

01

©1993 г.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ СООСНЫХ ИДЕАЛЬНО-ДИАМАГНИТНЫХ ОДИНАКОВЫХ КОЛЕЦ С ТОКОМ НА БЛИЗКОМ РАССТОЯНИИ

И.А. Спицын

Для двух тождественных идеально-диамагнитных соосных колец с радиусом поперечного сечения, намного меньшим радиуса колец, дан последовательный вывод соотношений для силовых характеристик их взаимодействия, верных на близких расстояниях колец друг от друга. Для конкретных случаев проведено сопоставление результатов вычислений для колец с конечным радиусом поперечного сечения с результатами для соответствующих контуров. Найдены простые предельные соотношения для индуктивности и силы при малых зазорах между кольцами, верные в достаточно широкой области изменения величины зазора.

Для практических нужд гравиметрии, навигации, а также в ряде физических исследований [1,2] важно знать силовые характеристики взаимодействия колец с протекающими по ним токами. В ряде работ [3-5] рассмотрена задача взаимодействия круговых контуров. Однако эти рассмотрения не применены к взаимодействию колец с конечным поперечным сечением на близких расстояниях, где существенно перераспределение плотности токов на кольцах из-за эффекта индукции. В настоящей работе для двух идеально-диамагнитных колец с конечными радиусами поперечных сечений приведен вывод силовых характеристик взаимодействия колец на близком расстоянии друг от друга. Проводится сопоставление полученных результатов с данными по контурам.

Перед рассмотрением задачи взаимодействия идеально-диамагнитных (сверхпроводящих) колец рассмотрим вспомогательную двумерную задачу о взаимодействии двух бесконечных цилиндров с радиусами r_0 и по протекающими по ним токами J_1 и J_2 (рис.1). Расстояние между центрами цилиндров O_1 и O_2 примем за $2H$. Решение этой задачи найдем на основе решения парных интегральных уравнений. Для сверхпроводников ток и магнитное поле сосредоточены в тонком приповерхностном слое. Для поверхностной плотности тока j на границе выполняется условие $j = H_{tg}$ [6]. Магнитное поле H_{tg} складывается из поля токового слоя в данной точке на поверхности и из внешнего магнитного поля поверхностных токов $H_{tg}^{(b)}$, распределенных по поверхности цилиндров. Так как внутри сверхпроводника $H = 0$, то магнитное поле от поверхностных токов в заданной точке поверхности $H_{tg}^{(b)} = (1/2)H_{tg} = (1/2)j$. Введем углы φ_1

и φ_2 , как показано на рис.1. Тангенциальная составляющая магнитного поля в какой-либо точке P цилиндра от токовой нити с током jdl в другой точке поверхности какого-либо цилиндра есть

$$dH_{tg}^{(b)} = \frac{jdl}{4\pi r} \cos(\mathbf{r}\mathbf{n})$$

[7], где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный от элемента dl в точку P , а \mathbf{n} — нормали к поверхности в этой точке.

Суммируя вклады тангенциальных к поверхности компонент магнитного поля от всех поверхностных токов двух цилиндров, для плотностей токов j_1 и j_2 , определяемых углами φ_1 и φ_2 , получаем систему двух интегральных уравнений

$$j_i(\varphi_i) = 2H_{tg}^{(b)} = \frac{1}{-2\pi} \left[\frac{J_i}{r_0} + \int_0^{2\pi} j_k(\varphi') \left(1 - \frac{2h(h - \cos \varphi')}{\Delta_i} \right) d\varphi' \right], \quad (1)$$

где $h = H/r_0$, $\Delta_i = 1 + \cos(\varphi_i + \varphi') - 2h(\cos \varphi_i + \cos \varphi') + 2h^2$, при значении индекса $i = 1, 2$ индекс k принимает значения 2 и 1 соответственно.

