I}}$ на флуктуации мощности. Полагая, что поправки Ψ_n пропорциональны малому параметру δ, и сохраняя в (11) только слагаемые первого порядка малости по δ, для $\overline{P^n}$ получим

$$\langle P^n(z)\rangle = \langle P_{\text{лн}}(z)\rangle^n \exp\left\{\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\sigma^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{2}{z}\int\limits_0^z d\xi \cdot \left(\frac{a_{\text{эф}}(\xi)}{2\cdot L_0}\right)^{5/3} \exp\left[-(n-1)\sigma^2(\xi)\right]\right)\right\}.$$

Исходя из последнего выражения можно заключить, что при распространении пучка излучения в поглощающей турбулентной среде статистика флуктуаций мощности определяется логнормальным распределением при условии

$$\frac{1}{z}n(n-1)\cdot\sigma^2(z)\cdot\int\limits_0^z d\xi\cdot\left(\frac{a_{\text{эф}}(\xi)}{2\cdot L_0}\right)^{5/3}\exp\left[-(n-1)\sigma^2(\xi)\right] \ll 1,$$

которое хорошо выполняется для узких пучков излучения ($a_{\text{эф}}(z) \ll L_0$). При этом мощность пучка в отдельных реализациях изменяется по трассе в соответствии с законом, аналогичным закону Бугера для интенсивности излучения (см. (9)). Отметим, что такое представление мощности излучения позволяет существенно упростить вычисления смешанных моментов вида $\overline{I^m \cdot P^{-n}}$, необходимость в которых может возникнуть, например, при расчете эффективных параметров лазерного пучка в турбулентной поглощающей атмосфере ($n = m = 1$ — эффективная ширина, $n = m = 2$ — дисперсия "дрожания" энергетического центра).

Список литературы

[1] *Алмаев Р.Х., Суворов А.А.* // XVI Всесоюз. конф. по распространению радиоволн. Ч. II. Харьков, 1990. С 214. Труды ИЭМ. 1991. Вып. 23(146).

[2] *Гудмен Дж.* Статистическая оптика. М.: Мир, 1988. 528 с.

[3] *Патрушев Г.Я., Пелымский О.А.* // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 7. С. 124–127.

[4] *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.

[5] *Гординер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.

Научно-производственное объединение "Тайфун"
Обнинск
Калужская область

Поступило в Редакцию
12 марта 1992 г.