

01

©1993 г.

## СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ СОПРИКАСАЮЩИМИСЯ КРУГОВЫМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦИЛИНДРАМИ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*Ю. П. Емец, Ю. В. Обносов, Ю. П. Онофрийчук*

Рассчитаны силы, действующие между двумя диэлектрическими телами цилиндрической формы кругового сечения, помещенными в поперечное электрическое поле. Соприкасающиеся цилиндры неограниченной длины расположены параллельно друг другу. Электрические силы в неоднородной системе обусловлены поляризационными явлениями. На поверхностях цилиндрических тел, состоящих из различных материалов, действуют локальные силы. Цилиндры испытывают также действие интегральных сил и моментов, величины и направления которых зависят от диэлектрических проницаемостей материалов системы, от величины и направления внешнего электрического поля, а также от соотношения между радиусами цилиндров. При вычислении сил в рассматриваемой неоднородной системе используется точное решение полевой задачи.

### Введение

Как известно, неоднородные диэлектрические материалы, будучи помещенными в электрическое поле, испытывают действие сил и моментов. При отсутствии свободных зарядов причиной возникновения сил выступают поляризационные явления. Силы, вызванные этими процессами, пропорциональны градиенту диэлектрической проницаемости и квадрату напряженности электрического поля. В сильных электрических полях их влияние существенно и их необходимо принимать во внимание при разработке электрофизических установок и высоковольтных аппаратов.

Если диэлектрическая среда имеет кусочно-однородное строение, как в рассматриваемом случае, то электрические силы, обусловленные поляризацией диэлектриков, сосредоточены на граничных поверхностях, разделяющих объемы, в которых свойства диэлектриков сохраняются постоянными. Именно такие материалы обычно используются на практике.

Электрические силы в неоднородном диэлектрике вычисляются после того, когда рассчитано электрическое поле. В большинстве случаев расчеты полей вызывают наибольшие вычислительные затруднения, поскольку реальные объекты исследования имеют обычно сложное геометрическое строение. В этой связи важное значение приобретает изучение

модельных задач, которые на примерах сравнительно простых неоднородных систем позволяют установить характерные особенности формирования сил, типичные для многих неоднородных систем в технических устройствах. Одна из таких задач, вытекающая из теории дисперсных сред, рассматривается в настоящей работе.

### Формулировка краевой задачи и ее решение

В рассматриваемом случае необходимо рассчитать электрическое поле в неоднородной системе, представляющей собой неограниченную непроводящую среду, в которую погружены два длинных диэлектрических цилиндра, соприкасающихся друг с другом. Цилиндрические включения и окружающий их материал имеют различные диэлектрические проницаемости. Система находится во внешнем однородном поле, которое направлено перпендикулярно к осям цилиндров (рис. 1,а). При этих условиях электрическое поле в поперечном сечении можно считать плоскопараллельным.

При отсутствии свободных зарядов электрическое поле в объеме каждого однородного диэлектрика удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — векторы напряженности и индукции электрического поля соответственно,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость.

Двухмерные уравнения (1) совпадают с условиями Коши-Римана и поэтому позволяют ввести комплексные функции

$$E(z) = E_x - iE_y, \quad D(z) = D_x - iD_y \quad (z = x + iy),$$

которые являются аналитическими в областях  $S_p$  ( $p = 1, 2, 3$ ), занимаемых однородными диэлектриками, имеющих соответственно диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_p$  (рис.1,а).

При переходе через линии раздела разнородных материалов касательные компоненты вектора  $\mathbf{E}$  и нормальные компоненты вектора  $\mathbf{D}$  остаются непрерывными. Эти условия для функции  $E(z)$  записываются так:

$$\operatorname{Re}\{n(t)\varepsilon_1 E_1(t)\} = \operatorname{Re}\{n(t)\varepsilon_m E_m(t)\},$$

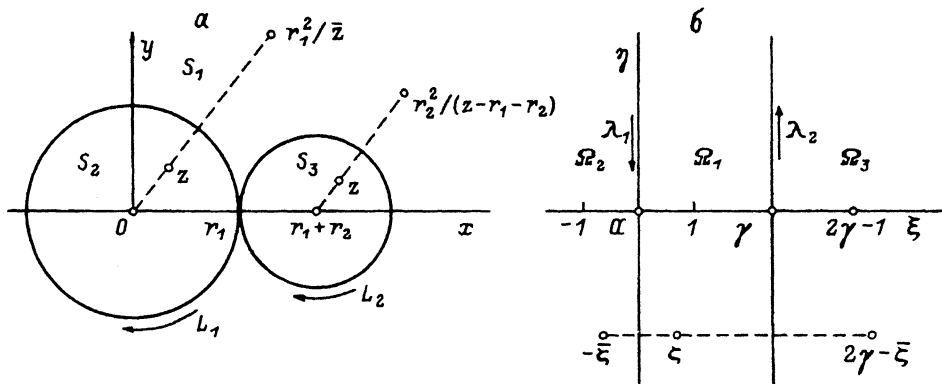


Рис. 1. Соответствие параметров при конформном отображении.