Введем углы θ_i , определяемые равенствами $\cos \theta_i = (1 - h \cos \varphi_i) / (h - \cos \varphi_i)$. Угол θ_1 представляет собой угол между горизонтальной осью и радиусом первого цилиндра, проведенным в точку пересечения K_1 первой окружности и прямой, проходящей через точку P_1 и точку C_2 , положение которой определяется равенством $O_1C_1 \cdot O_1C_2 = r_0^2$ ($O_1C_1 = O_2C_2$) (рис.1). Аналогично определяется угол θ_2 . При изменении углов φ_i от 0 до 2π , соответствующие значения углов θ_i изменяются от π до $-\pi$. Вводя обозначения

$$\tilde{j}_i = \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{h - \cos \theta_i}$$

и переходя в (1) к переменным θ_i , получим

$$\tilde{j}_i(\theta_i) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{J_1 + J_2}{r_0} \frac{1 - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \theta_i} - \int_0^{2\pi} \tilde{j}_k(\theta') \frac{1 - q^4}{1 + q^4 - 2q^2 \cos(\theta_i - \theta')} d\theta' \right], \quad (2)$$

$$q = \frac{O_1C}{r_0} = h - \sqrt{h^2 - 1}. \quad (2a)$$

Решение системы (2) будем искать в виде

$$\tilde{j}_i = \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{ni} \cos n\theta_i,$$

где

$$a_{ni} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{j}_i(\theta) \cos n\theta d\theta.$$

Используем разложение $(1 - z^2)(1 + z^2 - 2z \cos \theta)^{-1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos n\theta$ [8] и представим в виде ряда правую и левую части (2). Приравнивание коэффициентов при $\cos n\theta$ в правой и левой частях (2) приводит к уравнениям, определяющим a_{ni} .

$$a_{ni} = \frac{J_1 + J_2}{\pi r_0} q^n - a_{nk} q^{2n}, \quad a_{0i} = \frac{1}{\pi r_0} J_i. \quad (3)$$

Здесь, как и раньше, при $i = 1$ индекс k равен 2, и наоборот. Разрешая (3) относительно a_n , получим

$$a_{n1} = a_{n2} = \frac{J_1 + J_2}{\pi r_0} \frac{q^n}{1 + q^{2n}}.$$

Окончательно соотношение для плотности тока j_i на поверхности i -того цилиндра запишем в компактном виде

$$j_i = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{h - \cos \theta_i}{\sqrt{h^2 - 1}} \left[J_i + (J_1 + J_2) \left(\frac{K}{\pi} \operatorname{dn}(u|m) - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4)$$

$$u = \frac{K}{\pi} \theta_i, \quad q = \exp(-\pi K'/K), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

При записи соотношения (4) использовалось представление функции $\operatorname{dn}(u|m)$ [8] через параметр Якоби q

$$\operatorname{dn}(u|m) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos n\theta. \quad (6)$$

Величины K и K' представляют собой полные эллиптические интегралы 1-го рода с прямым и дополнительным параметрами m и $m_1 = 1 - m$ [8]. Значение параметра m эллиптических интегралов определяется вторым уравнением (5). Соотношение (4) удобно для нахождения угловой зависимости $j_i(\varphi_i)$. Придавая определенное значение параметру m , из (5) находим величину q и $h = (1/2)(q^{-1} + q)$. Для различных значений u и θ по таблицам эллиптических интегралов первого рода [8] находим функцию $\operatorname{am} u$ и $\operatorname{dn}(u|m) = [1 - m \sin^2(\operatorname{am} u)]^{1/2}$, следовательно, из (4) зависимость $j_i(\varphi_i)$, где

$$\varphi_i = \arccos \frac{1 - h \cos \theta_i}{h - \cos \theta_i} \quad (0 < \theta_i < \pi).$$

При вычислении функции $\operatorname{dn}(u|m)$ для значений m , близких к единице, удобно воспользоваться двумя первыми членами разложения этой функции по дополнительному параметру m_1 (формула 16.15.3 из [8]).

Обратимся к вычислению значений векторного потенциала цилиндров A_i . Не интересуясь значением векторного потенциала A вне цилиндров,

значение A_1 первого цилиндра можно вычислить, просуммировав вклады от потенциалов токовых нитей $j dl$, расположенных на поверхностях цилиндров,

$$A_1 = -\frac{\mu_0 r_0}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} j_1(\varphi_1) \ln r_1 d\varphi_1 + \int_0^{2\pi} j_2(\varphi_2) \ln r_2 d\varphi_2 \right] + \text{const}, \quad (7)$$

где r_1 и r_2 значения расстояний $P_1 B$ и $P_2 B$ (рис.1)

$$r_1 = 2r_0(h-1) \frac{1 + \cos \theta_1}{h - \cos \theta_1}, \quad r_2 = 2r_0(h-1) \frac{2h^2 - 1 + \cos \theta_2}{h - \cos \theta_2}. \quad (7a)$$

Подставим (4) с учетом (6) в соотношение (7) и используем значения интегралов (№5, 15; с.544, 545 в [9])

$$\int_0^{2\pi} \ln(a \pm \cos \theta) d\theta = -2\pi \ln 2d, \quad d = a - \sqrt{a^2 - 1},$$

$$\int_0^{2\pi} \ln(a \pm \cos \theta) \cos n\theta d\theta = -\frac{2\pi}{n} (\mp d)^n.$$

После интегрирования получим следующее соотношение для A_1 :

$$A_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[J_1 \ln(1 - q^2) + J_2 \ln \frac{1 - q^2}{q^2} + 2(J_1 + J_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1 + q^{2n})} \right].$$

Сумма по n в этом соотношении сворачивается (пример в №11, с.742 из [9]) и равна

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{m}^{1/4} K(\tilde{m})}{\pi \tilde{q}^{1/4}},$$

однако \tilde{m} в отличие от (5) определяется соотношением $\tilde{q} = q^2 = \exp(-\pi K'/K)$. Переходя к значению m , определяемому равенством (5), $\tilde{m}^{1/4} K(\tilde{m}) = 1/2m^{1/2} K(m)$ с учетом (2a) окончательно получим

$$A_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[J_1 \ln \frac{mq(h^2 - 1)K^2}{\pi^2} + J_2 \ln \frac{m(h^2 - 1)K^2}{\pi^2 q} + C \right]. \quad (8)$$

При замене индексов $1 \leftrightarrow 2$ получим соответствующее значение для A_2 с той же постоянной C . Выберем постоянную C таким образом, чтобы $A(r)$ на больших расстояниях от цилиндров представлялся в виде

$$-\frac{\mu_0}{2\pi} (J_1 + J_2) \ln r + f(r),$$

где $f(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$. Так как непосредственное суммирование потенциалов нитей (7) по применяемой методике дает нам именно такую асимптотику, то, поскольку использовались приведенные соотношения для r_1 и r_2 (7а) в единицах r_0 ,

$$C = -\frac{\mu_0}{4\pi} \times (J_1 + J_2) \ln r_0.$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Для двумерного случая разность векторных потенциалов $A_1 - A_2$, где A_1 и A_2 — потенциалы в произвольных точках, дает магнитный поток через прямоугольник единичной длины, параллельный образующей цилиндров, шириной, равной расстоянию между двумя точками на плоскости поперечного сечения.

Перейдем к вычислению коэффициентов взаимной индуктивности тождественных колец с радиусами b на близких расстояниях $2H$ друг от друга. Отклонение распределения плотности тока на контуре поперечного сечения какого-либо кольца от равномерного определяется двумя факторами: близостью другого кольца и кривизной исходного. В дальнейшем будем полагать $b \gg r_0$ и изменением распределения тока из-за кривизны колец будем пренебрегать, т.е. для двух близлежащих параллельных участков колец будем полагать распределение плотностей токов такими же, как и для двух параллельных цилиндров с теми же значениями токов. Выберем круговой контур, соосный, например, первому кольцу с радиусом $b - r_0$. На величину r наложим условие $r \gg r_0$, $2H$ и $r \ll b$. Тогда при вычислении магнитного потока через контур исходные кольца можно считать круговыми контурами. Положим ток J_2 во втором кольце равным нулю. Магнитный поток через контур от первого кольца $\Phi = L_{12}^{(0)} J_1$, где $L_{12}^{(0)}$ — коэффициент взаимной индукции рассматриваемого контура и контура, совпадающего с центральной осью кольца [10],

$$L_{12}^{(0)} = \mu_0 \sqrt{b(b-r)} \tilde{m}^{3/2} C(\tilde{m}), \quad \tilde{m} = \frac{4b(b-r)}{(2b-r)^2}, \quad (9)$$

где $C(\tilde{m})$ — эллиптический интеграл, приведенный в [11].