$$\operatorname{Im}\{n(t)E_1(t)\} = \operatorname{Im}\{n(t)E_m(t)\}, \quad t \in L_{m-1} (m = 2, 3), \quad (2)$$

где  $n(t)$  — единичная нормаль на граничных линиях  $L_1$  и  $L_2$

$$n(t) = t/r_1, \quad t \in L_1; \quad n(t) = (t - r_1 - r_2)/r_2, \quad t \in L_2; \quad (3)$$

$r_1$  и  $r_2$  — радиусы цилиндров (рис.1,а).

На бесконечно большом расстоянии от цилиндров внешнее электрическое поле однородно и имеет произвольное направление

$$E_1(\infty) = E_0 = E_{0x} - iE_{0y}. \quad (4)$$

Эта величина в задаче считается известной.

Соотношения (2)–(4) дают все необходимые условия для определения функции  $E(z)$ .

Граничные условия (2) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_1 E_1(t) + \varepsilon_1 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} = \varepsilon_2 E_2(t) + \varepsilon_2 \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)},$$

$$E_1(t) - \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_1(t)} = E_2(t) - \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \quad t \in L_1;$$

$$\varepsilon_1 E_1(t) + \varepsilon_1 \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_1(t)} = \varepsilon_3 E_3(t) + \varepsilon_3 \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_3(t)},$$

$$E_1(t) - \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_1(t)} = E_3(t) - \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2, \quad (5)$$

где черта над функцией означает комплексное сопряжение.

Граничные соотношения (5) исключением функции  $\overline{E_1(t)}$  приводятся к эквивалентным равенствам

$$(1 + \Delta_{12})E_1(t) = E_2(t) - \Delta_{12} \left(\frac{r_1}{t}\right)^2 \overline{E_2(t)}, \quad t \in L_1;$$

$$(1 + \Delta_{13})E_1(t) = E_3(t) - \Delta_{13} \left(\frac{r_2}{t - r_1 - r_2}\right)^2 \overline{E_3(t)}, \quad t \in L_2, \quad (6)$$

где  $\Delta_{1m}$  — относительная диэлектрическая проницаемость, определяемая формулой

$$\Delta_{1m} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + \varepsilon_m}, \quad -1 < \Delta_{1m} < 1.$$

Соотношения (6) представляют собой условия однородной обобщенной краевой задачи Римана с разрывными коэффициентами.

Таким образом, расчет электрического поля в рассматриваемой неоднородной трехкомпонентной системе сводится к нахождению кусочно-аналитической функции  $E(z) = \{E_p(z), z \in S_p, p = 1, 2, 3\}$ , удовлетворяющей граничным соотношениям (6) с дополнительным условием (4). Эта

задача имеет точное решение в аналитическом виде; его вывод изложен в Приложении. Ниже приведены окончательные результаты

$$\begin{aligned}
 E_1(z) &= E_0 + (\delta r_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} (\Delta_{12} \Delta_{13})^k \left\{ E_0 \left[ \left( z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-2} + \left( z - r_1 \frac{k-\delta}{k} \right)^{-2} \right] - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \bar{E}_0 \left[ \frac{1}{\Delta_{12}} \left( \frac{k}{k-\delta} \right)^2 \left( z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-2} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{\Delta_{13}} \left( \frac{k}{k+\delta-1} \right)^2 \left( z - r_1 \frac{k-1}{k+\delta-1} \right)^{-2} \right] \right\} \right\}, \quad z \in S_1; \\
 E_2(z) &= (1 + \Delta_{12}) \left\{ E_0 + (\delta r_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} (\Delta_{12} \Delta_{13})^k \left[ E_0 \left( z - r_1 \frac{k+\delta}{k} \right)^{-2} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{\bar{E}_0}{\Delta_{12}} \left( \frac{k}{k-\delta} \right)^2 \left( z - r_1 \frac{k}{k-\delta} \right)^{-2} \right] \right\} \right\}, \quad z \in S_2; \\
 E_3(z) &= (1 + \Delta_{13}) \left\{ E_0 + (\delta r_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} (\Delta_{12} \Delta_{13})^k \left[ E_0 \left( z - r_1 \frac{k-\delta}{k} \right)^{-2} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{\bar{E}_0}{\Delta_{13}} \left( \frac{k}{k+\delta-1} \right)^2 \left( z - r_1 \frac{k-1}{k+\delta-1} \right)^{-2} \right] \right\} \right\}, \quad z \in S_3. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Здесь обозначено  $\delta = 1/\gamma = r_2/(r_1 + r_2)$ ,  $0 \leq \delta < 1$ . Структура формул довольно проста. Они содержат бесконечные ряды, члены которых представляют собой выражения плоских диполей, расположенных на отрезках  $[0, r_1]$  и  $(r_1, r_1 + r_2]$  оси  $x$  с точкой сгущения  $x = r_1$ .