Так как

$$\tilde{m} \approx 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{b} \right)^2$$

близко к единице, то с учетом предельного соотношения для $C = = \ln(4\tilde{m}^{-1/2}) - 2$ при \tilde{m} , близких к единице [11], магнитный поток через контур $\Phi = \mu_0 b [\ln(8br^{-1}) - 2] J_1$ [10]. Поток через зазор между соосными кольцом и контуром, согласно вышеприведенному замечанию относительно магнитного потока в системе двух цилиндров, можно найти из соотношения $(A_1 - A(r))2\pi b$, где $A(r)$ — векторный потенциал в точках расположения контура. Так как $r \gg r_0$, то за $A(r)$ можно принять потенциал вдали от круговых цилиндров

$$-\frac{\mu_0}{2\pi} (J_1 + J_2) \ln r.$$

Находя суммарный поток $\Phi_1 = L_{11} J_1$ через первое кольцо и выделяя коэффициент перед J_1 , для безразмерного коэффициента собственной индуктивности $\tilde{L}_{11} = L_{11}/\mu_0 b = \tilde{L}_0 - \Delta \tilde{L}$ получим соотношение

$$\tilde{L}_{11} = \tilde{L}_0 - \frac{1}{2} \ln \frac{mq(h^2 - 1)K^2}{\pi^2}, \quad \tilde{L}_0 = \ln(8br_0^{-1}) - 2, \quad (10)$$

где $\tilde{L}_0 = L_0/\mu_0 b$ — безразмерный коэффициент собственной индуктивности уединенного кольца.

Для вычисления величины L_{12} заметим, что поток от первого кольца через второе отличается от потока Φ_1 на величину $(A_1 - A_2)2\pi b$. При $J_2 = 0$, следовательно, найдем

$$\tilde{L}_{12} = \frac{L_{12}}{\mu_0 b} = \tilde{L}_{11} - \ln \frac{1}{q}. \quad (11)$$

Из соотношения (10) следует, что добавка $\Delta\tilde{L}$ к \tilde{L}_0 (наведенная индуктивность) всегда отрицательна и уменьшает собственное значение индуктивности кольца.

Найдем предельные соотношения для величин \tilde{L}_{11} и \tilde{L}_{12} . На близких расстояниях при $h \rightarrow 1$ величины q , $m \rightarrow 1$. Из соотношения (5) при $K' \rightarrow \pi/2$ находим

$$K = -\frac{1}{2}\pi^2 \ln q^{-1},$$

а из (2а) следует, что

$$h^2 - 1 = \frac{1}{4}(q^{-1} - q)^2.$$

Подставляя эти величины в (10) и раскрывая неопределенность под знаком логарифма для добавки $\Delta\tilde{L}$ найдем предельное выражение $\Delta\tilde{L} = -\ln(\pi/2)$. Асимптотику $\Delta\tilde{L}$ в непосредственной близости колец друг от друга можно представить более точным соотношением

$$\Delta\tilde{L} = -\ln \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon = 1 - q$.

В этом случае для величины \tilde{L}_{12} (11) справедливо соотношение

$$\tilde{L}_{12} = \tilde{L}_0 - \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из (2а) следует, что основной член, определяющий ε при h , близких к 1, это $\sqrt{h^2 - 1} \approx \sqrt{2}\sqrt{h - 1}$. Для больших значений h , хотя и $L_{11} \rightarrow L_0$ ($m/q \rightarrow 16$ при $m \rightarrow 0$), соотношение для L_{12} (11) ($q \rightarrow 0$) приводит к неверному результату, что говорит о неприменимости этих соотношений в этом случае.

На рис.1 приведены зависимости \tilde{L}_{12} (1) кривая и \tilde{L}_{11} (2) кривая от зазора между кольцами $\xi = 2(H - r_0)/b$ для значения $b/r_0 = 20$. Штриховой линией 3 представлен график для безразмерного коэффициента взаимной индуктивности двух контуров, проведенных через центры поперечных сечений исходных колец, рассчитанный по соотношению (9) с $r_0 = 0$ и $m = (1 + H^2/b^2)^{-1}$. Из рис.1 следует, что при $b \gg r_0$ соотношениями (10), (11) уверенно можно пользоваться при зазоре $2(H - r_0)$, меньшем $1.5 - 2r_0$, и точность тем выше, чем ближе находятся кольца друг от друга.

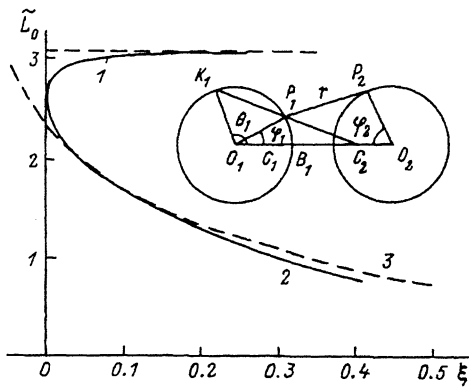


Рис. 1.

Соотношение для силы взаимодействия между кольцами легко получить исходя из выражения, следующего из закона сохранения энергии

$$F = \frac{1}{2} \frac{dU}{dH} = \frac{1}{2r_0} \frac{dU}{dh}$$

при $J_1, J_2 = \text{const}$, где энергия

$$U = \frac{1}{2} L_{11}(J_1^2 + J_2^2) + L_{12}J_1J_2 = \frac{1}{2} \mu_0 b [(J_1 + J_2)^2 \tilde{L}_{11} + 2J_1J_2 \ln q].$$

Из соотношения (2а) находим, что производная

$$\frac{dq}{dh} = -q(h^2 - 1)^{-1/2}.$$

Для определения производной $d\tilde{L}_{11}/dh$, как следует из (10), необходимо знать производную

$$\frac{d(mK^2)}{dh} = \frac{d(mK^2)}{dm} \frac{dm}{dq} \frac{dq}{dh}.$$

Из таблицы производных для эллиптических интегралов [11] находим

$$\frac{d(mK^2)}{dm} = \frac{EK}{m_1},$$

где E — эллиптическая функция, приведенная там же.

Производная dq/dm получается дифференцированием соотношения (5), с учетом $dK/dm = (2m_1m)^{-1}(E - m_1K)$ [11] приводит к выражению

$$\frac{dq}{dm} = \frac{q\pi}{2m_1mK^2} [E'K + K'E - KK'] = \frac{q\pi^2}{4m_1mK^2}, \quad (12)$$

где использовано равенство $[E'K + K'E - KK'] = \pi/2$ [8].

С учетом найденных соотношений после дифференцирования энергии U по h соотношение для силы окончательно приводится к виду

$$F = \frac{\mu_0 b}{8r_0 \sqrt{h^2 - 1}} \left[J_-^2 + 4J_+^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{KE}{\pi^2} - \frac{1}{1 - q^2} \right) \right], \quad (13)$$

где $J_- = J_1 - J_2$, $J_+ = J_1 + J_2$.

Разложим выражение в круглых скобках по степеням $\varepsilon = 1 - q$. С точностью до ε^3 включительно оно будет равно

$$-\frac{1}{6}\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + 6\alpha\varepsilon^2\right),$$

где

$$\alpha = \frac{2}{45} + \frac{1}{32}.$$

Следовательно, соотношение (13) с учетом $\sqrt{h^2 - 1} = \varepsilon(2q)^{-1}(1 + q)$ с точностью до ε^2 включительно приводится к виду

$$F = \frac{\mu_0 b}{4r_0} \left\{ \varepsilon^{-1} q(1 + q)^{-1} J_-^2 - \frac{1}{3} [1 - \varepsilon^2((1 + q)^{-1} - 6\alpha)] J_+^2 \right\}. \quad (14)$$

Это соотношение, хотя и выведено для значений $\varepsilon \ll 1$, дает хорошую точность на достаточно больших расстояниях. Второй член в (14) (первый член совпадает с соответствующим членом в (13)) по сравнению с соответствующим членом в (13) имеет относительную точность при $h < 2$ не более 12.5%, а при $h < 1.2$ точность не хуже 5%. Структура соотношения (14) $F = A\varepsilon^{-1} + B + C\varepsilon^2$, где A, B, C — постоянные, которые можно определить, положив в (14) $q = 1$, при близком расположении колец друг от друга дает тот же вид зависимости, что и соотношение (13).

В дальнейшем при рассмотрении зависимости силы от зазора между идеально-диамагнитными кольцами будем различать два режима [12]: первый, когда кольца запитываются током так, что величины токов при их взаимных перемещениях не изменяются $J_1, J_2 = \text{const}$, и второй, когда в сверхпроводящих кольцах заморожены постоянные потоки $\Phi_1, \Phi_2 = \text{const}$. При $J_1 = J_2 = J$ второй член в соотношении (14) отсутствует и сила, соответствующая притяжению, при $h \rightarrow 1$ стремится к конечному значению $F = -\mu_0 b J^2 / (3r_0)$. Во всех других случаях она бесконечно возрастает. При этом, конечно, необходимо иметь в виду, что при зазорах между кольцами, сравнимых с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводники $10^{-7} - 10^{-6}$ м [6], данное приближение неприменимо и требуется учет перераспределения магнитного поля внутри объема проводников.