Следует отметить, что моменты диполей содержат параметры  $1/k^2$  и  $(\Delta_{12} \Delta_{13})^k$ , которые с увеличением числа  $k$  стремятся к нулю и поэтому делают ряды быстро затухающими. Эта замечательная особенность полученного решения позволяет в практических расчетах ограничиваться малым числом членов этих рядов, причем в некоторых случаях вполне достаточно учитывать только первые члены. Приближенные формулы, учитывающие, например, лишь диполи, расположенные в центрах кругов, имеют особенно простой вид

$$\begin{aligned}
 E_1(z) &= E_0 - \bar{E}_0 \left\{ \Delta_{12} \left( \frac{r_1}{z} \right)^2 + \Delta_{13} \left( \frac{\delta r_1}{z - r_1 - r_2} \right)^2 \right\}, \quad z \in S_1; \\
 E_2(z) &= (1 + \Delta_{12}) \left[ E_0 + \bar{E}_0 \Delta_{13} \left( \frac{\delta r_1}{z - r_1 - r_2} \right)^2 \right], \quad z \in S_2; \\
 E_3(z) &= (1 + \Delta_{13}) \left[ E_0 + \bar{E}_0 \Delta_{12} \left( \frac{r_1}{z} \right)^2 \right], \quad z \in S_3. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Этими выражениями электрическое поле определено с точностью до членов, содержащих параметры  $\Delta_{12}\Delta_{13}$  не выше первой степени.

Из приведенных формул (7) и (8) легко получить некоторые частные решения. Так, если в формулах (7) и (8) перейти к пределу  $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_1$  (т.е.,  $\Delta_{13} \rightarrow 0$ ), то получим известное решение для уединенного диэлектрического цилиндра

$$E_1(z) = E_3(z) = E_0 - \bar{E}_0 \Delta_{12} \left( \frac{r_2}{z} \right)^2, \quad E_2(z) = (1 + \Delta_{12}) E_0.$$

Из полученного решения (7) следует, что наибольшая неоднородность напряженности электрического поля возникает вблизи точки касания диэлектрических цилиндров. В этой области наблюдается также наибольшее отклонение приближенного решения от точного.

### Действие электрических сил

В рассматриваемой неоднородной системе свободные заряды отсутствуют. Считается также, что электрострикционные эффекты в диэлектрических материалах несущественны и их влиянием в последующем анализе можно пренебречь. При этих условиях электрические силы в неоднородной среде обусловлены только поляризационными явлениями в диэлектриках. Вектор плотности сил  $\mathbf{f}$  определяется формулой [1,2]

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \varepsilon. \quad (9)$$

Здесь  $E$  — модуль вектора  $\mathbf{E}$ . Направление силы  $\mathbf{f}$  совпадает с градиентом диэлектрической проницаемости. Применительно к изучаемой кусочно-однородной среде это означает, что силы  $\mathbf{f}$  распределены лишь на границе раздела разнородных диэлектриков и направлены перпендикулярно к граничному контуру. Эта сила имеет следующее выражение [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{2} \mathbf{n} (\varepsilon_{(-)} - \varepsilon_{(+)}) \left[ E_{(+)t}^2 + \frac{\varepsilon_{(+)}}{\varepsilon_{(-)}} E_{(+)n}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{n} (\varepsilon_{(-)} - \varepsilon_{(+)}) \left[ E_{(-)t}^2 + \frac{\varepsilon_{(-)}}{\varepsilon_{(+)}} E_{(-)n}^2 \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали, направленный в сторону диэлектрического материала, параметры которого зафиксированы индексом (+);  $\varepsilon_{(+)}$  и  $\varepsilon_{(-)}$  — диэлектрические проницаемости смежных сред;  $E_{(\pm)n}$  и  $E_{(\pm)t}$  — нормальные и касательные компоненты вектора напряженности электрического поля на контуре при подходе к нему с разных сторон.

Для вычисления плотности сил на круговых контурах диэлектрических включений в формулу (10) необходимо подставить соответствующие значения напряженности электрического поля из полученного решения (7).

На границе раздела непроводящих сред вектор плотности сил  $\mathbf{f}$  направлен, как это вытекает из формулы (10), в сторону того из диэлектриков, диэлектрическая проницаемость которого меньше. Цилиндрическое тело, следовательно, испытывает на поверхности действие сил

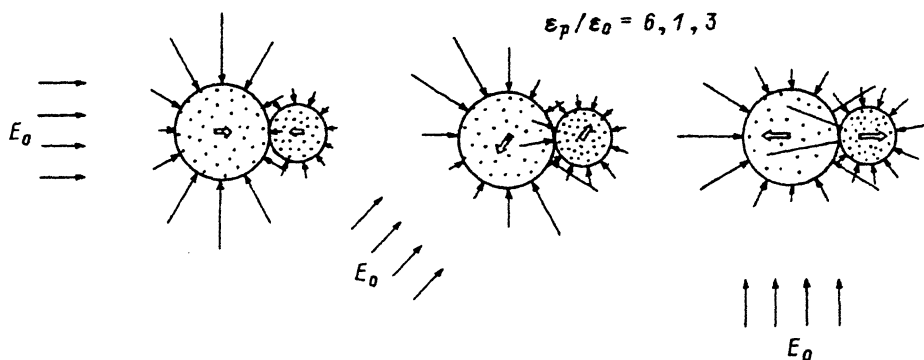


Рис. 2. Картина распределения локальных и интегральных сил в зависимости от направления внешнего поля.

растяжения (если его диэлектрическая проницаемость больше проницаемости окружающей среды) и сил давления (если, напротив, его диэлектрическая проницаемость меньше). Силы  $f$  на поверхности цилиндров распределены таким образом, что включения, испытывая давление либо растяжение, стремятся вытянуться вдоль направления вектора внешнего электрического поля. Сказанное можно проиллюстрировать рис. 2, где показано распределение вектора плотности сил (в относительных величинах  $f_* = f/\epsilon_0|E_0|^2$ ) в системе с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_p/\epsilon_0 = 6, 1, 3$  для трех направлений вектора внешнего электрического поля  $E_0$  ( $E_0 = |E_0| \exp(i\alpha)$ ,  $\alpha = 0, \pi/4$  и  $\pi/2$ ). Распределение сил  $f$  зависит от геометрических параметров неоднородной системы и ее диэлектрических характеристик, а также от аргумента функции  $E_0$ . Справедливость последнего замечания наглядно прослеживается на рис. 2.

Неравномерное распределение сил  $f$  на поверхностях, разграничивающих различные диэлектрические материалы, приводит к возникновению интегральных сил  $F$  взаимодействия между включениями.

Интегральные силы  $F$ , приложенные к каждому цилиндрическому включению, и их компоненты  $F_r$  и  $F_\tau$  равны по величине и противоположны по направлениям. Центральные силы  $F_r$  действуют вдоль прямой, соединяющей центры включений (в поперечном сечении цилиндров). Это — силы взаимного притяжения, или отталкивания, цилиндрических тел. Вторые компоненты — касательные силы  $F_\tau$  перпендикулярны силам  $F_r$  (они направлены параллельно общей касательной соприкасающихся цилиндров). Эти силы стремятся повернуть включения вдоль направления внешнего электрического поля или перпендикулярно к нему.

Расчеты, выполненные с помощью вычислительных машин при изменениях параметров системы, показали, что силы  $F_r$  и  $F_\tau$  зависят от величины и направления внешнего электрического поля в неоднородной системе. Эти силы зависят также от соотношения радиусов цилиндров и соотношения между диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_p$  всех трех материалов. Эти зависимости характеризуются следующими особенностями.

1. Силы  $F_r$  и  $F_\tau$  принимают максимальные значения при  $r_* = r_1/r_2 \approx 1-5$  для всех величин  $\epsilon_p$ , независимо от угла  $\alpha$ , определяющего ориен-

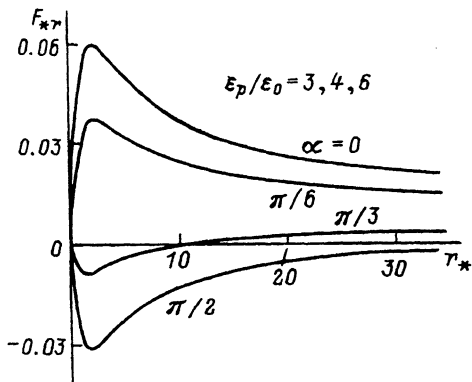


Рис. 3. Зависимость относительной величины центральной силы от относительного радиуса для некоторых направлений внешнего поля.

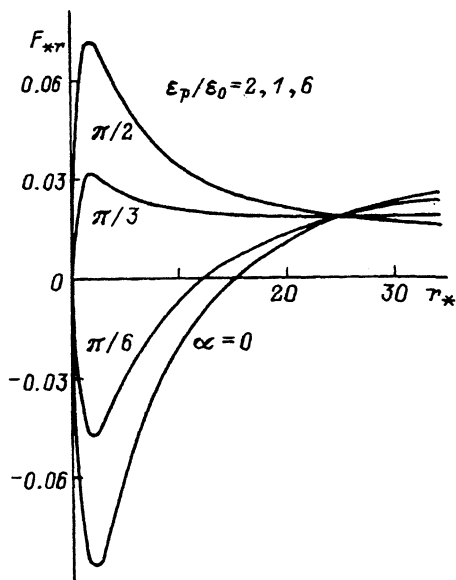


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но для других значений диэлектрических проницаемостей.