На рис.2 для случая $J_1, J_2 = \text{const}$ сплошные кривые 1-3 представляют зависимость безразмерной силы $\tilde{F} = F/(\mu_0 |J_1| |J_2|)$ между кольцами от зазора $\xi = 2b(h - 1)/r_0$ для значений $J_1/J_2 = 1, 6, -6$ ($b/r_0 = 20$) соответственно. Штриховая кривая 1 соответствует случаю контуров, проведенных через центры поперечных сечений колец для $J_1 J_2 > 0$. В этом случае $\tilde{F} = \tilde{m}^2 (4\tilde{m}_1)^{-1/2} (C - D)$ и не зависит от величин токов,

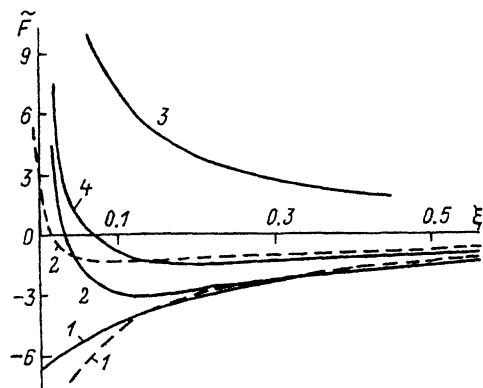


Рис. 2.

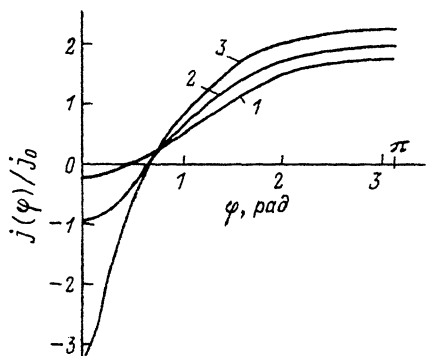


Рис. 3.

протекающих по контурам. Величины C и D — эллиптические интегралы [11], а их параметр \tilde{m} связан с приведенным зазором ξ соотношением $\xi = 2(\tilde{m}_1^{1/2} \tilde{m}^{-1/2} - r_0 b^{-1})$. При $J_1 \cdot J_2 > 0$ и $J_1 \neq J_2$ из-за перераспределения плотностей токов на поверхностях колец при достаточно малых зазорах реализуется отталкивание ($F > 0$), хотя токи и текут в одном направлении. Это является следствием индуцированных противоположно направленных плотностей токов на ближайших друг к другу участках проводников, что и создает сильное отталкивание $\sim \xi^{-1/2}$. Для иллюстрации этого на рис.3 приведены зависимости относительной плотности тока $j(\varphi)/j_0$ первого кольца, где $j_0 = J/(2\pi r_0)$ — плотность тока при его равномерном распределении по периметру сечения, от полярного угла φ (рис.1), рассчитанные по соотношению (4) для отношения токов $J_2/J_1 = 2$ и при значениях величин $h = 2.07$ (кривая 1), 1.44 (кривая 2), 1.06 (кривая 3). Из этого соотношения следует, что, например, в случае первого кольца для значений угла $\varphi = 0$ ($\theta = \pi$) и при $h \rightarrow 1$, $dn \rightarrow 0$ величина

$$j(0) \rightarrow [2(h-1)]^{-1/2} \left(1 - \frac{J_2}{J_1}\right) j_0.$$

Плотность тока при $\varphi = \pi$ ($\theta = 0$) при этом стремится к конечной величине

$$j(\pi) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) j_0,$$

которая получается из (4), если учесть, что $dn \rightarrow 1$, а $K \rightarrow \pi^2[4(h^2-1)]^{-1/2}$.