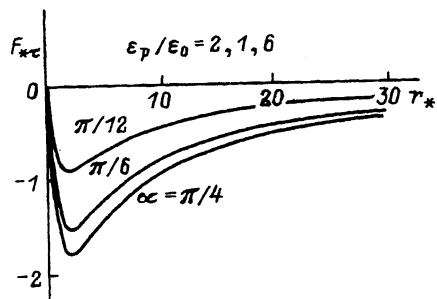


Рис. 5. Зависимость относительной величины касательной силы от относительного радиуса для некоторых направлений внешнего поля.

тацию внешнего электрического поля в системе (следует заметить, что для некоторых значений угла  $\alpha$  максимум может отсутствовать). Сказанное иллюстрируют кривые на рис. 3–5, где построены зависимости относительных значений сил  $F_{*r}$  и  $F_{*t}$  ( $F_* = F/(2\pi\epsilon_0|E_0|^2r_1)$ ) от геометрического параметра  $r_*$  при  $\epsilon_p/\epsilon_0 = \{3, 4, 6\}$  (рис. 3),  $\epsilon_p/\epsilon_0 = \{2, 1, 6\}$  (рис. 4, 5) и углах, указанных на рисунках.

2. Рассматривая зависимость  $F_{*r}(r_*)$ , можно отметить, что для некоторых величин  $\alpha$  и  $\epsilon_p$  силы  $F_r$  при изменении параметра  $r_*$  будут закономерными. Иными словами, силы  $F_r$  будут менять свое направление — притяжение включений к друг другу переходит в отталкивание, и наоборот. Имеются, следовательно, такие соотношения между радиусами включений, при которых отсутствует силовое взаимодействие соприкасающихся включений (рис. 3 и 4).

3. При достаточно больших величинах параметра  $r_*$  ( $r_* > 20$ ) силы  $F_r$  имеют один знак и на их направление не оказывает влияние направление

внешнего поля. В этом случае характер действия сил в системе такой же, как и в системе с касанием цилиндрического включения плоскости, разделяющей полупространства с различными диэлектриками: направлением силы  $F_T$ , действующей на включение, определяется только соотношением между диэлектрическими проницаемостями полупространств ( $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$ ) и не зависит от диэлектрической проницаемости включения ( $\varepsilon_2$ ). В данной системе аналогично, если выполняется условие  $\varepsilon_1 < \varepsilon_3$ , то включение с малым радиусом ( $r_1$ ) притягивается к включению с большим радиусом ( $r_2$ ). Если же  $\varepsilon_1 > \varepsilon_3$ , то оно отталкивается.

4. При соотношениях диэлектрических проницаемостей  $\Delta_{12}\Delta_{13} < 0$  всегда имеется такое конечное значение параметра  $r_*$ , при котором силы  $F_T$  не зависят от угла  $\alpha$  и принимают одну и ту же величину (на рис. 4 кривые  $F_{*T}(r_*)$  для разных  $\alpha$  пересекаются в одной точке — образуют “узел”).

5. Касательные силы  $F_T$  пропорциональны  $\sin(2\alpha)$ . Поэтому при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$  они равны нулю, а при  $\alpha = \pi/4$  принимают максимальные значения.

6. При всех значениях параметра  $r_*$  силы  $F_T$  сохраняют свои направления, при этом знаки сил  $F_T$  зависят от параметра  $\Delta_{12}\Delta_{13}$ . Если  $\Delta_{12}\Delta_{13} > 0$ , то своим действием силы  $F_T$  стремятся ориентировать включения вдоль направления внешнего электрического поля ( $\alpha = 0$ ). В этом смысле положение системы при  $\alpha = 0$  можно считать устойчивым. Напротив, при  $\alpha = \pi/2$  система находится в неустойчивом равновесии: малое отклонение от этого положения приводит к возникновению сил  $F_T$ , которые действуют в том же направлении. Если  $\Delta_{12}\Delta_{13} < 0$ , то ситуация противоположна предыдущей. Силы  $F_T$  в этом случае имеют такие знаки, что своим действием они стремятся ориентировать систему касающихся включений поперечно направлению внешнего электрического поля ( $\alpha = \pi/2$ ). Положение при  $\alpha = 0$  неустойчиво: малое отклонение от него вызывает появление касательных сил  $F_T$  в направлении отклонения. Пример зависимости  $F_{*T}(r_*)$  для системы с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_p/\varepsilon_0 = \{2, 1, 6\}$  и углами  $\alpha = \{\pi/12, \pi/6, \pi/4\}$  приведен на рис. 5.

Особенности действия интегральных сил в рассматриваемой неоднородной системе объясняется структурой электрического поля. При этом полезно иметь в виду характерное свойство в поведении диэлектриков, находящихся в неоднородном электрическом поле: они стремятся переместиться в область повышенной напряженности электрического поля.

## Приложение

Ниже дано точное решение сформулированной во втором разделе обобщенной задачи Римана (2.6).

Вначале рассматриваемая система (рис. 1,а) дробно-линейной функцией

$$\zeta = \xi + i\eta = T^{-1}(z) = \frac{z + r_1}{z - r_1} \quad \left( T(\zeta) = r_1 \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) \quad (\text{П.1})$$

отображается на плоскость комплексной переменной  $\zeta$ . При отображении (П.1) окружности  $L_1$  и  $L_2$  преобразуются в прямые  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Соответствие точек при отображении показано на рис. 1; области  $S_p$  ( $p = 1, 2, 3$ ) на плоскости  $z$  переходят соответственно в области  $\Omega_p$  на плоскости  $\zeta$ .



Отображение, осуществляемое функцией  $T(\zeta)$ , обладает следующими свойствами:

$$\overline{T(-\bar{\zeta})} = \frac{r_1^2}{T(\zeta)}, \quad \overline{T(2\gamma - \bar{\zeta})} = \frac{r_2^2}{T(\zeta) - r_1 - r_2} + r_1 + r_2, \quad (\text{П.2})$$

что вытекает из свойств сохранения симметричных точек при дробно-линейном отображении. Точкам  $z$  и  $r_1^2/\bar{z}$ , симметричным относительно окружности  $L_1$ , и точкам  $z$  и  $r_2^2/(\bar{z} - r_1 - r_2) + r_1 + r_2$ , симметричным относительно окружности  $L_2$ , на плоскости  $\zeta$  соответствуют пары точек  $\zeta$ ,  $-\bar{\zeta}$  и  $\zeta$ ,  $2\gamma - \bar{\zeta} = 2(r_1 + r_2)/r_2 - \bar{\zeta}$ , симметричные относительно прямых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно (рис. 1).

На плоскости  $\zeta$  краевая задача формулируется для функции  $f(\zeta) = E(T(\zeta))$ . Согласно (2.6), с учетом (П.1) и (П.2) имеем

$$(1 + \Delta_{12})f_1(\tau) = f_2(\tau) - \Delta_{12} \left( \frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_2(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_1;$$

$$(1 + \Delta_{13})f_1(\tau) = f_3(\tau) - \Delta_{13} \left( \frac{r_2}{T(\tau) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_3(\tau)}, \quad \tau \in \lambda_2. \quad (\text{П.3})$$

Соотношения (П.3) должны быть дополнены равенством

$$f_1(1) = E_0, \quad (\text{П.4})$$

которое следует из условия (2.4).

Приступая к решению задачи, введем следующее представление функции  $f_1(\zeta)$ :

$$f_1(\zeta) = f_1^+(\zeta) + f_1^-(\zeta), \quad (\text{П.5})$$

где  $f_1^+(\zeta)$  — аналитическая функция при  $\text{Re } \zeta < \gamma$ ,  $f_1^-(\zeta)$  — аналитическая функция при  $\text{Re } \zeta > 0$ .

Единственность представления (П.5) с учетом (П.4) достигается следующей нормировкой:

$$f_1^+(1) = 0, \quad f_1^- = E_0. \quad (\text{П.6})$$

На основании представления (П.5) граничные условия (П.3) преобразуются к виду

$$(1 + \Delta_{12})f_1^+(\tau) - f_2(\tau) = -\Delta_{12} \left( \frac{r_1}{T(\tau)} \right)^2 \overline{f_2(\tau)} - (1 + \Delta_{12})f_1^-(\tau), \quad \tau \in \lambda_1;$$

$$(1 + \Delta_{13})f_1^-(\tau) - f_3(\tau) = -\Delta_{13} \left( \frac{r_2}{T(\tau) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_3(\tau)} - (1 + \Delta_{13})f_1^+(\tau), \quad \tau \in \lambda_2.$$

Отсюда в соответствии с принципом аналитического продолжения по непрерывности следует, что на плоскости  $\zeta$  можно ввести две аналитические функции

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} (1 + \Delta_{12})f_1^+(\zeta) - f_2(\zeta), & \operatorname{Re} \zeta \leq 0, \\ -(1 + \Delta_{12})f_1^-(\zeta) - \Delta_{12} (r_1/T(\zeta))^2 \overline{f_2(-\bar{\zeta})}, & \operatorname{Re} \zeta \geq 0, \end{cases}$$

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} (1 + \Delta_{13})f_1^-(\zeta) - f_3(\zeta), & \operatorname{Re} \zeta \geq \gamma, \\ -(1 + \Delta_{13})f_1^+(\zeta) - \Delta_{13} (r_2/T(\zeta) - r_1 - r_2)^2 \overline{f_3(2\gamma - \bar{\zeta})}, & \operatorname{Re} \zeta \leq \gamma. \end{cases} \quad (\text{П.7})$$

При этом следует учитывать, что функция

$$\frac{r_1}{T(\zeta)} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \quad (\text{П.8})$$

аналитическая при  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ , а функция

$$\frac{r_2}{T(\zeta) - r_1 - r_2} = \frac{r_2(\zeta - 1)}{2r_1 - r_2(\zeta - 1)} \quad (\text{П.9})$$

аналитическая при  $\operatorname{Re} \zeta < \gamma$ .