В случае сохранения магнитных потоков через кольца $\Phi_1 = L_0 J_{10} = L_{11} J_1 + L_{12} J_2$, $\Phi_2 = L_0 J_{20} = L_{11} J_2 + L_{12} J_1$, где J_{10} и J_{20} — токи в первом и втором кольцах на больших расстояниях колец друг от друга, величины J_- и J_+ , входящие в соотношения (13) и (14) на основе соотношений (10) и (11), даются выражениями $J_- = -\tilde{L}_0 J_{-0} \ln^{-1} q$, $J_+ = \tilde{L}_0 J_{+0} (2\tilde{L}_{11} + \ln q)$, где $J_{-0} = J_{10} - J_{20}$, $J_{+0} = J_{10} + J_{20}$. При $h \rightarrow 1$, хотя сумма токов J_+ стремится к конечной величине, разность токов $|J_-|$ возрастает $\sim \xi^{-1/2}$, а сила в этом случае, следовательно, изменяется $\sim \xi^{-3/2}$. При равных замороженных магнитных потоках в кольцах $\Phi_1 = \Phi_2$ ($J_- = 0$) предельная

величина силы F дается тем же соотношением, что и в первом случае при $J_1 = J_2 = J$, но с током в кольцах

$$J = \tilde{L}_0 J_0 / \left[2 \left(\tilde{L}_0 - \ln \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

На рис.2 сплошная кривая 4 соответствует зависимости силы $\tilde{F} = F/(\mu_0 |J_{10}| |J_{20}|)$ для значения $J_{20}/J_{10} = 1.4$ при том же $b/r_0 = 20$, а штриховая кривая 2 дает соответствующую зависимость в случае контуров. Эти кривые из-за влияния на величины токов имеют более пологий минимум.

В заключение приведем соотношения для коэффициентов осевой жесткости колец

$$k = -\frac{1}{2r_0} \frac{dF}{dh}.$$

Дифференцируя (13) по h и учитывая

$$\frac{d}{dh}(KE) = 2K^2(m_1 K^2 - E^2)(\pi^2 \sqrt{h^2 - 1})^{-1}$$

и ранее используемые соотношения, для случая $J_1, J_2 = \text{const}$ найдем

$$k_J = \frac{\mu_0 b h}{16\tau_0^2 (h^2 - 1)} \left\{ \frac{J_-^2}{(h^2 - 1)^{1/2}} + 2J_+^2 \left[f' - \frac{4K^2(m_1 K^2 - E^2)}{\pi^4 h} - \frac{1}{h(h^2 - 1)} \right] \right\}. \quad (15)$$

Здесь

$$f = \tilde{L}_{11} + \frac{1}{2} \ln q, \quad f' = \frac{df}{dh} = \frac{2}{\sqrt{h^2 - 1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{EK}{\pi^2} - \frac{1}{1 - q^2} \right).$$

Для случая $\Phi_1, \Phi_2 = \text{const}$, опуская детальные выкладки, получим $k_\Phi = k_J + \Delta k$, где

$$\Delta k = \frac{\mu_0 b \tilde{L}_0^2}{8\tau_0^2} \left[-\frac{J_-^2}{(h^2 - 1) \ln^3 q} + \frac{(f')^2}{2f^3} J_{+0}^2 \right]. \quad (16)$$

Из соотношения (16) непосредственно следует, что всегда $\Delta H > 0$. Для нахождения зависимости k_Φ от h необходимо величины J_- и J_+ , входящие в соотношение (15), выразить через J_{-0} и J_{+0} по соотношениям, приведенным выше.

Список литературы

- [1] Горенштейн И.А., Шульман И.А. Инерциальные навигационные системы. М.: Машиностроение, 1970. 130 с.
- [2] Протсено В.А., Гудкайн Ж.М. // Приборы для науч.исследов. 1968. № 9. С. 12-18.
- [3] Нейл, Кутер // Приборы для науч.исслед. 1960. № 2. С. 93-101.
- [4] Козарез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. Киев: Наукова думка, 1981. 140 с.
- [5] Козарез В.В., Колодеев И.Д. и др. // ДАН УССР. 1976. Сер. А. № 3. С. 248-249.
- [6] Менде Ф.Ф., Спицын А.И. Поверхностный импеданс сверхпроводников. Киев: Наукова думка, 1985. 240 с.

- [7] *Фейман Р., Лейтон Р., Сендс М.* Феймановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. Т. 6. 296 с.
- [8] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [9] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 799 с.
- [10] *Рамо и Уинери.* Поля и волны в современной радиотехнике. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 631 с.
- [11] *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций. М.: Физматгиз, 1959. 420 с.
- [12] *Спицын А.И., Личман Е.А.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 2. С. 193-196.

Харьковский институт
радиоэлектроники им. М.К.Янгеля

Поступило в Редакцию
29 декабря 1992 г.
В окончательной редакции
16 февраля 1993 г.