По теореме Лиувилля функция, аналитическая всюду на расширенной плоскости комплексной переменной, постоянна. Следовательно, в данном случае

$$\Phi(\zeta) \equiv C_1 = \text{const}, \quad \Psi(\zeta) \equiv C_2 = \text{const}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются с помощью условия (П.6), подстановка которого в формулы (П.7), где учтены значения функций (П.8) и (П.9), дает

$$\Phi(\zeta) \equiv -(1 + \Delta_{12})E_0, \quad \Psi(\zeta) \equiv 0. \quad (\text{П.10})$$

Таким образом, согласно выражениям (П.7) и (П.10), имеем

$$\begin{cases} (1 + \Delta_{12})f_1^+(\zeta) - f_2(\zeta) = -(1 + \Delta_{12})E_0, & \operatorname{Re} \zeta \leq 0, \\ (1 + \Delta_{12})f_1^-(\zeta) + \Delta_{12} (r_1/T(\zeta))^2 \overline{f_2(-\bar{\zeta})} = (1 + \Delta_{12})\bar{E}_0, & \operatorname{Re} \zeta \geq 0, \\ (1 + \Delta_{13})f_1^-(\zeta) - f_3(\zeta) = 0, & \operatorname{Re} \zeta \geq \gamma, \\ (1 + \Delta_{13})f_1^+(\zeta) + \Delta_{13} (r_2/T(\zeta) - r_1 - r_2)^2 \overline{f_3(2\gamma - \bar{\zeta})} = 0, & \operatorname{Re} \zeta \leq \gamma. \end{cases} \quad (\text{П.11})$$

На основании представления (П.5), а также первого и третьего соотношений (П.11) разыскиваемую кусочно-аналитическую функцию  $f(\zeta)$  можно записать так:

$$f(\zeta) = \begin{cases} f_1(\zeta) = f_1^+(\zeta) + f_1^-(\zeta), & 0 < \operatorname{Re} \zeta < \gamma, \\ f_2(\zeta) = (1 + \Delta_{12})[E_0 + f_1^+(\zeta)], & \operatorname{Re} \zeta < 0, \\ f_3(\zeta) = (1 + \Delta_{13})f_1^-(\zeta), & \operatorname{Re} \zeta > \gamma. \end{cases} \quad (\text{П.12})$$

Вопрос, как видно, сводится к нахождению функции  $f_1^+(\zeta)$  и  $f_1^-(\zeta)$  в соответствующих областях. Для одной из этих функций, например  $f_1^-(\zeta)$ ; из соотношений (П.11) можно получить функциональное уравнение. С этой целью необходимо провести ряд преобразований.

Вначале в третьем и четвертом равенствах (П.11) выполняется преобразование симметрии соответственно относительно прямых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ; в результате система соотношений (П.11) принимает вид

$$\begin{cases} (1 + \Delta_{12})f_1^+(\zeta) - f_2(\zeta) = -(1 + \Delta_{12})E_0, & \text{Re } \zeta \leq 0, \\ (1 + \Delta_{12})\overline{f_1^-(\zeta)} + \Delta_{12} \left( \frac{r_1}{T(-\zeta)} \right)^2 f_2(\zeta) = (1 + \Delta_{12})\bar{E}_0, & \text{Re } \zeta \leq 0, \\ (1 + \Delta_{13})\overline{f_1^-(2\gamma - \zeta)} - f_3(2\gamma - \zeta) = 0, & \text{Re } \zeta \leq \gamma, \\ (1 + \Delta_{13})f_1^+(\zeta) + \Delta_{13} \left( \frac{r_2}{T(\zeta) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_3(2\gamma - \zeta)} = 0, & \text{Re } \zeta \leq \gamma. \end{cases} \quad (\text{П.13})$$

Здесь в отличие от системы (П.11) первая и вторая пары соотношений имеют уже одну (каждая свою) область определения. Из первой пары равенств (П.13) можно исключить функцию  $f_2(\zeta)$ , а из второй —  $f_3(2\gamma - \zeta)$ , тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{12} \left( \frac{r_1}{T(-\zeta)} \right)^2 f_1^+(\zeta) + \overline{f_1^-(\zeta)} &= \bar{E}_0 - E_0 \Delta_{12} \left( \frac{r_1}{T(-\zeta)} \right)^2, & \text{Re } \zeta \leq 0, \\ f_1^+(\zeta) + \Delta_{13} \left( \frac{r_2}{T(\zeta) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_1^-(2\gamma - \zeta)} &= 0, & \text{Re } \zeta \leq \gamma. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Исключая из равенств (П.14) функцию  $f_1^+(\zeta)$ , имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{r_1}{T(-\zeta)} \right)^{-2} \overline{f_1^-(\zeta)} - \Delta_{12} \Delta_{13} \left( \frac{r_2}{T(\zeta) - r_1 - r_2} \right)^2 \overline{f_1^-(2\gamma - \zeta)} &= \\ = \bar{E}_0 \left( \frac{r_1}{T(-\zeta)} \right)^2 - \Delta_{12} E_0, & \text{Re } \zeta \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

С помощью преобразования симметрии относительно прямой  $\lambda_1$  (рис.1,б) соотношение (П.15) приводится к виду

$$\begin{aligned} f_1^-(\zeta) - \Delta_{12} \Delta_{13} \left( \frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2 \left( \frac{r_2}{T(-\zeta) - r_1 - r_2} \right)^2 f_1^-(2\gamma + \zeta) &= \\ = E_0 - \bar{E}_0 \Delta_{12} \left( \frac{r_1}{T(\zeta)} \right)^2, & \text{Re } \zeta \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

С учетом выражения функции  $T(\zeta)$ , определенной в (П.1), соотношение (П.16) можно записать так:

$$f_1^-(\zeta) = E_0 - \bar{E}_0 \Delta_{12} \left( \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^2 + \Delta_{12} \Delta_{13} \left( \frac{\zeta-1}{\zeta+2\gamma-1} \right)^2 f_1^-(\zeta+2\gamma), \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 0. \quad (\text{П.17})$$

Это равенство содержит одну (из двух) неизвестную функцию  $-f_1^-(\zeta)$ , и его следует рассматривать как функциональное уравнение для определения этой функции.

Присоединяя к соотношениям (П.17) совокупность уравнений, получающихся из него последовательной заменой  $\zeta$  на  $\zeta + 2\gamma$ , и исключая из построенной таким образом системы функции  $f_1^-(\zeta + 2\gamma)$ ,  $f_1^-(\zeta + 2\gamma)$  и т.д., на  $n$ -м шаге приходим к представлению

$$f_1^-(\zeta) = (\zeta - 1)^2 \sum_{k=0}^n \left\{ (\Delta_{12} \Delta_{13})^k \left[ \frac{E_0}{(\zeta + 2k\gamma - 1)^2} - \frac{\Delta_{12} \bar{E}_0}{(\zeta + 2k\gamma + 1)^2} \right] \right\} +$$

$$+ (\Delta_{12} \Delta_{13})^{2(n+1)} \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta + 2(n+1)\gamma - 1} \right)^2 f_1^-(\zeta + 2(n+1)\gamma), \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 0.$$

При неограниченном увеличении числа  $n$  остаточный член этого ряда стремится к нулю. Таким образом, функция  $f_1^-(\zeta)$  имеет следующее выражение:

$$f_1^-(\zeta) = E_0 + (\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12} \Delta_{13})^k \left[ \frac{E_0}{(\zeta + 2k\gamma - 1)^2} - \frac{1}{\Delta_{13}} \frac{\bar{E}_0}{(\zeta + 2k\gamma + 1)^2} \right] \right\}, \quad \operatorname{Re} \zeta \geq 0. \quad (\text{П.18})$$

Обращаясь теперь ко второму соотношению (П.14), с помощью формул (П.1) и (П.18) можно получить выражение функции  $f_1^+(\zeta)$ . Простые вычисления дают

$$f_1^-(\zeta) = (\zeta - 1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\Delta_{12} \Delta_{13})^k \left[ \frac{E_0}{(\zeta - 2k\gamma - 1)^2} - \frac{1}{\Delta_{12}} \frac{\bar{E}_0}{(\zeta - 2k\gamma + 1)^2} \right] \right\}, \quad \operatorname{Re} \zeta \leq \gamma.$$

После нахождения функций  $f_1^+(\zeta)$  и  $f_1^-(\zeta)$  определяется, согласно формулам (П.12), кусочно-аналитическая функция  $f(\zeta)$ . Осуществляя затем переход в плоскость переменной  $z$ , получаем решение рассматриваемой краевой задачи. Оно в окончательном виде представлено во втором разделе формулами (2.7).

### Список литературы

- [1] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 620 с.
- [2] *Durand E.* Electrostatique. Т. 3. Methodes de calcul dielectriques. Paris: Masson, 1966. 389 p.
- [3] *Лаурентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

Киевский политехнический институт

Поступило в Редакцию  
26 февраля 1993 г.  
В окончательной редакции  
19 августа 1993 г.